

21年高考真题

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = (\quad)$.

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 3, 5\}$ C. $\{0, 1, 2, 4\}$ D. $\{0, 2, 3, 4\}$

【答案】C

【解析】由题意知, $A \cap B = \{1\}$, $(A \cap B) \cup C = \{0, 1, 2, 4\}$.

故选C.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $a^2 > 36$, 即 $a > 6$ 或 $a < -6$,

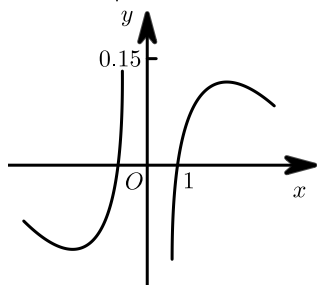
$\therefore$ “ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的充分不必要条件.

故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

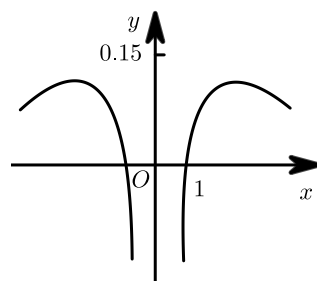
3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图象大致为 ().

A.

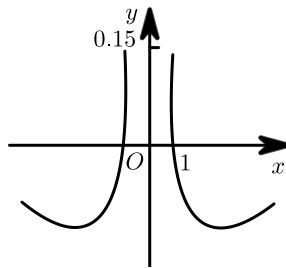
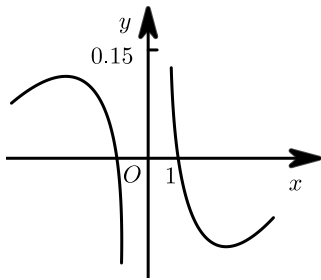


C.

B.



D.



【答案】B

【解析】易知， $y = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 是偶函数，排除A、C，

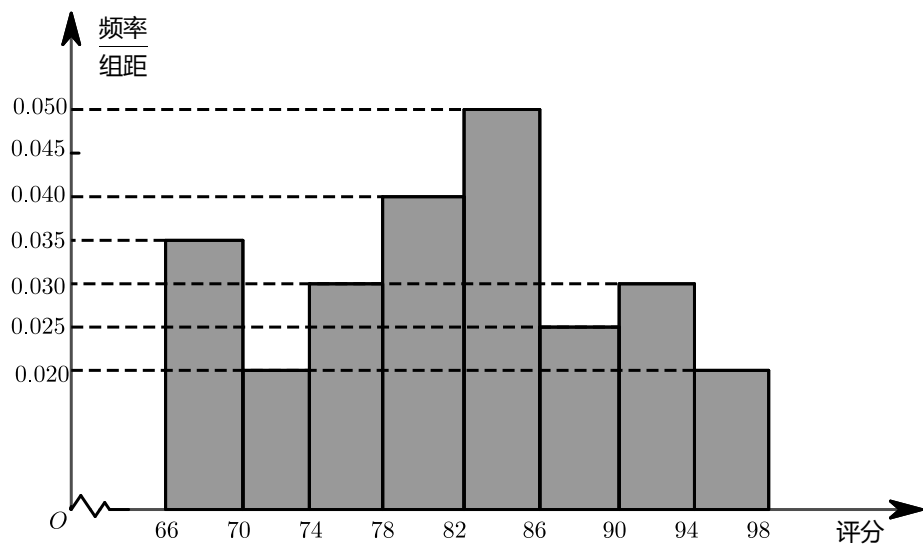
当 $x > 1$ 时， $y > 0$ ，排除D．

故选B．

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取400部，统计其评分数据，将所得400个评分数据分为8组：

$[66, 70)$ ， $[70, 74)$ ， $\dots$ ， $[94, 98]$ ，并整理得到如下的频率分布直方图，则评分在区间 $[82, 86)$ 内的影视作品数量是（ ）．



A. 20

B. 40

C. 64

D. 80

【答案】D

【解析】评分在 $[82, 86)$ 内的影视作品数量为 $400 \times 4 \times 0.05 = 80$ ．

故选D．

【标注】【知识点】频率分布直方图

5. 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < c < a$

D. $a < c < b$

【答案】 D

【解析】 由题意知, $a = \log_2 0.3 < 0$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4 = \log_2 \frac{5}{2} > 1$, $c = 0.4^{0.3} \in (0, 1)$,
故 $a < c < b$.

故选D.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 $1:3$, 则这两个圆锥的体积之和为 () .

A. 3π

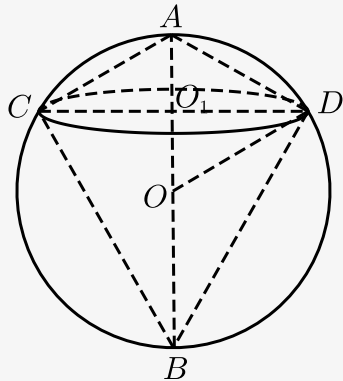
B. 4π

C. 9π

D. 12π

【答案】 B

【解析】 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$, 得 $r = 2$,



两个圆锥的高为 $1:3$, 即 $O_1B = 3O_1A$,

则 $O_1O = 1$, $OD = r = 2$, $O_1D = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 两个圆锥体积之和为 $V_{\text{和}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot (O_1A + O_1B) = 4\pi$.

故选B.

【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题

7. 设 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = ()$.

A. -1

B. $\lg 7$

C. 1

D. $\log_7 10$

【答案】 C

【解析】由题意知， $a = \log_2 10$ ， $b = \log_5 10$ ，

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \lg 2 + \lg 5 = 1.$$

故选C.

【标注】【知识点】对数的运算

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合. 抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点, 交双曲线的渐近线于 C, D 两点, 若 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$, 则双曲线的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

【答案】A

【解析】由题意知， $c = \frac{p}{2}$ ，则 $A\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ ， $C\left(-c, \frac{cb}{a}\right)$ ，

$$\therefore \frac{2b^2}{a} \cdot \sqrt{2} = \frac{2cb}{a},$$

$$\text{即 } c = \sqrt{2}b, \text{ 所以 } a^2 = c^2 - b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore \text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

故选A.

【标注】【知识点】抛物线与双曲线结合

9. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有6个零点，则 a 的取值范围是 ().

A. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$

B. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$

C. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$

D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$

【答案】A

【解析】 $\because f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有6个零点，

又 $\because$ 二次函数最多有两个零点，

$\therefore$ 当 $x < a$ 时， $f(x) = 0$ 至少有四个根.

$$\because f(x) = \cos(2\pi x - 2\pi a) = \cos 2\pi(x - a),$$

$$\therefore \text{令 } f(x) = 0, \text{ 即 } 2\pi(x - a) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + a.$$

又 $\because x \in (0, +\infty)$,

$$\therefore 0 < \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + a, \text{ 即 } -2a - \frac{1}{2} < k < -\frac{1}{2}.$$

①当 $x < a$ 时, $-5 \leq -2a - \frac{1}{2} < -4$, $f(x)$ 有4个零点, 即 $\frac{7}{4} < a \leq \frac{9}{4}$,
 $-6 \leq -2a - \frac{1}{2} < -5$, $f(x)$ 有5个零点, 即 $\frac{9}{4} < x \leq \frac{11}{4}$,
 $-7 \leq -2a - \frac{1}{2} < -6$, $f(x)$ 有6个零点, 即 $\frac{11}{4} < x \leq \frac{13}{4}$.

②当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4(a+1)^2 - 4(a^2 + 5) = 8a - 16 = 0$, 解得 $a = 2$,

当 $a < 2$ 时, $\Delta < 0$, $f(x)$ 无零点,

当 $a = 2$ 时, $\Delta = 0$, $f(x)$ 有1个零点,

当 $a > 2$ 时, $f(a) = a^2 - 2a(a+1) + a^2 + 5 = -2a + 5$.

$\therefore f(x)$ 的对称轴 $x = a+1$, 即 $f(a)$ 在对称轴的左边,

$\therefore$ 当 $-2a + 5 \geq 0$ 时, 即 $2 < a \leq \frac{5}{2}$, $f(x)$ 有两个零点.

当 $-2a + 5 < 0$ 时, 即 $a > \frac{5}{2}$, $f(x)$ 有1个零点,

综合①②可得, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有6个零点, 则需满足:

$$\begin{cases} \frac{7}{4} < a \leq \frac{9}{4} \\ 2 < a \leq \frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{9}{4} < a \leq \frac{11}{4} \\ a > \frac{5}{2} \text{ 或 } a = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{11}{4} < a \leq \frac{13}{4} \\ a < 2 \end{cases}$$

解得 $a \in \left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$.

故选: A.

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{9+2i}{2+i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4-i$

【解析】 $\frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{20-5i}{5} = 4-i$.

故答案为: $4-i$.

【标注】 【知识点】复数的乘法和除法

2. 在 $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^0 的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 160

【解析】通项 $T_{r+1} = C_6^r (2x^3)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r \cdot 2^{6-r} \cdot x^{18-4r}$, $r \in \mathbf{N}$, $0 \leq r \leq 6$,

令 $18 - 4r = 6$, 得 $r = 3$,

$\therefore x^6$ 的系数为 $C_6^3 \cdot 2^3 = 160$.

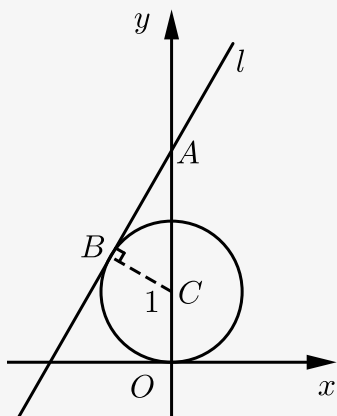
【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

3. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A , 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切于点 B , 则 $|AB| = \underline{\quad}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$, 可知 $\angle ACB = 60^\circ$,

而 $BC \perp AB$, $BC = r = 1$, 故 $|AB| = \sqrt{3}$.



【标注】 【知识点】 圆的切线的相关问题

4. 若 $a > 0$, $b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 $\underline{\quad}$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2}} + b = \frac{2}{b} + b \geq 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a = b$ 且 $b = \frac{2}{b}$, 即 $a = b = \sqrt{2}$ 时取等号)

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 利用两次基本不等式求最值

5. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方获胜, 否则本次平局. 已知每次活动中, 甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{5}$, 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影

响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为 ____；3次活动中，甲至少获胜两次的概率为 ____。

【答案】 $\frac{1}{3}$
;
 $\frac{7}{27}$

【解析】 在一次活动中，甲获胜的概率为 $\frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3}$ ，

3次活动独立，为二项分布，

$\therefore$ 甲至少获胜两次的概率为 $C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$ 。

故答案为： $\frac{1}{3}$ ； $\frac{7}{27}$ 。

【标注】 【知识点】n次独立重复试验与二项分布

6. 在边长为1的等边 $\triangle ABC$ 中， D 为线段 BC 上的动点， $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E ， $DF \parallel AB$ 且交 AC 于点 F ，则 $\left|2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}\right|$ 的值为 ____； $\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DA}$ 的最小值为 ____。

【答案】 1； $\frac{11}{20}$

【解析】 在 AB 上取点 M 使 $BE = EM$ ，如图1，

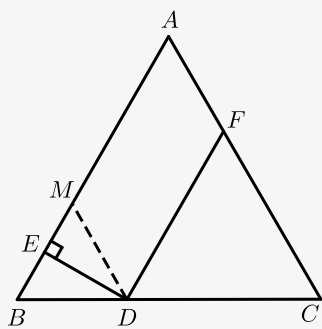


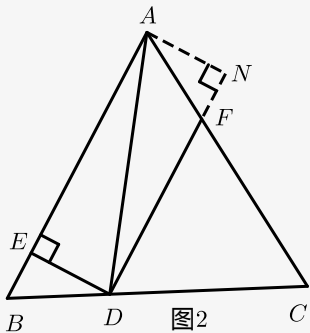
图1

易知 $\triangle BDM$ 为等边三角形， $\therefore DM \parallel AF$ ，

$\therefore DF \parallel AB$ ， $\therefore$ 四边形 $MDFA$ 为平行四边形，

$\therefore \left|2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}\right| = \left|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$ ，

延长 DF 至 N ，使 $AN \perp DN$ ，如图2，



$$\text{则 } (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA}) = |\overrightarrow{DE}|^2 + |\overrightarrow{DF}| \cdot |\overrightarrow{DN}|,$$

$$\text{设 } BD = x, \text{ 则 } DE = \frac{\sqrt{3}}{2}x, DF = CD = 1 - x, AE = DN = 1 - \frac{x}{2}, x \in [0, 1],$$

$$\therefore (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{3}{4}x^2 + (1 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$= \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{11}{20}$$

$$\geq \frac{11}{20},$$

$$\text{故 } (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA} \text{ 的最小值为 } \frac{11}{20}.$$

【标注】 【知识点】 数量积的最值问题

三、解答题

(本大题共5小题，共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 求 $\cos C$ 的值.

(3) 求 $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $2\sqrt{2}$

(2) $\frac{3}{4}$.

$$(3) \frac{3\sqrt{21}-1}{16}.$$

【解析】(1) 由正弦定理得： $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = 2b = 2\sqrt{2}$.

(2) 由余弦定理得： $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4b^2 + b^2 - 2b^2}{2 \cdot 2b \cdot b} = \frac{3}{4}$.

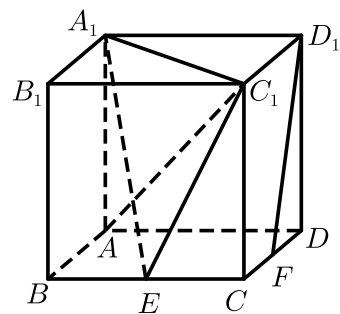
(3) 由(2)知， $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ， $C \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

$$\text{则} \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{3}{8} \sqrt{7}, \cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = \frac{1}{8},$$

$$\therefore \sin \left(2C - \frac{\pi}{6} \right) = \sin 2C \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2C = \frac{3}{8} \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{21}-1}{16}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

2. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点.



(1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .

(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.

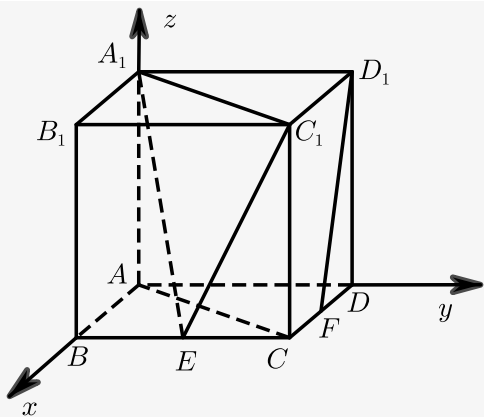
(3) 求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$(3) \frac{1}{3}.$$

【解析】(1) 以 A 为原点，分别以 AB ， AD ， AA_1 所在直线为 x ， y ， z 轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A_1(0, 0, 2)$, $E(2, 1, 0)$, $C_1(2, 2, 2)$,

则 $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{EC_1} = (0, 1, 2)$,

设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

故取 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

而 $F(1, 2, 0)$, $D_1(0, 2, 2)$, $\overrightarrow{FD_1} = (-1, 0, 2)$,

$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{FD_1} = 0$, 又 $D_1F \not\subset$ 平面 A_1EC_1 ,

故 $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .

(2) 由(1)知平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2)$,

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC_1} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} \right|}{\left| \vec{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC_1} \right|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(3) 由(1)知 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$,

设平面 AA_1C_1 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

故取 $\vec{m} = (1, -1, 0)$, $\therefore$ 平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

$$\therefore \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{m} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \vec{m} \right| \cdot \left| \vec{n} \right|} = \frac{4}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由图可知, 二面角 $A - A_1C_1 - E$ 为锐角,

故其正弦值为 $\frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题; 向量法解决二面角问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 上顶点为 B , 右焦点为 F , $|BF| = \sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M , 与 y 轴的正半轴相交于点 N , 过点 N 作 BF 的垂线交 x 轴于点 P , 若 $MP \parallel BF$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(2) $y = x + \sqrt{6}$.

【解析】(1) $|BF|^2 = b^2 + c^2 = 5$,

$$\therefore a^2 = 5,$$

$$\therefore a = \sqrt{5},$$

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 则 } c = 2,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

(2) 显然直线 l 的斜率存在, 不妨设直线 l 的方程为 $y = kx + m (m > 0)$, $M(x_0, y_0)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (1 + 5k^2)x^2 + 10kmx + 5m^2 - 5 = 0,$$

$$\text{令 } \Delta = 0, \text{ 即 } (10km)^2 - 4(1 + 5k^2)(5m^2 - 5) = 0,$$

$$\text{化简得 } m^2 = 1 + 5k^2,$$

$$\text{易知 } x_0 = \frac{-5km}{1 + 5k^2}, \text{ 则 } y_0 = kx_0 + m = \frac{m}{1 + 5k^2},$$

由直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N , 易得 $N(0, m)$, $m > 0$,

由(1)易知 $F(2, 0)$, $B(0, 1)$,

$$\therefore k_{BF} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore NP \perp BF,$$

$$\therefore k_{NP} = 2,$$

$$\therefore l_{NP}: y = 2x + m, \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x = -\frac{m}{2}, \text{ 即 } P\left(-\frac{m}{2}, 0\right),$$

$$\therefore k_{MP} = \frac{\frac{m}{1 + 5k^2}}{\frac{-5km}{1 + 5k^2} + \frac{m}{2}} = \frac{2m}{5k^2m + m - 10km} = \frac{2}{5k^2 - 10k + 1},$$

$$\therefore MP \parallel BF,$$

$$\therefore \frac{2}{5k^2 - 10k + 1} = -\frac{1}{2},$$

解得 $k = 1$,

则 $m^2 = 6$,

$\because m > 0, \therefore m = \sqrt{6}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = x + \sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】切线综合问题

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1 = 4$,

$$b_3 - b_2 = 48.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in \mathbf{N}^*$.

① 求证: $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 为等比数列.

② 证明: $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}, k \in \mathbf{N}^*.$

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*; b_n = 4^n, n \in \mathbf{N}^*.$

(2) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意知, $S_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4(2a_1 + 7d) = 8a_1 + 56 = 64$,

解得: $a_1 = 1$,

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\because b_3 - b_2 = b_1(q^2 - q) = 4(q^2 - q) = 48,$$

$$\therefore q^2 - q - 12 = 0, \text{ 故 } q = 4 \text{ 或 } -3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore b_n = a_1 q^{n-1} = 4^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{ ① } c_n = 4^{2n} + \frac{1}{4^n},$$

$$\text{则 } c_n^2 - c_{2n} = \left(4^{2n} + \frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(4^{4n} + \frac{1}{4^{2n}}\right) = 2 \times 4^n,$$

$$\therefore \frac{c_{n+1}^2 - c_{2(n+1)}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{2 \times 4^{n+1}}{2 \times 4^n} = 4,$$

则 $c_1^2 - c_2 = \left(4^2 + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(4^4 + \frac{1}{4^2}\right) = 8$,
 $\therefore \{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是以 8 为首项, 4 为公比的等比数列 .

② 由 (1) 知 $c_n^2 - c_{2n} = 2 \times 4^n$,

即证 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(2k-1)(2k+1)}{2 \times 4^k}} < 2\sqrt{2}$, $k \in \mathbf{N}^*$,

即证 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < 4$, $k \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < \sqrt{\frac{4k^2}{4^k}} = \frac{2k}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}}$,

$\therefore \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$,

令 $S_n = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$ ①

则 $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$ ②

由 ①-② 得 $\frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

$\therefore S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$,

$\therefore \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} < 4$,

得证 .

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式；等比数列的判定与证明

5. 已知函数 $f(x) = ax - xe^x (a > 0)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 .

(2) 证明： $f(x)$ 有唯一的极值点 .

(3) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立 , 求实数 b 的取值范围 .

【答案】 (1) $y = (a-1)x$.

(2) 证明见解析 .

(3) $[-e, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = a - (x+1)e^x$,

$$f'(0) = a - 1, f(0) = 0,$$

∴切线方程为 $y = (a - 1)x (a > 0)$.

(2) 令 $g(x) = a - (x + 1)e^x (a > 0)$,

$$g'(x) = -(x + 2)e^x,$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $x < -2$,

令 $g'(x) < 0$, 得 $x > -2$,

∴ $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } g(-2) = a + \frac{1}{e^2} > 0,$$

且当 $x < -2$ 时, $(x + 1)e^x < 0$,

又 $\because a > 0$,

∴ $a - (x + 1)e^x > 0$ 在 $(-\infty, -2)$ 上恒成立,

即 $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上无零点,

∵ $a > 0$,

$$\therefore \ln(a + 1) > 0,$$

$$g(\ln(a + 1)) = a - [\ln(a + 1) + 1](a + 1)$$

$$= -1 - (a + 1)\ln(a + 1) < 0,$$

∴ $g(x)$ 在 $(-2, \ln(a + 1))$ 上有一个零点, 不妨记为 x_0 ,

∴ 当 $x < x_0$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $g(x) < 0$,

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

∴ $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 无极小值点,

得证.

(3) 由 (2) 知, $f(x)_{\max} = f(x_0)$,

即 $ax_0 - x_0e^{x_0} \leq a + b$ 能成立,

又 $f'(x_0) = 0$, 即 $a - (x_0 + 1)e^{x_0} = 0$,

$$\therefore a = (x_0 + 1)e^{x_0},$$

则 $(x_0 + 1)e^{x_0} \cdot x_0 - x_0e^{x_0} \leq (x_0 + 1)e^{x_0} + b$ 能成立,

即 $(x_0^2 - x_0 - 1)e^{x_0} \leq b$ 能成立,

∵ $a > 0$,

$$\therefore (x_0 + 1)e^{x_0} > 0, \text{ 即 } x_0 > -1.$$

令 $h(x) = (x^2 - x - 1)e^x (x > -1)$,

$$h'(x) = (x^2 - x - 1)e^x + (2x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x,$$

令 $h'(x) > 0$, 解得, $x > 1$,

令 $h'(x) < 0$, 解得, $-1 < x < 1$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = -e$,

$\therefore b$ 的取值范围为 $[-e, +\infty)$.

【标注】 【知识点】求函数极值 (含参指对型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式