

21年高考真题

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

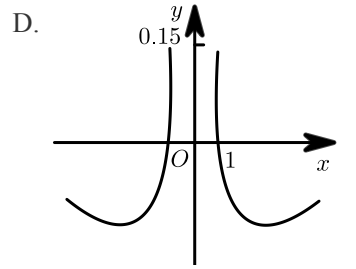
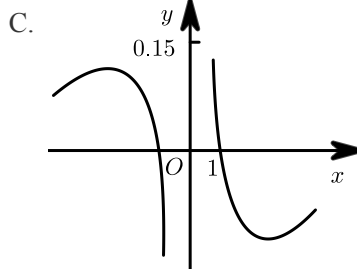
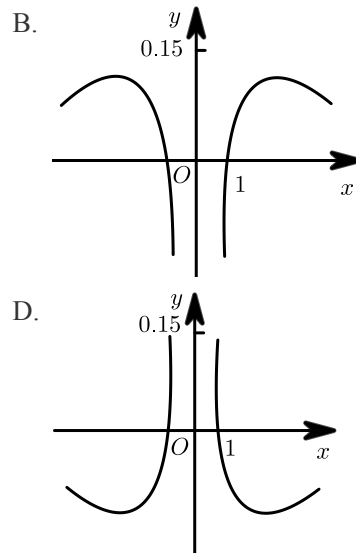
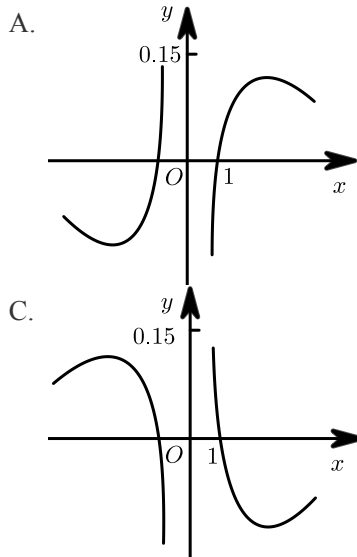
1. 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = (\quad)$.

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 3, 5\}$ C. $\{0, 1, 2, 4\}$ D. $\{0, 2, 3, 4\}$

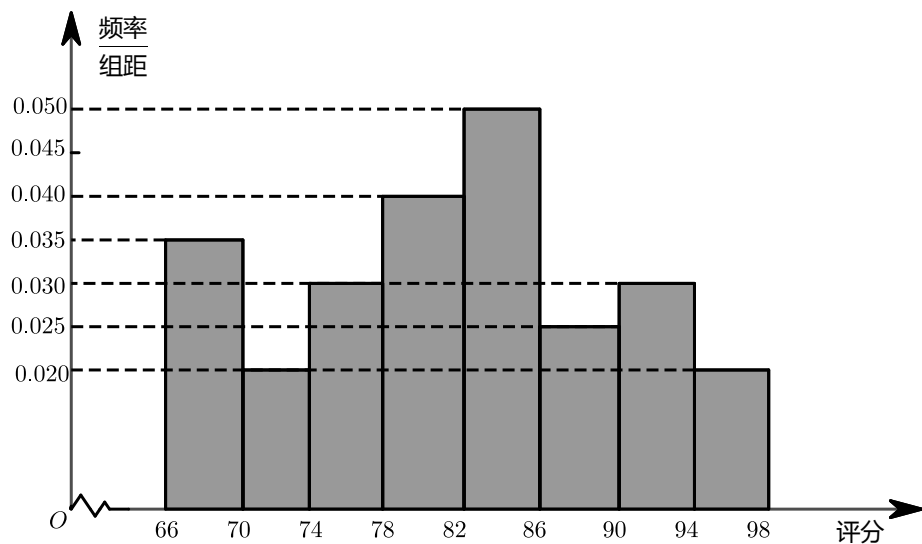
2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的 $(\quad)$.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图象大致为 $(\quad)$.



4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取400部, 统计其评分数据, 将所得400个评分数据分为8组: $[66, 70)$, $[70, 74)$, $\dots$, $[94, 98]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间 $[82, 86)$ 内的影视作品数量是 $(\quad)$.



- A. 20 B. 40 C. 64 D. 80

5. 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 $1:3$, 则这两个圆锥的体积之和为 () .

- A. 3π B. 4π C. 9π D. 12π

7. 设 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ () .

- A. -1 B. $\lg 7$ C. 1 D. $\log_7 10$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合. 抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点, 交双曲线的渐近线于 C, D 两点, 若 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$, 则双曲线的离心率为 () .

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

9. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有 6 个零点, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ B. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ C. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$

二、 填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

- i 是虚数单位, 复数 $\frac{9+2i}{2+i} =$ _____ .
- 在 $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^6 的系数是 _____ .

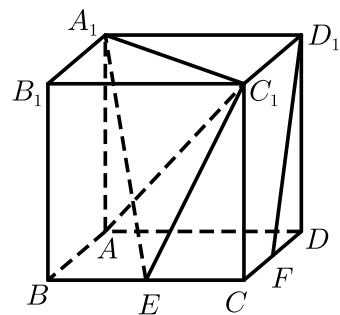
3. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A ，与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 相切于点 B ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局. 已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{5}$ ，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；3次活动中，甲至少获胜两次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 在边长为1的等边 $\triangle ABC$ 中， D 为线段 BC 上的动点， $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E ， $DF \parallel AB$ 且交 AC 于点 F ，则 $|\vec{2BE} + \vec{DF}|$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $(\vec{DE} + \vec{DF}) \cdot \vec{DA}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(本大题共5小题，共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{2}$.
- (1) 求 a 的值.
- (2) 求 $\cos C$ 的值.
- (3) 求 $\sin(2C - \frac{\pi}{6})$ 的值.

2. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点.



- (1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .
- (2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.
- (3) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 上顶点为 B , 右焦点为 F , $|BF| = \sqrt{5}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M , 与 y 轴的正半轴相交于点 N , 过点 N 作 BF 的垂线交 x 轴于点 P , 若 $MP \parallel BF$, 求直线 l 的方程.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1 = 4$,

$$b_3 - b_2 = 48.$$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

- (2) 设 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- ① 求证: $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 为等比数列.

- ② 证明: $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

5. 已知函数 $f(x) = ax - xe^x (a > 0)$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

- (2) 证明: $f(x)$ 有唯一的极值点.

- (3) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

