

一、2021耀华一模

二、选择题

(本大题共9小题,每小题5分,共45分)

1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 4\}$, 则集合 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = (\quad)$.
- A. $\{5, 6\}$ B. $\{1, 5, 6\}$ C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{1, 2, 5, 6\}$

【答案】D

【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 4\}$,
所以 $\complement_U M = \{2, 5, 6\}$, $\complement_U N = \{1, 5, 6\}$,
所以 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \{1, 2, 5, 6\}$.
故选D.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

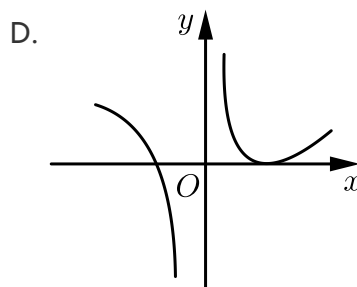
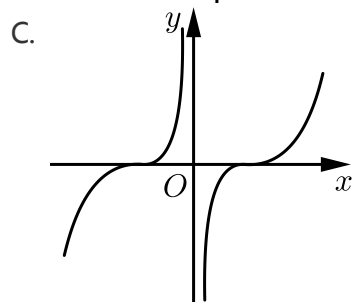
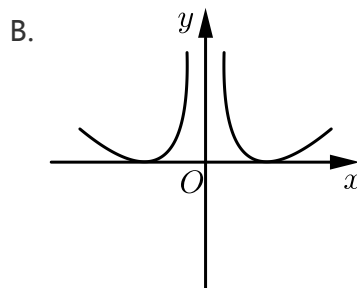
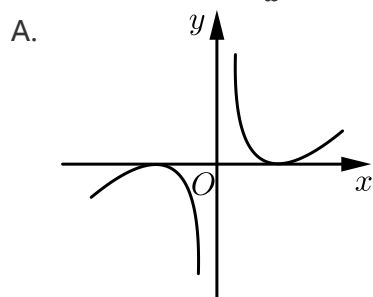
2. 已知 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则 “ $\varphi = 0$ ” 是 “ $y = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数” 的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $\because$ 若 $\varphi = 0$ 时, 则 $f(x) = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 为真命题;
 $\because \varphi = \pi$ 时, $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数,
 $\therefore f(x) = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = 0$, 为假命题;
是充分不必要条件,
所以A选项是正确的.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

3. 已知函数 $f(x) = \frac{|x|-1}{x} \ln|x|$ ，其图象大致为（ ）.



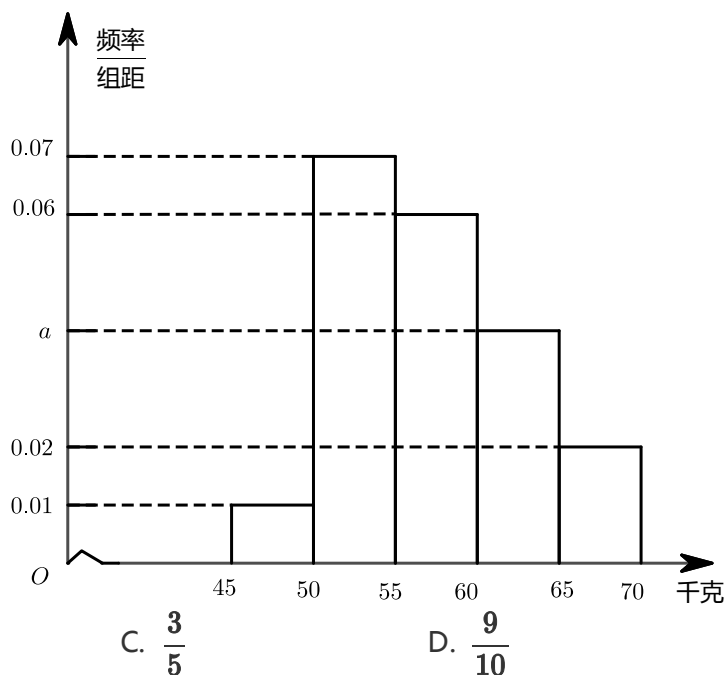
【答案】 A

【解析】 由题易知 $f(-x) = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数，函数图象关于坐标原点对称，故排除选项 B，D；

当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) > 0$ ，故排除选项 C，
故选 A.

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

4. 为了解学生的身体状况，某校随机抽取了一批学生测量体重．经统计，这批学生的体重数据（单位：千克）全部介于45至70之间．将数据分成5组，并得到如图所示的频率分布直方图．现采用分层抽样的方法，从 $[55, 60)$ ， $[60, 65)$ ， $[65, 70]$ 这三个区间中随机抽取6名学生，再从这6名学生中随机抽取3人，则这三人中恰有两人位于区间 $[55, 60)$ 的概率是（ ）.



A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{9}{20}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{9}{10}$

【答案】 B

【解析】 ∵ 频率分布直方图中所有矩形面积为1，

$$\therefore 5 \times (0.01 + 0.02 + a + 0.06 + 0.07) = 1 .$$

解得 $a = 0.04$,

由频率分布直方图可知，[55, 60)，[60, 65)，[65, 70]三个区间中的学生人数的比为3 : 2 : 1，

则从[55, 60)，[60, 65)，[65, 70]三个区间抽取的学生人数分别为3，2，1，

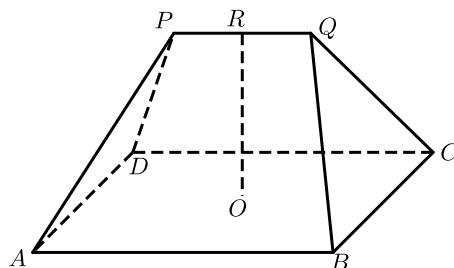
设事件A为从这6名学生中随机抽取3人，这三人中恰有两人位于区间[55, 60)，

$$\text{故 } P(A) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{3 \times 3}{20} = \frac{9}{20} .$$

故选B .

【标注】 【知识点】 频率分布直方图；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

5. 如图所示的屋脊状楔体 $PQ - ABCD$ ，下底面 $ABCD$ 是矩形，假设屋脊没有歪斜，即 PQ 的中点 R 在底面 $ABCD$ 上的投影为矩形 $ABCD$ 的中心点 O ， $PQ \parallel AB$ ， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $PQ = 2$ ， $OR = 1$ （长度单位：丈）则楔体 $PQ - ABCD$ 的体积为（ ）（体积单位：立方丈）.



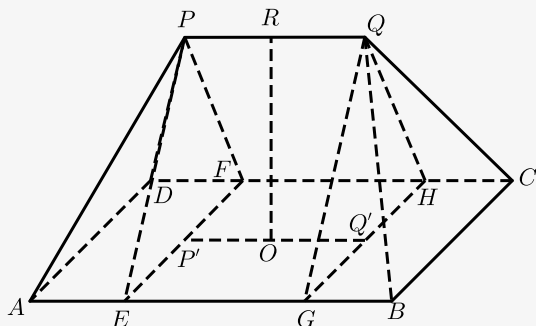
A. $6\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$

C. 8

D. 5

【答案】D

【解析】如图，



过点 O 作 $P'Q' \parallel PQ$ ，且 $P'Q' = PQ$ ，点 O 为 $P'Q'$ 的中点，

再过点 P' 作 $EF \parallel AD$ 交 AB 于点 E 、交 CD 于点 F ，过点 Q' 作 $GH \parallel BC$ ，交 AB 于点 G 、交 CD 于点 H ，

$$\text{所以 } AE = BG = \frac{AB - PQ}{2} = 1,$$

$$\text{所以 } S_{AEFD} = S_{BCHG} = 1 \times 3 = 3,$$

$$S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } V_{P-AEFD} = V_{Q-BCHG} = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1,$$

$$V_{PEF-QGH} = \frac{3}{2} \times 2 = 3,$$

$$\text{所以 } V_{PQ-ABCD} = V_{P-AEFD} + V_{PEF-QGH} + V_{Q-BCHG} = 1 + 3 + 1 = 5.$$

故选D.

【标注】【知识点】空间几何体的体积

6. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 满足 $2f(2) = f(16)$ ，若 $a = f(\log_4 2)$ ， $b = f(\ln 2)$ ， $c = f(5^{-\frac{1}{2}})$ ，则 a, b, c 的大小关系是() .

A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

【答案】C

【解析】由 $2f(2) = f(16)$ 可知 $2 \cdot 2^a = 2^{4a}$ ，

$$\therefore 1 + a = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ 即 } f(x) = x^{\frac{1}{3}},$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$$\text{又 } \log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2},$$

$$\ln 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e},$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore 1 < \log_2 e < 2 < \sqrt{5},$$

$$\therefore \ln 2 > \log_4 2 > 5^{-\frac{1}{2}},$$

$$\therefore b > a > c.$$

故选C.

【标注】 【知识点】幂函数的图象及性质

7. 已知第一象限内的点 M 既在双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上, 又在抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 设 C_1 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若 C_2 的焦点为 F_2 , 且 $\triangle MF_1F_2$ 是以 MF_1 为底边的等腰三角形, 则双曲线的离心率为().

A. $1 + \sqrt{2}$

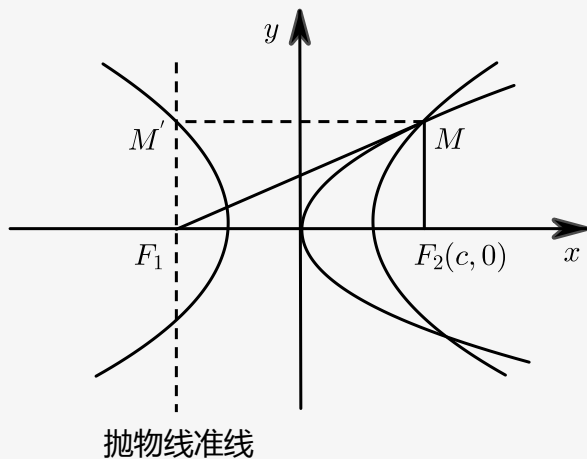
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2 + \sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】



因为 $y^2 = 2px$, $c = \frac{p}{2}$,

所以 $y^2 = 2cx$,

又因为 $MM' = F_1F_2$,

所以 $M(c, 2c)$,

代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中,

可得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{4c^2}{b^2} = 1$ ①,

又因为 $\frac{b^2}{a} = 2c$, 所以 $b^2 = 2ac$,

代入①中可得 $e^2 - 2e - 1 = 0$,

解得 $e = 1 + \sqrt{2}$,
 $e = 1 - \sqrt{2}$ (舍去) .

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

8. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是 () .
- ① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点
 ② $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心
 ③ $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增
 ④ 要得到 $g(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 的图象, 可以将 $y = f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$
- A. ①②③ B. ②③ C. ①② D. ①④

【答案】 C

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,
 由 $f(x) = 0$ 得 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,
 $k=0$ 时, $x = \frac{\pi}{12}, k=1$, 则 $x = \frac{7\pi}{12}$,
 $\therefore \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$ 为 $(0, \pi)$ 上 2 个零点, 故①正确;
 且 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心, 故②正确;
 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 可知 $f(x)$ 在此区间上不单调, 故③错误;
 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = 2 \sin 2x$, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 得到
 $y = 2 \sin 4x \neq g(x)$, 故④错误;
 综上, 选 C①② .
 故选 C .

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误

9. 对于函数 $f(x), g(x)$, 设 $x_1 \in \{x | f(x) = 0\}$, $x_2 \in \{x | g(x) = 0\}$, 若存在 x_1, x_2 使得 $|x_1 - x_2| \leq 2$, 则称 $f(x), g(x)$ 互为 “零点相邻函数” . 若 $f(x) = e^{x-2} + x - 3$ 与 $g(x) = x^2 - ax - a - 2$ 互为 “零点相邻函数” , 则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $(-2, \frac{14}{5})$ B. $[-2, \frac{14}{5}]$
 C. $(-\infty, 2) \cup (\frac{14}{5}, +\infty)$ D. $(-\infty, 2] \cup [\frac{14}{5}, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $f(2) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数 ,

所以 $f(x)$ 只有唯一零点 2 ,

$f(x)$, $g(x)$ 是 “零点相邻函数” , $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 至少有一零点 ,

由 $g(x) = x^2 - ax - a - 2 = 0$, 所以 $a = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$, $x \in [0, 4]$,

设 $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$, $x \in [0, 4]$, $y = a$, $h(x)$ 与 $y = a$ 在 $[0, 4]$ 有交点 ,

$h(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 - 2(x + 1) - 1}{x + 1} = x - \frac{1}{x + 1} - 1$, $x \in [0, 4]$,

一次函数和反比例函数的单调性可知 $h(x)$, $x \in [1, 4]$ 为增函数 ,

所以 $h(x) \in \left[-2, \frac{14}{5}\right]$, 要使 $h(x)$ 与 $y = a$ 在 $[0, 4]$ 有交点 ,

需 $-2 \leq a \leq \frac{14}{5}$, 即为 a 的取值范围 .

故选 B .

【标注】 【知识点】 函数的新定义问题 ; 已知零点情况求参数的取值范围

三、 填空题

(本大题共 6 小题 , 每小题 5 分 , 共 30 分)

1. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 且满足 $(1 + i)z = \frac{4 - 2i}{1 - i}$, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $z = \frac{4 - 2i}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$,

又 $z = a + bi$,

$\therefore a = 2$, $b = -1$,

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

2. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中 , x^{-2} 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -160

【解析】 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r (\sqrt[3]{x})^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r \cdot C_6^r x^{2-\frac{4r}{3}}$ ，
 令 $2 - \frac{4r}{3} = -2$ ，得 $r = 3$ ，
 所以 x^{-2} 的系数为 $(-2)^3 C_6^3 = -160$ 。
 故答案为： -160 。

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

3. 已知直线 $l: kx + b (k > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，且被圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ； $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】由 $x^2 + y^2 = 1$ 可得圆心 $C_1(0,0)$ ， $r_1 = 1$ ，
 由题意可得： $\frac{|b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ①，
 由 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 可得圆心 $C_2(4,0)$ ， $r_2 = 2$ ，
 因为直线 $l: y = kx + b (k > 0)$ 被圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ ，
 所以圆心 $C_2(4,0)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ ，
 所以 $\frac{|4k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ②，
 由①②可得 $|b| = |4k + b|$ ，
 当 $b = k + b$ 时， $k = 0$ 不满足 $k > 0$ ，
 当 $b = -4k - b$ 时，可得： $b = -2k$ 代入 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ 整理得 $4^2 = k + 1$ ，
 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ （舍），
 所以 $b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，
 故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ； $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求参数

4. 某市有 A, B, C, D 四个景点，一位游客来该市游览，已知该游客游览 A 的概率为 $\frac{2}{3}$ ，游览 B, C, D 的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，且该游客是否游览这四个景点相互独立，则该游客至多游览一个景点的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；用随机变量 X 表示该游客游览的景点个数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{1}{4}$ ； $\frac{13}{6}$

【解析】1：记“该游客游览*i*个景点”为事件 A_i ， $i = 0, 1$ ，

$$\text{则 } P(A_0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24},$$

$$P(A_1) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) C_3^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{24},$$

所以该游客至多游览一座山的概率为

$$P(A_0) + P(A_1) = \frac{1}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{4}.$$

2：随机变量 X 的可能取值为0, 1, 2, 3, 4，

$$P(X=0) = P(A_0) = \frac{1}{24},$$

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{5}{24},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{3} \times C_3^2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{24},$$

$$P(X=4) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12},$$

所以 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{5}{24} + 2 \times \frac{9}{24} + 3 \times \frac{7}{24} + 4 \times \frac{2}{24} = \frac{13}{6}.$$

故 X 的数学期望为 $\frac{13}{6}$ 。

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望；相互独立事件的概率乘法公式

5. 已知实数 x, y 满足 $xy = 4x + y (x > 0, y > 0)$ ，则 $\frac{4x + y + 4}{\sqrt{xy}}$ 的最小值是 _____。

【答案】 4

【解析】 $\because xy = 4x + y$ ，

$$\therefore 4x + y = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy},$$

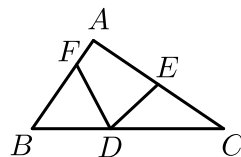
$$\therefore \frac{4x + y + 4}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{xy})^2 + 4}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy} + \frac{4}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

当且仅当 $\sqrt{xy} = \frac{4}{\sqrt{xy}}$ 时等号成立

$\therefore$ 最小值= 4。

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

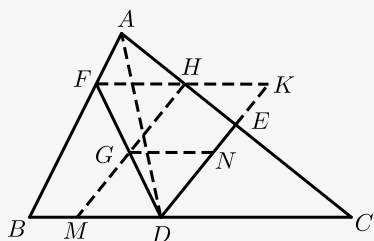
6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为边 BC, CA, AB 上的点, 且 $CD = \frac{3}{5}BC$, $EC = \frac{1}{2}AC$, $AF = \frac{1}{3}AB$, 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点 (P 点不在边界上), 若 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE}$, 则实数 λ 的取值范围为 _____.



【答案】 $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$

【解析】 取 BD 的中点 M , 过 M 作 $MH \parallel DE$ 分别交 DF, AC 于点 G, H , 连接 FH , 延长 FH , 交 DE 的延长线于点 K , 可得 $FK \parallel BC$, 过 G 作 $GN \parallel BC$, 交 DE 于点 N ,

如图,



则由 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DM} + \lambda\overrightarrow{DE}$ 可知,

P 点在线段 GH 上运动 (不包括端点) 连接 AD ,

当 P 与 G 重合时, 根据 $\overrightarrow{DP} = t\overrightarrow{DF} = t(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BD})$

$$= t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{2}{3}t(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) - \frac{2}{3}t\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{2}{3}t\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DE}\right) - \frac{2}{3}t\overrightarrow{DC}$$

$$= -\frac{8}{9}t\overrightarrow{DC} + \frac{4}{3}t\overrightarrow{DE}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE},$$

可知 $\lambda = \frac{1}{2}$,

当 P 与 H 重合时, 由 P, C, E 三点共线可知 $1 - \frac{1}{3} + \lambda = 1$,

即 $\lambda = \frac{4}{3}$,

结合图形可知 $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

【标注】 【知识点】 向量系数求值问题

四、解答题

(本大题共5小题 , 共75分)

1. 已知 a, b, c 分别为锐角三角形 ABC 三个内角 A, B, C 的对边 , 且 $\sqrt{3}c = 2a \sin C$.

(1) 求 A .

(2) 若 $\cos B = \frac{2}{3}$, 求 $\sin(2B - A)$ 的值 .

(3) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}$.

(3) $b = c = 2$.

【解析】 (1) $\because$ 锐角 $\triangle ABC$ 中 , $\sqrt{3}c = 2a \sin C$,

$$\therefore \sqrt{3} \sin C = 2 \sin A \sin C ,$$

$$\text{又} \because \sin C \neq 0 ,$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$A = \frac{\pi}{3} .$$

(2) $\because \cos B = \frac{2}{3}$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9} ,$$

$$\begin{aligned} \because A = \frac{\pi}{3}, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos A = \frac{1}{2}, \\ \therefore \sin(2B - A) &= \sin 2B \cos A - \sin A \cos 2B \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

$$(3) \because a = 2, S_{\triangle ABC} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

$$= \sqrt{3},$$

$$\therefore bc = 4,$$

$$\text{由 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } b^2 + c^2 = 8,$$

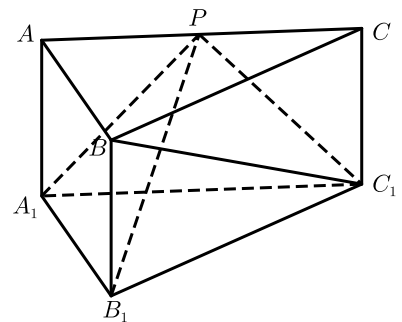
$$\text{即 } \begin{cases} b^2 + c^2 = 8 \\ bc = 4 \end{cases}$$

$$\text{解得 } b = c = 2,$$

$$\therefore b = c = 2.$$

【标注】 【知识点】SSS类三角形（利用余弦定理）

2. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，点 P 为 AC 的中点， $PA_1 = PC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $A_1B_1 = B_1C_1 = 2\sqrt{3}$ ， $A_1C_1 = 4$ 。



- (1) 求证： $A_1P \perp C_1B$ 。
 (2) 求 PC_1 与平面 PA_1B_1 所成角的正弦值。
 (3) 求二面角 $B_1 - PA_1 - C_1$ 的正弦值。

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(3) \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

【解析】(1) $\because PA_1 = PC_1 = 2\sqrt{2}, A_1C_1 = 4,$

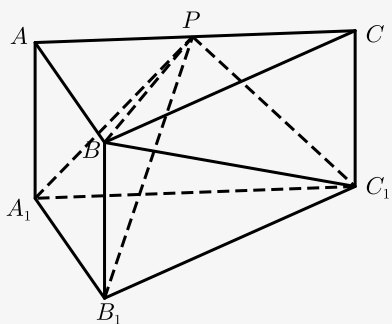
$$\therefore PA_1^2 + PC_1^2 = A_1C_1^2,$$

$$\therefore PA_1 \perp PC_1,$$

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 = B_1C_1,$

$$\therefore AB = BC,$$

又 $\because P$ 为 AC 的中点, 连接 BP , 则 $BP \perp AC,$



又 $\because AA_1 \perp$ 面 $ABC, AC \subset$ 面 $ABC,$

$$\therefore AA_1 \perp BP, \text{ 且 } AC \cap AA_1 = A,$$

$$\therefore BP \perp \text{面 } ACC_1A_1, A_1P \subset \text{面 } ACC_1A_1,$$

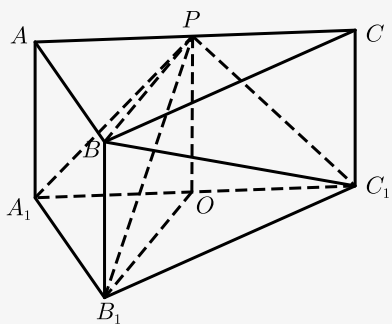
$$\therefore BP \perp A_1P, BP \cap PC_1 = P,$$

$$BP_1PC \subset \text{面 } BC_1P,$$

$$\therefore A_1P \perp \text{面 } BC_1P, C_1B \subset \text{面 } BC_1P,$$

$$\therefore A_1P \perp C_1B.$$

(2) 取 A_1C_1 的中点 O , 连接 $PO, B_1O,$

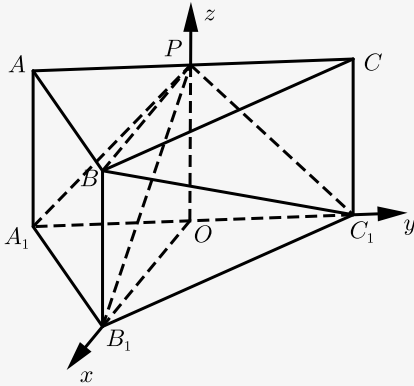


则 $PO \parallel AA_1,$

且 $PO \perp A_1C_1$,

在 $\text{Rt}\triangle PA_1O$ 中, $PO = \sqrt{PA_1^2 - A_1O^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$,

故以 O 为原点, 以 OB , OC_1 , OP 分别为 x , y , z 轴建系 ,



则 $P(0, 0, 2)$, $A_1(0, -2, 0)$, $OB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1O^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore B_1(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $C_1(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{PC_1} = (0, 2, -2)$,

$\overrightarrow{PA_1} = (0, -2, -2)$, $\overrightarrow{PB_1} = (2\sqrt{2}, 0, -2)$,

设平面 PA_1B_1 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA_1} = -2y - 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB_1} = 2\sqrt{2}x - 2z = 0 \end{cases} , \text{取 } z = 1, \text{ 则 } y = -1, x = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore \vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1 \right) ,$$

设 PC_1 与面 PA_1B_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{PC_1} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{PC_1}|}{|\vec{m}| |\overrightarrow{PC_1}|} = \frac{|-2 - 2|}{\sqrt{\frac{5}{2}} \sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

(3) 由 (2) 知面 PA_1B_1 法向量为 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1 \right)$, $OB_1 \perp$ 面 ACC_1A ,

故 $\overrightarrow{OB}$ 为面 PA_1C_1 的法向量 $\overrightarrow{OB_1} = (2\sqrt{2}, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{OB_1} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OB_1}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{OB_1}|} = \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ,$$

记二面角 $B_1 - PA_1 - C_1$ 的角为 α ,

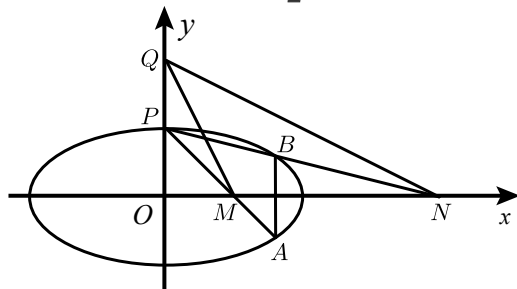
$$\therefore |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{5}}{5} ,$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{5} .$$

【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为2.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 设 P 为椭圆上顶点, 点 A 是椭圆 C 上异于顶点的任意一点, 直线 PA 交 x 轴于点 M , 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N . 问: 在 y 轴的正半轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 存在, $(0, 2)$.

【解析】 (1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 由题意可得: $b = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 $a = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $B(m, n)$, $M(x_M, 0)$, 直线 BP 的方程为: $y - 1 = \frac{n-1}{m}x$, 令 $y = 0$, 可得:

$$x_N = \frac{m}{1-n},$$

$$\therefore N\left(\frac{m}{1-n}, 0\right),$$

由点 A, B 关于 x 轴对称,

$$\therefore A(m, -n), \text{ 同理可得: } M\left(\frac{m}{1+n}, 0\right),$$

假设在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0, t) (t > 0)$, 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$,

由 $\tan \angle OQM = \tan \angle ONQ$, 可得: $\frac{|x_M|}{|t|} = \frac{|t|}{|x_N|}$, 即 $t^2 = |x_M x_N|$,

$$\therefore t^2 = \frac{m^2}{1-n^2} = 4, \text{ 又 } t > 0, \text{ 解得 } t = 2,$$

经过验证： $t = 2$ 时， $\angle OQM = \angle ONQ$ ，

$\therefore$ 在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0, 2)$ ，使得 $\angle OQM = \angle ONQ$ 。

【标注】 【知识点】角度问题

4. 已知首项大于0的等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 1$ ，且满足 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{3}$ ；等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $b_3, \frac{3}{2}b_2, 2b_1$ 成等差数列，且 $b_1 \neq \frac{15}{2}$ ， $S_4 = 30$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求 $\frac{(a_n)^2 + 1}{b_n}$ 的最大值，并求出此时 n 的值。

(3) 记 $c_n = (-1)^{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{3n+5}{(a_n+1)(a_n+2)b_n} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】 (1) $a_n = n, b_n = 2^n$ 。

(2) $\frac{5}{4}, n = 2$ 或 3 。

(3) $T_n = -\frac{13}{18} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{3n+2}{9} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n$ 。

【解析】 (1) 由题意可知 $\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{(a_1+1)(a_1+2)} = \frac{2}{3}$ ，

整理得 $a_1^2 + 2a_1 - 3 = 0$ ，

解得 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = -3$ （舍），

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = n$ ，

由 $b_3, \frac{3}{2}b_2, 2b_1$ 成等差数列可知， $b_3 + 2b_1 = 3b_2$ ，

即 $b_1 q^2 + 2b_1 = 3b_1 q$ ，又 $b_1 \neq 0$ ，

则有 $q^2 - 3q + 2 = 0$ ，

解得 $q = 1$ 或 $q = 2$ 。

当 $q = 1$ 时，由 $S_4 = 4b_1 = 30$ ，

则 $b_1 = \frac{15}{2}$ 不符合题意，故舍去，

$$\text{当 } q=2 \text{ 时, } S_4 = \frac{b_1(1-2^4)}{1-2} = 30, \text{ 解得 } b_1 = 2,$$

$$\therefore b_n = 2^n.$$

$$(2) \frac{(a_n)^2 + 1}{b_n} = \frac{n^2 + 1}{2^n}, \text{ 令 } d_n = \frac{n^2 + 1}{2^n},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 令 } \begin{cases} d_n \geq d_{n+1} \\ d_n \geq d_{n-1} \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{n^2 + 1}{2^n} \geq \frac{(n+1)^2 + 1}{2^{n+1}} \\ \frac{n^2 + 1}{2^n} \geq \frac{(n-1)^2 + 1}{2^{n-1}} \end{cases},$$

$$\text{解得 } 2 \leq n \leq 3, \text{ 即 } n = 2 \text{ 或 } 3,$$

$$\text{又 } d_1 = 1, d_2 = \frac{5}{4}, d_3 = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{当 } n = 2 \text{ 或 } 3 \text{ 时, } d_n \text{ 最大, 最大为 } \frac{5}{4}.$$

$$(3) c_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n} + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{(n+1)(n+2) \cdot 2^n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n} + (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n} \right].$$

$$\text{记数列 } \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } D_n,$$

$$\therefore D_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \cdots + n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{①},$$

$$-\frac{1}{2}D_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+ \cdots + n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{②},$$

$$\text{①}-\text{②得 } \frac{3}{2}D_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] - n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$\therefore D_n = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{2}{9} + \frac{3n+2}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{记数列 } \left\{ (-1)^n \left[\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n} \right] \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } Q_n,$$

$$\therefore$$

$$Q_n = -\left(-\frac{1}{2 \cdot 2^0} + \frac{1}{3 \cdot 2}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2}\right) - \cdots + (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore T_n = D_n + Q_n = -\frac{13}{18} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{3n+2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

【标注】 【知识点】等差数列与等比数列综合；数列中最大项与最小项的求解问题；错位相减法求和

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \sin x$ ，其中 $x \in (0, \pi]$ 。

- (1) 当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程。
- (2) 判断函数 $f(x)$ 是否存在极值，若存在，请判断是极大值还是极小值；若不存在，说明理由。
- (3) 讨论函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上零点的个数。

【答案】 (1) $y = \frac{2}{\pi}x + \ln \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 当 $a < 1 - \frac{1}{\pi}$ 时， $f(x)$ 有极大值；当 $a \geq 1 - \frac{1}{\pi}$ 时， $f(x)$ 无极值。

(3) $a \in \left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)\right) \cup \left(-\frac{\ln \pi}{\pi}, +\infty\right)$ 时无零点；
 $a \in \left[-\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right), -\frac{\ln \pi}{\pi}\right]$ 时有 1 个零点。

【解析】 (1) 当 $a = 0$ 时， $f(x) = \ln x + \sin x$ ，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} + 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$y - \left(\ln \frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \frac{2}{\pi}x + \ln \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故 } y = f(x) \text{ 在点 } \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ 处的切线方程为 } y = \frac{2}{\pi}x + \ln \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) f'(x) = \frac{1}{x} + a + \cos x,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{1}{x} + a + \cos x, g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \sin x < 0,$$

$$\text{故 } f'(x) \text{ 单调递减, } f'(x)_{\min} = f'(\pi) = \frac{1}{\pi} + a - 1,$$

又 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$,

①若 $f'(\pi) < 0$, 即 $a < 1 - \frac{1}{\pi}$ 时, $\exists x_0 \in (0, \pi)$, 使 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处取得极大值, 不存在极小值,

②若 $f'(\pi) \geq 0$, 即 $a \geq 1 - \frac{1}{\pi}$, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 单调递增, 此时 $f(x)$ 无极值.

(3) 由 (2) 可知,

(i) 若 $a \geq 1 - \frac{1}{\pi}$ 时,

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) + 1 = \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} > 0,$$

即 $a \geq 1 - \frac{1}{\pi}$ 时函数 $f(x)$ 没有零点;

(ii) 若 $a < 1 - \frac{1}{\pi}$ 时, $x \in (0, x_0]$ 时, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (x_0, \pi]$ 时, $f(x)$ 单调递减,

由 $f'(x_0) = 0$ 得 $\frac{1}{x_0} + a + \cos x_0 = 0$,

从而 $a = -\frac{1}{x_0} - \cos x_0$,

再设 $h(x) = -\frac{1}{x} - \cos x$,

则 $h'(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x > 0$,

从而 a 关于 x_0 单调递增,

①若 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 此时 $a \in \left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right]$,

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi) > 0$ 得 $a < -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$ 或 $a > -\frac{\ln \pi}{\pi}$,

$\therefore a < -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$ 时无零点;

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi) < 0$ 得 $-\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right) < a < -\frac{\ln \pi}{\pi}$,

$\therefore -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right) < a \leq -\frac{2}{\pi}$ 时有 1 个零点;

当 $a = -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(\pi) \neq 0$, 有 1 个零点,

因此 $a < -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$ 时无零点;

$-\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right) \leq a \leq -\frac{2}{\pi}$ 时有 1 个零点;

②若 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 此时 $a \in \left(-\frac{2}{\pi}, 1 - \frac{1}{\pi}\right]$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}a + 1 > 0$, $f(\pi) = \ln \pi + \pi a$,

$\therefore f(x)_{\max} = f(x_0)$

$= \ln x_0 + ax_0 + \sin x_0$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x_0 + \sin x_0 - x_0 \cos x_0 - 1, \\
 &\text{设 } m(x) = \ln x + \sin x - x \cos x - 1, \\
 &\text{则 } m'(x) = \frac{1}{x} + x \sin x > 0, \\
 &\text{故 } f(x)_{\max} > m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} > 0, \\
 &\text{若 } f(\pi) > 0 \text{ 即 } a > -\frac{\ln \pi}{\pi}, \text{ 即 } -\frac{\ln \pi}{\pi} < a < 1 - \frac{1}{\pi} \text{ 时无零点;} \\
 &\text{若 } f(\pi) \leq 0 \text{ 即 } a \leq -\frac{\ln \pi}{\pi}, \text{ 即 } -\frac{2}{\pi} < a \leq -\frac{\ln \pi}{\pi} \text{ 时有1个零点,} \\
 &\text{综上, } a \in \left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)\right) \cup \left(-\frac{\ln \pi}{\pi}, +\infty\right) \text{ 时无零点;} \\
 &a \in \left[-\frac{2}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right), -\frac{\ln \pi}{\pi}\right] \text{ 时有1个零点.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求函数极值（含参三角型导函数）

五、2021和平一模

六、选择题

（本大题共9小题，每小题5分，共45分）

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | |x| < 2\}$, $C = \{-2, -1, 0\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = (\quad)$.
- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】C

【解析】 $\because A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$, $C = \{-2, -1, 0\}$

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$, $(A \cap B) \cup C = \{-2, -1, 0, 1\}$.

故选C.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式；交、并、补集混合运算

2. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $2 < a < 3$ ” 是 “ $a^2 - 5a - 6 < 0$ ” 的 $(\quad)$.
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

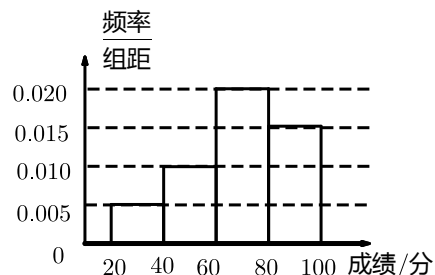
【解析】 $a^2 - 5a - 6 < 0$ 则 $(a+1)(a-6) < 0$, $-1 < a < 6$,

所以“ $2 < a < 3$ ”是“ $-1 < a < 6$ ”的充分不必要条件,

故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 某校高三年级的全体学生参加体育测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$. 若低于60分的人数是90, 则该校高三年级的学生人数是().



A. 270

B. 300

C. 330

D. 360

【答案】B

【解析】∵成绩低于60分有第一、二组数据,

在频率分布直方图中, 对应矩形的高分别为0.005, 0.01,

每组数据的组距为20,

则成绩低于60分的频率

$$P = (0.005 + 0.010) \times 20 = 0.3,$$

又∵低于60分的人数是90人,

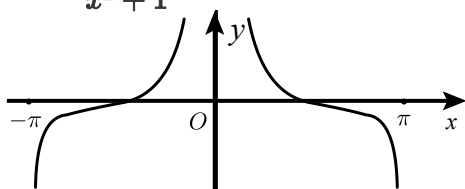
则该班的学生人数是 $\frac{90}{0.3} = 300$.

故选B.

【标注】【知识点】频率分布直方图

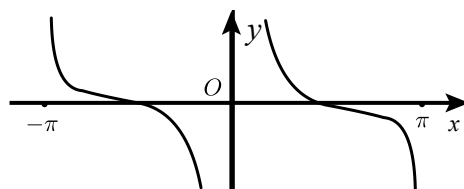
4. 函数 $y = \frac{\tan x}{x^2 + 1}$ 在 $(-\pi, \pi)$ 的图象大致为().

A.

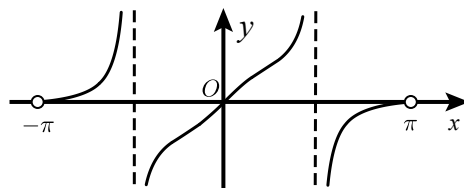
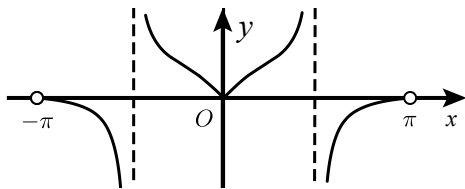


C.

B.



D.



【答案】D

【解析】当 $x=0$ 时， $y = \frac{0}{0+1} = 0$ ，

故AB错误，

又令 $f(x) = \frac{\tan x}{x^2 + 1}$ ，

则 $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{x^2 + 1} = -\frac{\tan x}{x^2 + 1} = -f(x)$ ，

即 $f(x)$ 是奇函数，故C错误。

综上，故选D。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

5. 设 $a = 8^{\frac{1}{2}}$ ， $b = \log_3 2$ ， $c = \log_2 3$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】C

【解析】 $a = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2$ ，

$b = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$ ，

$c = \log_2 3 < \log_2 4 = 2$ 。

即： $b < c < a$ 。

故选C。

【标注】【知识点】对数函数的图象及性质；指对幂比较大小

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，则三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的体积为（ ）。

A. $\frac{4}{3}$

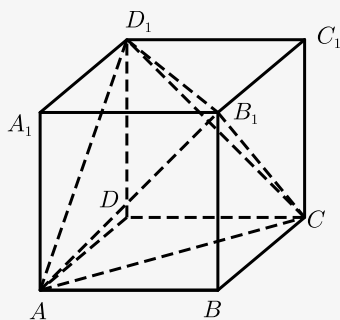
B. $\frac{8}{3}$

C. 4

D. 6

【答案】B

【解析】



三棱锥 $A-B_1CD_1$ 的体积=正方体的体积-4个三棱锥的体积.

$$\text{故 } V_{A-B_1CD_1} = V_{\text{正}} - V_{C_1-B_1CD} - V_{B_1-ABC} - V_{B_1-AA_1D} - V_{D_1-ADC},$$

$$\text{又} \because V_{C_1-B_1CD} = V_{B_1-ABC} = V_{B_1-AA_1D} = V_{D_1-ADC}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{底面积} \times \text{高}$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{4}{3},$$

$$\therefore V_{A-B_1CD_1} = 2 \times 2 \times 2 - \frac{4}{3} \times 4$$

$$= 8 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{8}{3}.$$

故本题应选B.

【标注】 【知识点】 等体积法

7. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点, 且双曲线的两条渐近线相互垂直, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

【答案】 D

【解析】 抛物线的准线方程为 $x = -2$, 即 $(-2, 0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点,

$$\therefore a^2 + b^2 = 4,$$

又双曲线的两条渐近线相互垂直, 则 $\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$, 即 $a = b$,

$$\therefore a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2},$$

则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

故选D.

【标注】 【知识点】 抛物线与双曲线结合; 已知双曲线的渐近线求其他参数

8. 设函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$. 给出下列结论 :

- ① $f(x)$ 的最小正周期是 π ;
- ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 内单调递增 ;
- ③ 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 , 可得到函数 $y = \cos 2x$ 的图象 .

其中所有正确结论的序号是 () .

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$,

化简得 $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

① $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故①正确 ;

② $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore -\frac{3}{8}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8}$,

$\therefore \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 在区间内 ,

$\therefore$ ②正确 ;

③ $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 长度 ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sin \left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) , \end{aligned}$$

$\therefore$ ③错误 .

$\therefore$ 答案选 A .

【标注】 【知识点】 求正弦型函数的单调区间 ; 正余弦型、正切型函数图象变换

9. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ 恰有两个互异的实数解 , 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, 0]$ B. $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{8}, +\infty\right)$
- C. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{8}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{5-2\sqrt{6}}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

【答案】 D

【解析】

$$\ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a (x > 1),$$

$$\ln x + \frac{1}{4}x + 1 - a = 0,$$

$$\therefore \ln x + \frac{1}{4}x \text{ 为增函数,}$$

$$\therefore \text{当该方程在 } x > 1 \text{ 时无实数根时, } \frac{1}{4} + 1 - a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq \frac{5}{4}.$$

$$\textcircled{1} a > \frac{5}{4} \text{ 时, } x > 1 \text{ 时有一个解,}$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 时, } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a \text{ 有 1 个解,}$$

$$\text{当 } x \leq 1 \text{ 时, } x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2a\right)x + a \text{ 是递减的,}$$

$$1 + \frac{1}{4} - 2a + a = \frac{5}{4} - a < 0,$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 时有 1 个解,}$$

$$\therefore a > \frac{5}{4} \text{ 成立.}$$

$$\textcircled{2} a = \frac{5}{4} \text{ 时, } \ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x > 1 \text{ 时无解,}$$

$$\text{但 } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x \leq 1 \text{ 时有 1 个解,}$$

$$\therefore a = \frac{5}{4} \text{ 不成立.}$$

$$\textcircled{3} a < \frac{5}{4} \text{ 时, } \ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x > 1 \text{ 时无解,}$$

$$x \leq 1 \text{ 时, } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a,$$

$$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2a\right)x + a = 0,$$

该方程要在 $x \leq 1$ 时有 2 个解,

$$\Delta = 4a^2 - a + \frac{1}{16} - 4a > 0,$$

$$\therefore a > \frac{5 + 2\sqrt{6}}{8} \text{ 或 } a < \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8},$$

$$\therefore a < \frac{5}{4},$$

$$\therefore a < \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8},$$

$$\text{且 } x = 1 \text{ 时, } 1 + \frac{1}{4} - 2a + a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq \frac{5}{4},$$

$$\therefore a < \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8}.$$

$$\text{综上 } a \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

故选 D.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

七、填空题

(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

1. 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{1-i}{2+i}$ 的虚部等于 _____ .

【答案】 $-\frac{3}{5}$

【解析】 复数 $\frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1-3i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ 的虚部为 $-\frac{3}{5}$.

【标注】 【知识点】 复数的基本概念；复数的四则运算综合；复数的乘法和除法

2. 在 $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是 _____ .

【答案】 -15

【解析】 $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^5$ 展开式公式，

$$T_{r+1} = C_5^r \cdot x^{5-r} \cdot (-3)^r x^{-2r} = C_5^r (-3)^r x^{5-3r},$$

求 x^2 系数，令 $5-3r=2$ ， $r=1$ ，

$$\therefore \text{系数为 } C_5^1 (-3)^1 = -15 .$$

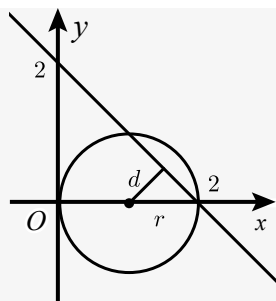
【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

3. 已知直线 $l: x+y-2=0$ 与圆 $C: (x-1)^2+y^2=1$ 相交于 A, B 两点，则线段 AB 的长度为 _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 圆 C 圆心坐标为 $(1,0)$ ，

$$\text{圆心到直线 } l: x+y-2=0 \text{ 的距离 } d = \frac{|1+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



$$\therefore AB = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

【标注】 【知识点】圆的弦长的相关问题

4. 甲、乙两名同学进行篮球投篮练习，甲同学一次投篮命中的概率为 $\frac{3}{4}$ ，乙同学一次投篮命中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，假设两人投篮命中与否互不影响，则甲、乙两人各投篮一次，至少有一人命中的概率是 _____ .

【答案】 $\frac{11}{12}$

【解析】 设事件 A 为“甲同学投篮一次命中”，事件 B 为“乙同学投篮一次命中”，事件 C 为“甲、乙两人各投篮一次，至少有一人命中”，

$$\begin{aligned} P(C) &= P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) \\ &= P(A)P(B) + P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】相互独立事件的概率乘法公式

5. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $\frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because a > 0$ ， $b > 0$ ，

$$\therefore a^2 + 1 \geq 2a,$$

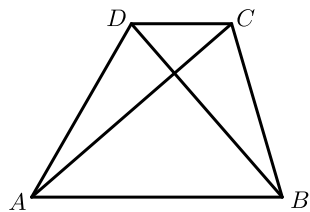
$$b^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}b,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b} &= \frac{(a^2 + 1) + (b^2 + 2)}{a + \sqrt{2}b} \\ &\geq \frac{2a + 2\sqrt{2}b}{a + \sqrt{2}b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(a + \sqrt{2}b)}{a + \sqrt{2}b} \\
&= 2, \\
&\therefore \left(\frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b} \right)_{\min} = 2, \text{ 此时 } a = 1, b = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

6. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 5$, $CD = 2$, $BC = \sqrt{13}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, M, N 分别是线段 AB, AD 上的点, 且 $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{AN}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为 _____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 设 $\angle CAB = \theta$,

则 $\angle BCD = \pi - \theta$,

则 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$,

$\because CD \parallel AB, CD = 2, AB = 5$,

$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$,

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$,

$\because \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$,

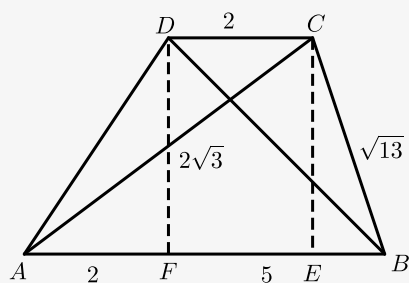
$\therefore \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \right) = 0$,

即 $13 - \sqrt{13} \times 5 \times \cos \theta + \frac{2}{5} \times 5 \times \sqrt{13} \times \cos \theta - \frac{2}{5} \times 25 = 0$,

得 $3\sqrt{13} \cos \theta = 3$,

得 $\cos \theta = \frac{\sqrt{13}}{12}$,

过 C 作 $CD \perp AB$, 过 D 作 $DF \perp AB$,



则 $\underline{CE} \parallel \underline{DF}$,

则 $BE = BC \cdot \cos \theta = 1$,

$$CE = BC \cdot \sin \theta = \sqrt{13} \times \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = 2\sqrt{3} ,$$

则 $DF = CE = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \underline{CE} \parallel \underline{DF}$,

$\therefore \underline{EF} \parallel \underline{CD} = 2$,

$\therefore AF = AB - BE - EF = 2$,

$$\text{则 } \tan \angle DAF = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAF = \frac{\pi}{3} ,$$

$$\therefore AD = \frac{AF}{\cos \frac{\pi}{3}} = 4 ,$$

$$\text{则 } \left| \overrightarrow{AM} \right| + \left| \overrightarrow{AN} \right| = 2 ,$$

$$\text{得 } \left| \overrightarrow{AM} \right| = 2 - \left| \overrightarrow{AN} \right| ,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$$

$$= \left| \overrightarrow{AM} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AN} \right| \cdot \cos \angle DAB$$

$$= \left(2 - \left| \overrightarrow{AN} \right| \right) \cdot \left| \overrightarrow{AN} \right| \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left| \overrightarrow{AN} \right| - \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AN} \right|^2 ,$$

$$\therefore \left| \overrightarrow{AN} \right| \in (0, 2) ,$$

函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ 开口向下, 对称轴 $x = 1$,

$$\therefore \text{当 } \left| \overrightarrow{AN} \right| = 1 \text{ 时, } \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} \right\rangle_{\max} = 1 - \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2} .$$

【标注】 【知识点】数量积的最值问题；线性运算和数量积综合问题

八、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $B = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 求 $\sin A$.

(3) 求 $\sin(B + 2A)$ 的值.

【答案】 (1) 6 .

$$(2) \frac{3\sqrt{21}}{14} .$$

$$(3) -\frac{4\sqrt{3}}{7} .$$

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 有 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

$$\therefore \frac{a^2 + 4 - 28}{4a} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } a^2 - 2a - 24 = 0 ,$$

$$\therefore a = 6 .$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\therefore \sin A = \frac{3\sqrt{21}}{14} .$$

$$(3) \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{28 + 4 - 36}{2 \times 2\sqrt{7} \times 2} = -\frac{\sqrt{7}}{14} ,$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = -\frac{3\sqrt{3}}{14} ,$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{13}{14} ,$$

$$\therefore \sin(B + 2A)$$

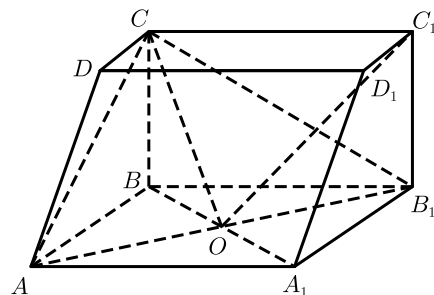
$$= \sin B \cos 2A + \cos B \sin 2A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{13}{14}\right) + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{7} .$$

【标注】 【知识点】SSS类三角形 (利用余弦定理) ; SSA类三角形 (利用正弦定理)

2. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 侧面 ABB_1A_1 是正方形, AB_1 与 A_1B 交于点 O , $AB \perp BC$, $AB \parallel CD$, $AB = 2$, $BC = CD = 1$.



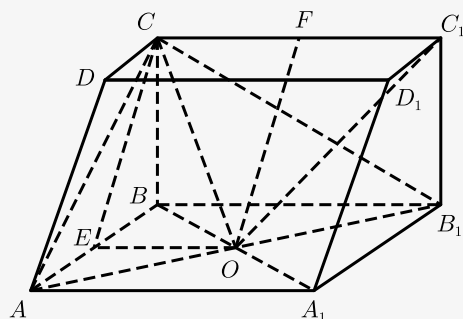
- (1) 求证: $AD \parallel$ 平面 COC_1 .
 (2) 求直线 OC_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值 .
 (3) 若点 P 在线段 A_1D_1 上, 且 $A_1P = \frac{2}{3}A_1D_1$, 求二面角 $C - AB_1 - P$ 的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【解析】 (1) 分别取线段 AB , CC_1 的中点 E , F , 连接 CE , OE , OF .



则 $AE = CD$, $AE \parallel CD$, $OE = \frac{1}{2}AA_1 = CF$,

$OE \parallel AA_1 \parallel CF$,

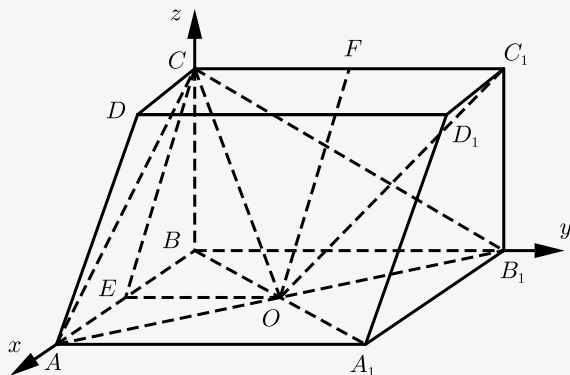
可知四边形 $AECD$ 和四边形 $OECF$ 均为平行四边形,

所以 $AD \parallel CE \parallel OF$.

又 $AD \not\subset$ 平面 COC_1 ,

所以 $AD \parallel \text{平面 } COC_1$.

- (2) 依题意, 以 B 为原点, 分别以 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (如图),



可得 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $B_1(0, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 1)$, $O(1, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{OC_1} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2, 2, 0)$.

设平面 AB_1C 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = -2x_1 + z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} = -2x_1 + 2y_1 = 0 \end{cases},$$

不妨设 $x_1 = 1$,

解得 $y_1 = 1$, $z_1 = 2$,

所以 $\vec{m} = (1, 1, 2)$.

$$\text{于是} \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{OC_1} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{OC_1}}{|\vec{m}| |\overrightarrow{OC_1}|} = \frac{-1 + 1 + 2}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以, 直线 OC_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

- (3) 依题意, $A_1(2, 2, 0)$, $D_1(1, 2, 1)$, 设 $P(x_P, y_P, z_P)$,

$$\overrightarrow{A_1P} = (x_P - 2, y_P - 2, z_P), \quad \overrightarrow{A_1D_1} = (-1, 0, 1),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{A_1P} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A_1D_1},$$

$$\text{得 } x_P - 2 = -\frac{2}{3}, \quad y_P - 2 = 0, \quad z_P = \frac{2}{3},$$

$$\text{从而 } P\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{2}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{2}{3}, 2, \frac{2}{3}\right).$$

设平面 AB_1P 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}x_2 + 2y_2 + \frac{2}{3}z_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = -2x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases},$$

不妨设 $x_2 = 1$, 解得 $y_2 = 1$, $z_2 = -2$,

所以 $\vec{n} = (1, 1, -2)$.

$$\text{因此有 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1+1-4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{3} .$$

$$\text{于是, } \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{3} ,$$

所以, 二面角 $C - AB_1 - P$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(1, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 设经过点 F 的直线 l 不与坐标轴垂直, 直线 l 与椭圆 C 相交于点 A, B , 且线段 AB 的中点为 M , 经过坐标原点 O 作射线 OM 与椭圆 C 交于点 N , 若四边形 $OANB$ 为平行四边形, 求直线 l 的方程 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1) 设右焦点为 $(c, 0)$, 由题意可知:

$$\begin{cases} c = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 由题意, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$, 且 $k \neq 0$.

与椭圆方程联立 $\begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$,

整理得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$.

设 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $M(x_M, y_M)$,

$$\begin{aligned}
&\text{则 } x_A + x_B = \frac{4k^2}{1+2k^2} = 2x_M, \quad x_A x_B = \frac{2k^2 - 2}{1+2k^2}, \\
&\text{因此 } y_M = k(x_M - 1) = k\left(\frac{2k^2}{1+2k^2} - 1\right) = \frac{-k}{1+2k^2}, \\
&\text{即 } M\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2}\right), \\
&\text{于是直线 } OM \text{ 的斜率为 } -\frac{1}{2k}, \text{ 直线 } OM \text{ 的方程为 } y = -\frac{x}{2k}, \\
&\text{与椭圆方程联立 } \begin{cases} y = -\frac{x}{2k} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \\
&\text{整理得 } \left(1 + \frac{1}{2k^2}\right)x^2 = 2, \\
&\text{设 } N(x_N, y_N), \text{ 解得 } x_N^2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \\
&\text{在平行四边形 } OANB \text{ 中, } M \text{ 为 } ON \text{ 中点,} \\
&\text{从而 } 2x_M = x_N, \text{ 即 } 4x_M^2 = x_N^2, \\
&\text{因此 } 4\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}\right)^2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \\
&\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&\text{所以, 直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 中点弦问题

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, $S_2 = 0$, $b_1 - a_1 = 1$, $b_3 + a_2 = 5$,

$$2b_5 = b_4 + 3b_2.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $c_n = \frac{(2n+1)a_n}{T_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

① 当 n 是奇数时, 求 $c_n + c_{n+1}$ 的最大值.

② 求证: $\sum_{i=1}^{2n} c_i < 1$.

【答案】 (1) $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = 2n$.

$$(2) \textcircled{1} \frac{2}{3}.$$

\textcircled{2} 证明见解析.

【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

由 $S_2 = a_1 + a_1q = 0$, 且 $a_1 \neq 0$, 解得 $q = -1$.

$$\text{依题意, 有} \begin{cases} b_1 - a_1 = 1 \\ b_1 + 2d - a_1 = 5 \\ 2(b_1 + 4d) = b_1 + 3d + 3(b_1 + d) \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} d = 2 \\ b_1 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}.$$

故 $a_n = 1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$, $b_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$,

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^{n-1}$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n$.

$$(2) \textcircled{1} \text{ 由(1)可得 } T_n = \frac{(2+2n) \cdot n}{2} = n^2 + n,$$

$$\text{所以 } c_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 是奇数时, } c_n + c_{n+1} &= \frac{2n+1}{n(n+1)} + \frac{-(2n+3)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}, \end{aligned}$$

可知当 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 n 是奇数时, $c_n + c_{n+1}$ 随 n 增大而减小.

所以当 $n = 1$ 时, $c_n + c_{n+1}$ 最大, 其最大值为 $c_1 + c_2 = \frac{2}{3}$.

$$\textcircled{2} \text{ 由}\textcircled{1}\text{知, } c_{2n-1} + c_{2n} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2n} c_i = (c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \cdots + (c_{2n-1} + c_{2n})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } 1 - \frac{1}{2n+1} < 1, \text{ 即 } \sum_{i=1}^{2n} c_i < 1.$$

【标注】【知识点】数列单调性问题; 裂项相消法求和

5. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 直线 l 与 $y = f(x)$ 相切于点 $(e^{\frac{2}{3}}, f(e^{\frac{2}{3}}))$.

\textcircled{1} 求 $f(x)$ 的极值, 并写出直线 l 的方程.

\textcircled{2} 若对任意的 $x \geq e$ 都有 $f(x) \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$, $m > 0$, 求 m 的最大值.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 有且只有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 x_2 > e^2$.

【答案】(1)① $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$ ，没有极大值； $5x - 3y - 3e^{\frac{2}{3}} = 0$ 。

② e 。

(2) 证明见解析。

【解析】(1)①当 $a = 1$ 时， $f(x) = x \ln x$ ， $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ ， $x > 0$ ，
令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{e}$ ，

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$ ，没有极大值，

又因为 $f(e^{\frac{2}{3}}) = e^{\frac{2}{3}} \ln e^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}}$ ， $f'(e^{\frac{2}{3}}) = \ln e^{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ ，

所以，直线 l 的方程为 $y - \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} (x - e^{\frac{2}{3}})$ ，

即 $5x - 3y - 3e^{\frac{2}{3}} = 0$ 。

② 对任意的 $x \geq e$ 都有 $f(x) \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} = e^{\frac{m}{x}} \cdot \ln e^{\frac{m}{x}}$ ，

即 $f(x) \geq f(e^{\frac{m}{x}})$ 恒成立，

由 $m > 0$ ，故 $\frac{m}{x} > 0$ ，

所以 $e^{\frac{m}{x}} > 1$ ，

由①知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增，

因此 $x \geq e^{\frac{m}{x}}$ ，

可得 $\ln x \geq \frac{m}{x}$ ，

即 $x \ln x \geq m$ ，

当 $x \geq e$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $f(e) = e$ ，

所以 m 的最大值为 e 。

(2) 要证明 $x_1 x_2 > e^2$ ，只需证明 $\ln(x_1 x_2) > 2$ 即可，

依题意， x_1 ， x_2 是方程 $ax \ln x + x^2 = 0$ 的两个不等实根，

因为 $x > 0$ ，

所以 $\begin{cases} a \ln x_1 + x_1 = 0 \text{ ①} \\ a \ln x_2 + x_2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，

$$\textcircled{1}、\textcircled{2}\text{相加得：}a(\ln x_1 + \ln x_2) + (x_1 + x_2) = 0,$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2}\text{相减得：}a(\ln x_1 - \ln x_2) + (x_1 - x_2) = 0,$$

$$\text{消去}a, \text{整理得} \frac{\ln(x_1 x_2)}{\ln \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \cdot \ln(x_1 x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \ln \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{\frac{x_1}{x_2} + 1}{\frac{x_1}{x_2} - 1}$$

,

不妨设 $x_1 > x_2$,

$$\text{令} t = \frac{x_1}{x_2},$$

则 $t > 1$,

故只需证明当 $t > 1$ 时, $\ln t \cdot \frac{t+1}{t-1} > 2$,

即证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$,

$$\text{设} h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\text{则} h'(t) = \frac{1}{t} - 2 \frac{t+1 - (t-1)}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

于是 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

从而 $h(t) > h(1) = 0$,

$$\text{因此} \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

所以, $x_1 x_2 > e^2$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；双变量问题

九、2021河西一模

十、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 设全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = (\quad)$.
- A. $\{-1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 3\}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$,
 $\therefore \complement_U A = \{-1, 3\}$,

$$\therefore (\complement_U A) \cup B = \{0, 1, 2, 3\}.$$

故选A.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x > \frac{1}{2}$ ” 是 “ $2x^2 + x - 1 > 0$ ” 的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $2x^2 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -1,$

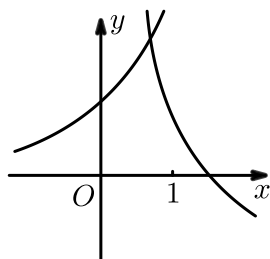
$\therefore$ “ $x > \frac{1}{2}$ ” 是 “ $2x^2 + x - 1 > 0$ ” 的充分不必要条件.

故选A.

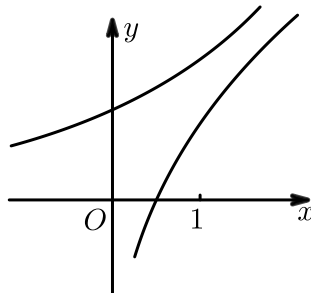
【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ().

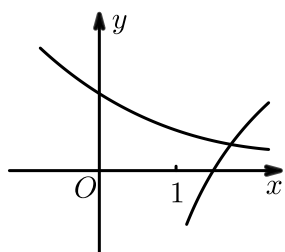
A.



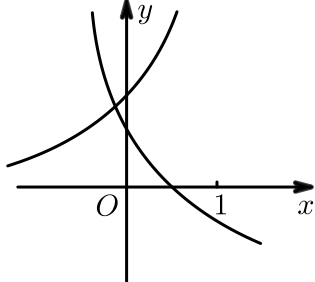
B.



C.



D.



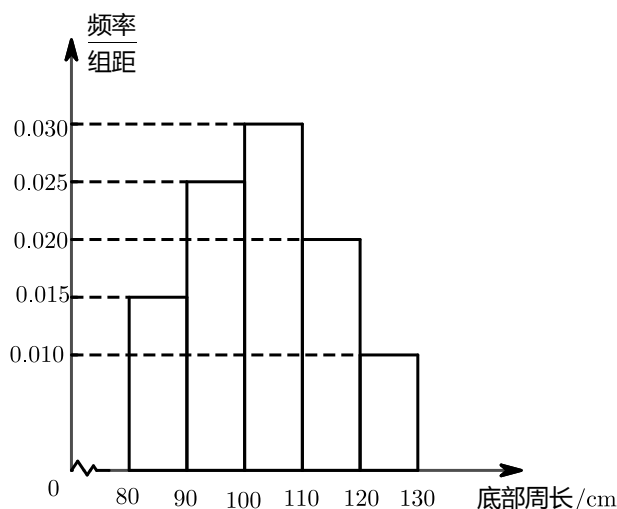
【答案】 D

【解析】 本题主要考查指数函数与对数函数的图象和性质及函数图象的识辨, 通过识辨函数图象建立数与形的联系, 考查图形描述、分析数学问题的素养.

对于函数 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ，当 $y = 0$ 时，有 $x + \frac{1}{2} = 1$ ，得 $x = \frac{1}{2}$ ，即 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 的图象恒过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，排除选项 A、C；函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 与 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 在各自定义域上单调性相反，排除选项 B，故选 D。

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

4. 为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中 60 株树木的底部周长（单位：cm），所得数据均在区间 $[80, 130]$ 上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的 60 株树木中，底部周长小于 100cm 的株数为（ ）。



- A. 15 B. 24 C. 6 D. 30

【答案】 B

【解析】 由频率分布直方图知：底部周长小于 100cm 的频率为 $(0.015 + 0.025) \times 10 = 0.4$ ，
 $\therefore$ 底部周长小于 100cm 的频数为 $60 \times 0.4 = 24$ 。
 故选 B。

【标注】 【知识点】 频数与频率

5. 将长、宽分别为 4 和 3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，得到四面体 $A - BCD$ ，则四面体 $A - BCD$ 的外接球的表面积为（ ）。
- A. 25π B. 50π C. 5π D. 10π

【答案】 A

【解析】 由题意可知，直角三角形斜边的中线是斜边的一半，

所以长宽分别为4和3的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起二面角, 得到四面体 $A - BCD$,
 则四面体 $A - BCD$ 的外接球的球心 O 为 AC 中点,
 半径 $r = \frac{5}{2}$,

所求四面体 $A - BCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\pi$.

故选A.

【标注】 【知识点】空间几何体的表面积

6. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则().

- A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}})$ B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}})$
 C. $f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$ D. $f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,

$$\therefore f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) = f(\log_3 4),$$

$$\because \log_3 4 > \log_3 3 = 1, 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < 2^0 = 1,$$

$$\therefore 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < \log_3 4,$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right),$$

故选: C.

【标注】 【知识点】指对幂比较大小

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

【答案】 A

【解析】 由题意得 $\frac{b}{a} = 2$ 且 $c = 5$. 故由 $c^2 = a^2 + b^2$, 得 $25 = a^2 + 4a^2$, 则 $a^2 = 5$, $b^2 = 20$,
 从而双曲线方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

【标注】 【知识点】已知双曲线的渐近线求其他参数

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 将该函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到的图象对应的函数为奇函数, 则 $f(x)$ 的图象①关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, ②关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, ③在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递增. 其中所有正确结论的序号是 ().
- A. ② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ,

$$\therefore \pi = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 可得 $\sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$, 函数为奇函数,

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi,$$

$$\text{可得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

考查①下对,

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{可得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

考查②对,

$$x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}], 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ 此时函数单调递增,}$$

考查③对,

故选: C.

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误; 已知正弦型函数性质求解析式

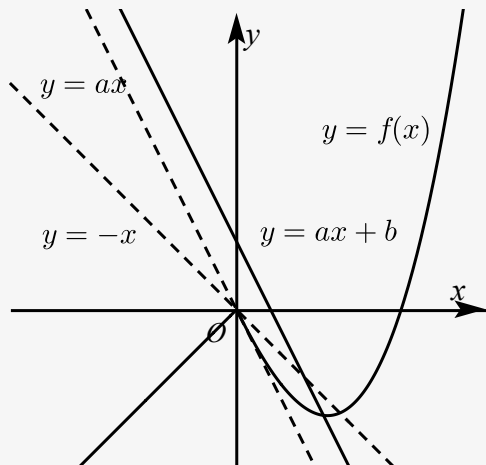
9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则 ().
- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

【答案】C

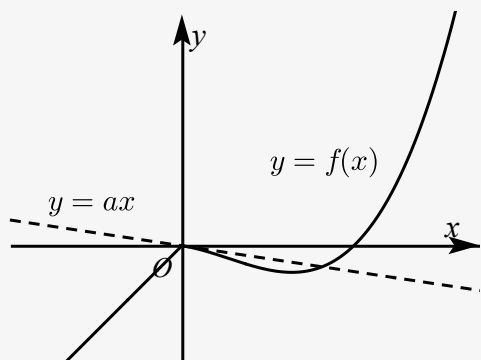
【解析】方法一：原题可转化为 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 有三个交点.

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-a)(x-1)$, 且 $f(0) = 0, f'(0) = a$, 则

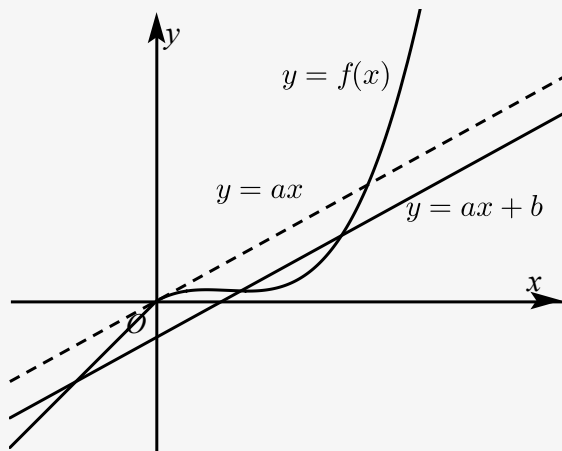
(1) 当 $a \leq -1$ 时, 如图 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 不可能有三个交点(实际上有一个), 排除A, B.



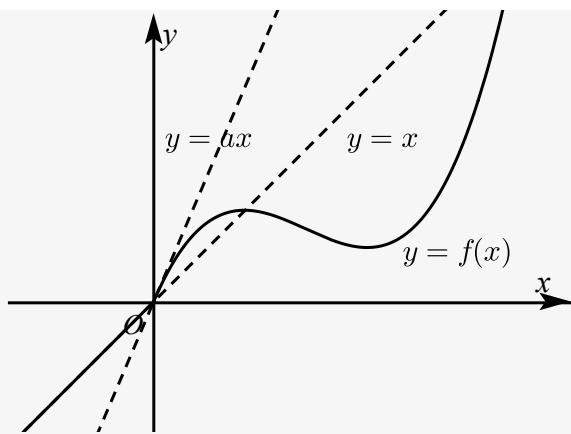
(2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax$ 的图象如下图所示. 欲使两个函数有三个交点, 则必有 $b < 0$.



(3) 当 $0 \leq a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示. 欲使两个函数有三个交点, 则必有 $b < 0$.



(4) 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示. 不可能有三个交点(实际上有一个), 排除D.



综上所述，则 $-1 < a < 1$ ， $b < 0$ 。

方法二：记 $g(x) = f(x) - ax - b$ ，

当 $x < 0$ 时， $g(x) = (1-a)x - b$ ，最多有1个零点。

当 $x \geq 0$ 时， $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$ ，

$g'(x) = x^2 - (a+1)x = x[x - (a+1)]$ ，

若 $a \leq -1$ ，则 $a+1 \leq 0$ ，即 $-a-1 \geq 0$ ，

$\therefore g'(x) \geq 0$ ，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上最多有1个零点，

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有2个零点，不合题意，

故 $a > -1$ ，

当 $x \in [0, a+1)$ 时， $g'(x) \leq 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递减，

当 $x \in (a+1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递增，

故 $g(x)$ 有3个零点的条件为
$$\begin{cases} \frac{b}{1-a} < 0 \\ a > -1 \\ g(0) \geq 0 \\ g(a+1) < 0 \end{cases},$$

所以
$$\begin{cases} b < 0 \\ -1 < a < 1 \\ b > -\frac{1}{6}(a+1)^3 \end{cases}, \text{ 对照选项.}$$

故选C。

【标注】 【知识点】 求参数范围（含参二次型导函数）

十一、填空题

（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{11-7i}{1-2i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5+3i$

【解析】 $\frac{11-7i}{1-2i} = \frac{(11-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{25+15i}{1+4} = 5+3i$.

【标注】 【知识点】复数的乘法和除法

2. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

【答案】 70

【解析】 $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式的第 $r+1$ 项是 $T_{r+1} = C_8^r \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{8-r} \left(-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^r = C_8^r (-1)^r x^{8-\frac{3}{2}r} y^{\frac{3}{2}r-4}$, 当 $r=4$ 时是含有 x^2y^2 的项, 其系数是 $C_8^4 (-1)^4 = 70$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

3. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2, -1)$, 则圆 C 的标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x^2 + (y+2)^2 = 5$

【解析】 $\because$ 由圆心与切点的连线与切线垂直, 故斜率乘积为 -1 ,

$$\therefore \frac{m+1}{2} \times 2 = -1,$$

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{圆心}(0, -2), \text{则 } r = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{圆的标准方程为 } x^2 + (y+2)^2 = 5.$$

【标注】 【知识点】已知直线和圆的位置关系求圆的方程

4. 将一颗骰子先后抛掷2次, 观察向上的点数, 两数中至少有一个奇数的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 以第一次向上的点数为横坐标 x , 第二次向上的点数为纵坐标 y 的点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 内部的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{4}; \frac{2}{9}$

【解析】设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$ ，共36个基本事件。

记“两数中至少有一个为奇数”为事件 B ，则事件 B 与“两数均为偶数”为对立事件，而事件“两数均为偶数”含有9个基本事件，

$$\text{所以 } P(B) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}.$$

答：两数中至少有一个为奇数的概率为 $\frac{3}{4}$ 。

设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$ ，共36个基本事件。

基本事件总数为36，点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部记为事件 C ，则 C 包含8个事件，分别为 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ ，

$$\text{所以 } P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

答：点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部的概率为 $\frac{2}{9}$ 。

【标注】【知识点】对立事件的概率和为1；古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

5. 已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $2x + 8y - xy = 0$ ，则 $x + y$ 的最小值为_____。

【答案】18

【解析】已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $2x + 8y - xy = 0$ 。 $2x + 8y = xy$ 即： $\frac{2}{y} + \frac{8}{x} = 1$ 。利用基本不等式：

$$\text{则 } x + y = (x + y) \left(\frac{2}{y} + \frac{8}{x} \right) = \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} + 10 \geq 8 + 10 = 18, \text{ 当且仅当 } x = 2y \text{ 时成立。}$$

则 $x + y$ 的最小值为18。

故答案为18。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；倒数和形式

6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2， $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E, F 分别在边 BC, CD 上 $BC = 3BE$ ， $CD = \lambda DF$ ，若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$ ，则 λ 的值为_____；若 G 为线段 DC 上的动点，则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的最大值为_____。

【答案】2； $\frac{8}{3}$

【解析】由题 $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{DF}$ ，

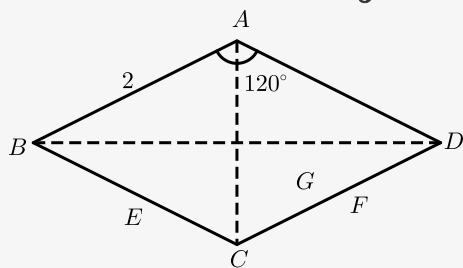
$$\begin{aligned}\vec{AE} \cdot \vec{AF} &= (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DF}) = \left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}\right) \cdot \left(\vec{AD} + \frac{1}{\lambda}\vec{DC}\right) \\ &= \left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}\right) \cdot \left(\vec{AD} + \frac{1}{\lambda}\vec{AB}\right) = \frac{1}{\lambda}(\vec{AB})^2 + \frac{1}{3}(\vec{AD})^2 + \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right)\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{4}{\lambda} + \frac{4}{3} + \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \cdot (-2) = \frac{10}{3\lambda} - \frac{2}{3} = 1\end{aligned}$$

, 解得: $\lambda = 2$.

设 $\vec{DG} = t\vec{DC}$, $t \in [0, 1]$,

$$\vec{AG} \cdot \vec{AE} = (\vec{AD} + \vec{DG}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BE}) = (\vec{AD} + t\vec{DC}) \cdot \left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}\right) = (\vec{AD} + t\vec{AB}) \cdot \left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}\right) = t\vec{AB}^2 + \frac{1}{3}\vec{AD}^2 + \left(1 + \frac{t}{3}\right)\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{10t-2}{3}$$

$$\therefore t = 1 \text{ 时, } \vec{AG} \cdot \vec{AE}_{\max} = \frac{8}{3}.$$



【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题

十二、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a > b$, $a = 5$, $c = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$.
 - (1) 求 b .
 - (2) 求 $\sin A$ 的值.
 - (3) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $b = \sqrt{13}$.

$$(2) \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$(3) \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a > b$,

$$\text{故由} \sin B = \frac{3}{5}, \text{可得} \cos B = \frac{4}{5},$$

由已知及余弦定理,

$$\text{有} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 13,$$

$$\text{所以} b = \sqrt{13}.$$

$$(2) \text{由正弦定理} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\text{得} \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$(3) \text{由} \sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{且} a < c,$$

$$\text{得} \cos A = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

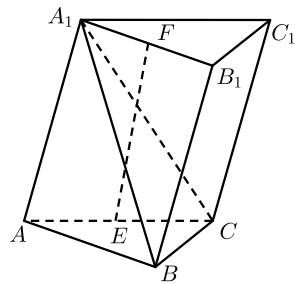
$$\text{所以} \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13},$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = -\frac{5}{13},$$

$$\text{故} \sin \left(2A - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

【标注】【知识点】SAS类三角形(利用余弦定理); SSA类三角形(利用正弦定理); 二倍角的正弦; 二倍角的余弦

2. 如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $A_1A = A_1C = AC$, E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点.



- (1) 证明: $EF \perp BC$.
- (2) 求直线 EF 与 A_1BC 平面所成角的余弦值.
- (3) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\frac{3}{5}$.

(3) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】(1) $\because A_1A = A_1C$, E 是 AC 中点,

$\therefore$ 等腰 $\triangle A_1AC$ 中 $A_1E \perp AC$,

又平面 $A_1AC_1C \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1AC_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$, $A_1E \subset$ 平面 A_1AC_1C ,

$\therefore A_1E \perp$ 平面 ABC , $A_1E \perp BC$,

由于三棱柱中 $A_1B_1 \parallel AB$, $\angle ABC = 90^\circ$,

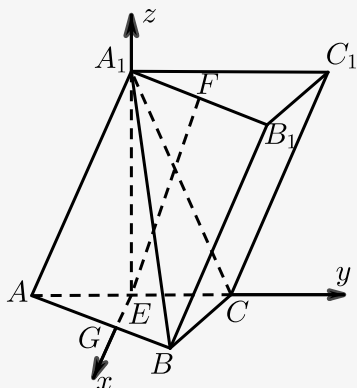
$\therefore AB \perp BC$, $A_1B_1 \perp BC$,

$\because A_1B_1 \cap A_1E = A_1$,

$\therefore BC \perp$ 平面 A_1B_1E , 由于 F 在 A_1B_1 上,

$\therefore EF \subset$ 平面 A_1B_1E , $EF \perp BC$.

(2) 作 $EG \perp AC$ 交 AB 于点 G , 建立如图所示空间直角坐标系,



设 $EG = 1$, 则 $AE = \sqrt{3}$, $AG = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$,

$BC = \sqrt{3}$, $AB = 3$, $A_1E = 3$,

则 $A_1(0, 0, 3)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,

$\overrightarrow{CA_1} = (0, -\sqrt{3}, 3)$, $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,

设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases},$$

令 $x_1 = 1$, 则平面 A_1BC 的法向量可取 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1)$,

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1F} = \overrightarrow{EA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3}, 3\right)$,

$$\text{所以} \cos \left(\overrightarrow{EF}, \vec{n} \right) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{4}{5} = \sin \theta,$$

$$\text{则} \cos \theta = \frac{3}{5},$$

所以直线 EF 和平面 A_1BC 所成的角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.

$$(3) A(0, -\sqrt{3}, 0), A_1(0, 0, 3), C(0, \sqrt{3}, 0), B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{AA_1} = (0, \sqrt{3}, 3), \overrightarrow{A_1C} = (0, \sqrt{3}, -3),$$

设平面 AA_1C 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \sqrt{3}y + 3z = 0 \\ \sqrt{3}y - 3z = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1,$$

则平面 AA_1C 的法向量可取 $\vec{m} = (1, 0, 0)$,

$$|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

设二面角 $A - A_1C - B$ 为 α ,

$$\text{则} \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $A - A_1C - B$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【标注】 【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 = 1, b_1 = 2, b_2 = 2a_2, b_3 = 3a_3 - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = \frac{2^{a_n}}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = n, b_n = 2^n$.

(2) $1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

【解析】 (1) $\because \{a_n\}$ 等差, $\{b_n\}$ 等比,

∴ 设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 公比为 q ,

则有 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

从而 $b_2 = 2a_2 \Leftrightarrow b_1q = 2(a_1 + d)$,

$$2q = 2(1+d) \text{ ①},$$

$$b_3 = 3a_3 - 1 \Leftrightarrow b_1q^2 = 3(a_1 + 2d) - 1,$$

$$2q^2 = 3(1+2d) - 1 \text{ ②},$$

$$\text{由①②可解得: } \begin{cases} d=0 \\ q=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d=1 \\ q=2 \end{cases},$$

∴ $\{b_n\}$ 递增,

$$\therefore d=1, q=2,$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = n,$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^n.$$

$$(2) c_n = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n \\ &= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \\ &= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 等比数列求通项问题；等差数列求通项问题；裂项相消法求和

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且满足离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$, 过原点 O 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设点 $A(2, 1)$, 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $4\sqrt{2}$.

【解析】(1) 由题意可知 $c = 2\sqrt{3}$, 根据 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $a = 4$, 故 $b = 2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx (k \neq 0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } x_1 = \frac{4}{\sqrt{1+4k^2}}, x_2 = -\frac{4}{\sqrt{1+4k^2}}, |MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}},$$

点 A 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$S_{\triangle AMN}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}} \times \frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$= \frac{4|2k-1|}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$= 4\sqrt{1 - \frac{4k}{1+4k^2}},$$

当 $k > 0$ 时, $S_{\triangle AMN} < 4$;

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时, } S_{\triangle AMN} = 4\sqrt{1 + \frac{4}{\frac{1}{-k} + (-4k)}} \leq 4\sqrt{1 + \frac{4}{2\sqrt{\frac{1}{-k}} \cdot (-4k)}} = 4\sqrt{2},$$

当且仅当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $S_{\triangle AMN}$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 最值问题; 面积问题

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2a \ln x$ (其中 a 是实数).

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设 $g(x) = \ln x - bx - cx^2$, 若函数 $f(x)$ 的两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点, 且 $y = (x_1 - x_2)g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的范围是 $\left[\ln 2 - \frac{2}{3}, +\infty\right)$ 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $y = -x + 1$.

(2) 单调递增区间为 $(a - \sqrt{a^2 - 1}, a + \sqrt{a^2 - 1})$.

(3) $\left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, +\infty \right)$.

【解析】(1) 由 $a = \frac{1}{2}$ 得: $f(x) = \frac{1}{x} - x + \ln x$,

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x},$$

所以 $f'(1) = -1$, 又 $f(1) = 0$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.

(2) 因为 $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2a \ln x$,

所以 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2a}{x} = -\frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2},$$

若 $a \leq 1$, 则 $f'(x) \leq 0$, 当且仅当 $a = 1, x = 1$ 时, $f'(x) = 0$,

若 $a > 1$, $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}$,

$x_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$, 当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间;

$a > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为

$(0, a - \sqrt{a^2 - 1}), (a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$;

单调递增区间为 $(a - \sqrt{a^2 - 1}, a + \sqrt{a^2 - 1})$.

(3) 由 (2) 知, 若 $f(x)$ 有两个极值点,

则 $a > 1$, 且 $x_1 + x_2 = 2a, x_1 x_2 = 1$.

所以 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

$$g(x) = \ln x - bx - cx^2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} - b - 2cx,$$

$$g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2}{x_1 + x_2} - b - c(x_1 + x_2),$$

由 $g(x_1) = g(x_2) = 0$ 得,

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = b(x_1 - x_2) + c(x_1^2 - x_2^2).$$

$$\begin{aligned} y &= (x_1 - x_2)g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \\ &= \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - b(x_1 - x_2) - c(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - \ln \frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{2\left(\frac{x_2}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} - \ln \frac{x_1}{x_2}, \\
&\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1), \\
&h(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t, h'(t) = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0, \\
&\text{所以 } h(t) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减.} \\
&\text{由 } y = (x_1 - x_2)g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ 的范围是 } \left[\ln 2 - \frac{2}{3}, +\infty\right), \\
&\text{得 } t \text{ 的取值范围 } \left(0, \frac{1}{2}\right]. \\
&\text{又 } x_1 + x_2 = 2a, x_1 x_2 = 1, \\
&\therefore (2a)^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2, \\
&\therefore 4a^2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = t + \frac{1}{t} + 2 \in \left[\frac{9}{2}, +\infty\right), \text{ 又 } a > 1, \\
&\text{故实数 } a \text{ 的取值范围 } \left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】求在某点处的切线方程；双变量问题；求函数单调区间（含参指对型导函数）

十三、2021南开一模

十四、选择题

（本大题共9小题，每小题5分，共45分）

1. 设全集为 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $S = \{-3, 0, 1\}$ ， $T = \{-1, 2\}$ ，则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于（ ）.
- A. $\emptyset$ B. $\{-2, 3\}$ C. $\{-2, -1, 2, 3\}$ D. $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】 B

【解析】 $S \cup T = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$ ，

$\complement_U(S \cup T) = \{-2, 3\}$.

故选B.

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1, y > 1$ ”是“ $xy > 1$ ”的() .

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

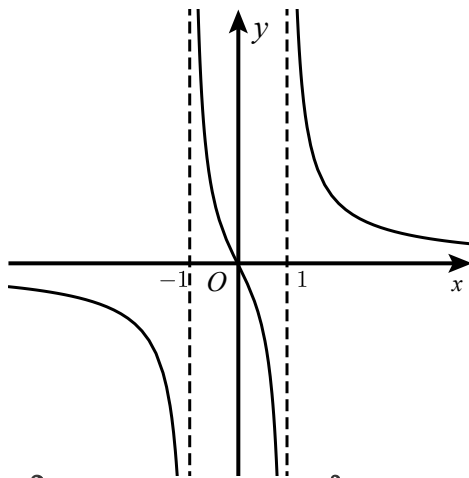
【答案】 A

【解析】 “ $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1$ ” .

故选A .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是() .



A. $f(x) = \frac{2x}{1-|x|}$

B. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

C. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

D. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

【答案】 C

【解析】 由图可知, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 排除A ;

$f(x)$ 为奇函数, 排除D ,

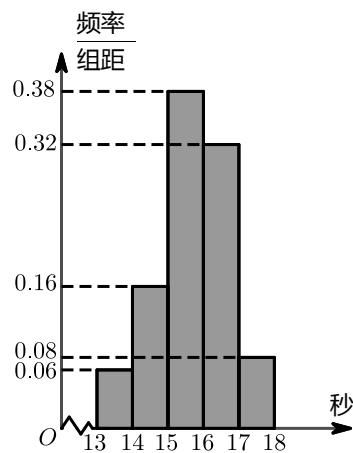
当 $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$, 排除B .

故选C .

【标注】 【知识点】 利用函数性质法求解析式

4.

某校抽取100名学生做体能测试，其中百米测试中，成绩全部介于13秒与18秒之间，将测试结果分成五组：第一组[13, 14)，第二组[14, 15)，…，第五组[17, 18]．如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图，若成绩低于 a 即为优秀，如果优秀的人数为14人，则 a 的估计值是（ ）．



- A. 14 B. 14.5 C. 15 D. 15.5

【答案】 B

【解析】 第一组[13, 14)有 $0.06 \times 100 = 6$ 人，
则第二组[14, 15)有 $14 - 6 = 8$ 人优秀，
则 a 的估计值为 $14 + \frac{8}{100 \times 0.16} = 14.5$ ．
故选B．

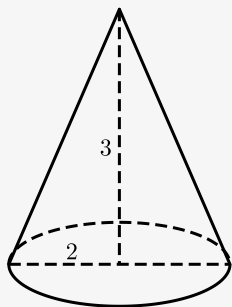
【标注】 【知识点】 频率分布直方图

5. 已知一个圆锥的底面半径为2，高为3，其体积大小等于某球的表面积大小，则此球的体积是（ ）．

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ C. 4π D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】



$$\therefore V_{\text{圆}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi R^2,$$

$$\therefore R = 1 ,$$

$$\therefore V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi .$$

故选D .

【标注】 【知识点】空间几何体的体积

6. 已知 $a = 4^{0.3}$, $b = 0.3^4$, $c = \log_3 10$, 则 () .

A. $b > c > a$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $a = 4^{0.3} \in (1, 2)$,

$$b = 0.3^4 < 1 ,$$

$$c = \log_3 10 > 2 .$$

$$\therefore c > a > b .$$

故选C .

【标注】 【知识点】指对幂比较大小

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x$ ($\omega > 0$) 满足 $f(x_1) - f(x_2) = 4$, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

, 则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值为 () .

A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 A

【解析】 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = 4 , |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore T = \pi , \omega = 2 ,$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} .$$

故选A .

【标注】 【知识点】已知正弦型函数性质求解析式；辅助角公式

8. 设直线 $x - \sqrt{3}y + m = 0$ ($m \neq 0$) 与 x 轴交于点 C , 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A, B . 若 A 为 BC 中点, 则该双曲线的离心率是 ().
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】 D

【解析】 设双曲线的渐近线为 $y = \pm kx$,

$$\begin{cases} y = kx \\ x - \sqrt{3}y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{-m}{1 - \sqrt{3}k},$$

$$\begin{cases} y = -kx \\ x + \sqrt{3}y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{-m}{1 + \sqrt{3}k},$$

$$C(-m, 0),$$

$$\therefore x_B + x_C = 2x_A,$$

$$\text{解得 } k = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2.$$

故选 D.

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率; 双曲线的标准方程; 直线和双曲线的位置关系

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根, 则实数 a 的取值

范围是 ().

A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

【答案】 D

【解析】 由题意 $f(0) = 0$,

$\therefore 0$ 是 $f(x) - ax^2 = 0$ 的一个根,

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) - ax^2 = 0$ 即 $a = \frac{f(x)}{x^2}$,

$\therefore a = \frac{f(x)}{x^2}$ 有 4 个实根,

即 $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象有4个不同的交点, ($x \neq 0$),

$$\frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x(x+4)}, & -4 < x < 0 \\ \frac{1}{x(x+4)}, & 0 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad (x \neq 0),$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{1}{x(x+4)} \quad (-4 < x < 0),$$

$$g'(x) = \frac{2x+4}{(x^2+4x)^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, x = -2,$$

$\therefore$ 在 $(-4, -2)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减,

在 $(-2, 0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增,

当 $x = -2$ 时, $g(x)$ 有极小值 $g(-2) = \frac{1}{4}$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{x(x+4)} \quad (0 < x < 2),$$

$$h'(x) = -\frac{2x+4}{(x^2+4x)^2} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减,

$$\text{令 } \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}} \quad (2 \leq x \leq 6),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{6-2x}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-3}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

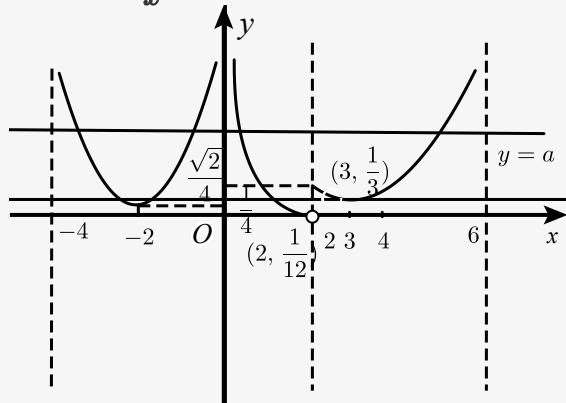
$$\text{令 } \varphi'(x) = 0, \text{ 则 } x = 3,$$

当 $2 \leq x < 3$ 时 $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 递减,

当 $x > 3$ 时 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 递增,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时 $\varphi(x)$ 有极小值 $\varphi(3) = \frac{1}{3}$,

作出 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象,



如图所示,

当 $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 有4个交点,

当 $\frac{1}{3} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时有5个交点，

当 $a = \frac{1}{3}$ 时有4个交点，

当 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$ 时有3个交点，

当 $a = \frac{1}{4}$ 时有2个交点，

当 $\frac{1}{12} < a < \frac{1}{4}$ 时有1个交点，

当 $a \leq \frac{1}{12}$ 时没有交点，

综上，当 a 取 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$ 时 $f(x) - ax^2 = 0$ 有5个不等实根。

故选D。

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围

十五、 填空题

（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

1. i 是虚数单位，复数 $\frac{2-i}{1+2i}$ 的共轭复数为 _____。

【答案】 i

【解析】 $\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$
 $= \frac{-5i}{5}$
 $= -i,$

$\therefore$ 共轭复数为 i 。

【标注】【知识点】复数的四则运算综合

2. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为 _____。

【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{-r}$

$$= C_6^r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{3-\frac{3r}{2}},$$

$$\text{令 } 3 - \frac{3r}{2} = 0, r = 2,$$

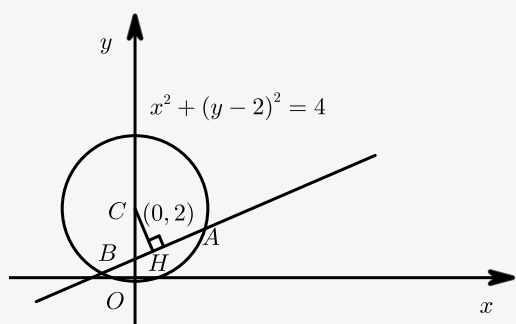
$$C_6^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

3. 已知过点 $(1, 1)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 由图知, 过圆心 C , 作 $CH \perp AB$, 交 AB 于点 H ,



$$\therefore AB = 2AH = 2\sqrt{CA^2 - CH^2} = 2\sqrt{4 - CH^2},$$

当 $CH \perp AB$ 时, CH 取最小值时, H 坐标为 $(1, 1)$,

$$\therefore CH_{\min} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

4. 对某种型号的仪器进行质量检测, 每台仪器最多可检测3次, 一旦发现问题, 则停止检测, 否则一直检测到3次为止. 设该仪器一次检测出现问题的概率为0.2, 则检测2次停止的概率为 _____; 设检测次数为 X , 则 X 的数学期望为 _____.

【答案】 $\frac{4}{25}; \frac{61}{25}$

【解析】 $P = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25},$

X 的可能取值为1、2、3,

$$P(X=1) = \frac{1}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{25},$$

$$P(X=3) = \frac{16}{25},$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} + 3 \times \frac{16}{25} = \frac{61}{25}.$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望

5. 已知 $a > 0, b > 0, a + b + c = 1$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1}$ 的最大值是 _____.

【答案】 -2

【解析】 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1} = \frac{a^2 + b^2 + 2}{-a - b}$

$$= -\frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b} \leq -\frac{\frac{(a+b)^2}{2} + 2}{a + b}$$

$$= -\left(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b}\right) \leq -2.$$

当且仅当 “ $a = b$ ” 时且 “ $a + b = 2$ ” 时 “=” 成立.

【标注】 【知识点】 基本不等式成立的条件；已知等式关系求最值

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, AC = 2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{3} |\overrightarrow{BA}|$, 则 $AB =$ _____; 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{FB}, \lambda > 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $1 + \sqrt{3}; \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

【解析】 $\because \angle A = 60^\circ, AC = 2,$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \text{ 在 } \overrightarrow{AB} \text{ 上投影为 } 1,$$

$$\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{3} |\overrightarrow{BA}|,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \text{ 在 } \overrightarrow{AB} \text{ 上投影为 } -\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 1 + \sqrt{3},$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{1 + \lambda} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} (3-\sqrt{3}) \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda+1} (3-\sqrt{3}) \\
 &= \frac{1}{\lambda+2+\frac{1}{\lambda}} (3-\sqrt{3}) \\
 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】线性运算和数量积综合问题；数量积的最值问题

十六、解答题

(本大题共5小题，共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 对边的边长分别是 a 、 b 、 c 。已知

$$(2\sin A - \sqrt{3}\sin B)^2 = 4\sin^2 C - \sin^2 B.$$

(1) 求角 C 的大小。

(2) 若 $b=1$ ， $c=\sqrt{7}$ ，求 $\cos 2(B-C)$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{\pi}{6}$.
(2) $\frac{13}{14}$.

【解析】 (1) 由 $(2\sin A - \sqrt{3}\sin B)^2 = 4\sin^2 C - \sin^2 B$ 化简，

$$\text{得 } \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sqrt{3}\sin A \sin B,$$

$$\text{由正弦定理，得 } a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab,$$

$$\text{所以由余弦定理，得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 因为 $b=1$ ， $c=\sqrt{7}$ ，

所以由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{14}$,

因为 $b < c$,

所以 $B < C$,

所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

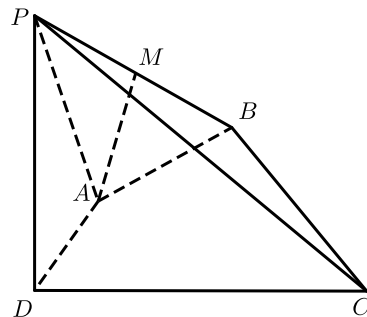
所以 $\cos(B - C) = \cos B \cos \frac{\pi}{6} + \sin B \sin \frac{\pi}{6}$

$= \frac{3\sqrt{21}}{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

所以 $\cos 2(B - C) = 2\cos^2(B - C) - 1 = \frac{13}{14}$.

【标注】 【知识点】 边角互化（利用正弦定理）；SSS类三角形（利用余弦定理）

2. 如图所示，四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = DC = 2AD = 2$ ， $AD \perp DC$ ， $\angle BCD = 45^\circ$.



- (1) 求 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值 .
- (2) 求二面角 $B - PC - D$ 的正弦值 .
- (3) 设 M 为 PB 上一点，且 $PM = 2MB$ ，若 $AM \parallel$ 平面 PCD ，求 BC 的长 .

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{210}}{15}$.

(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1)

$$\begin{aligned}\therefore (x_2, y_2, z_2 - 2) &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a, -2 \right), \\ \text{得 } x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3}a, y_2 = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}a, z_2 = \frac{2}{3}, M \left(\frac{\sqrt{2}a}{3}, \frac{4 - \sqrt{2}a}{3}, \frac{2}{3} \right), \\ \text{若 } AM // \text{平面 } PCD, &\text{ 则 } AM \perp DA, \text{ 即 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ \therefore \left(\frac{\sqrt{2}a - 3}{3}, \frac{4 - \sqrt{2}a}{3}, \frac{2}{3} \right) \cdot (1, 0, 0) &= \frac{\sqrt{2}a - 3}{3} = 0, \text{ 得 } a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \text{即 } BC \text{ 长为 } &\frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法求空间距离；向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，右顶点为点 A ，点 E 的坐标为 $\left(0, \frac{b}{4}\right)$ ，延长线段 F_1E 交椭圆于点 M ， $MF_2 \perp x$ 轴。
- (1) 求椭圆的离心率。
- (2) 设抛物线 $y^2 = \frac{24}{5}bx$ 的焦点为 F ， B 为抛物线上一点， $|BF| = \frac{36}{5}b$ ，直线 BF 交椭圆于 P, Q 两点，若 $|AP|^2 + |AQ|^2 = \frac{42}{5}$ ，求椭圆的标准方程。

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

【解析】 (1) 由题设可知点 M 的坐标为 $\left(c, \frac{b}{2}\right)$ ，其中 $c^2 = a^2 - b^2$ ，

将点 M 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{b^2} = 1$ ，

解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(2) 抛物线 $y^2 = \frac{24}{5}bx$ 的焦点为 $F\left(\frac{6}{5}b, 0\right)$ ，

由对称性不妨设点 B 在第一象限，

因为 $|BF| = \frac{36}{5}b$,

所以由抛物线定义, 可得 $B\left(6b, \frac{12\sqrt{5}}{5}b\right)$,

所以直线 BF 的方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{6}{5}b\right)$,

由 (1) 可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 点 A 的坐标为 $(2b, 0)$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{6}{5}b\right) \\ x^2 + 4y^2 = 4b^2 \end{cases}$, 消去 y 整理, 得 $3x^2 - 6bx + \frac{8}{5}b^2 = 0$,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = 2b$, $x_1x_2 = \frac{8}{15}b^2$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AP|^2 + |AQ|^2 &= (x_1 - 2b)^2 + y_1^2 + (x_2 - 2b)^2 + y_2^2, \\ &= (x_1 - 2b)^2 + \frac{5}{4}\left(x_1 - \frac{6}{5}b\right)^2 + (x_2 - 2b)^2 + \frac{5}{4}\left(x_2 - \frac{6}{5}b\right)^2, \\ &= \frac{9}{4}(x_1 + x_2)^2 - 7b(x_1 + x_2) - \frac{9}{2}x_1x_2 + \frac{58}{5}b^2, \\ &= 9b^2 - 14b^2 - \frac{12}{5}b^2 + \frac{58}{5}b^2 = \frac{21}{5}b^2 = \frac{42}{5}, \end{aligned}$$

解得 $b^2 = 2$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

【标注】 【知识点】 设点与韦达综合问题; 求椭圆的离心率

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_2^2 = a_3 + a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = a_1$,

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求证: 数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最大值.

(3) 求 $\sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}}$.

【答案】 (1) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

(2) 证明见解析, 10.

$$(3) 2 + \frac{n^2 - 2}{2^n}.$$

【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } a_1 = 3, a_2^2 = a_3 + a_4, \text{ 可得 } 9q^2 = 3q^2 + 3q^3,$$

$$\text{解得 } q = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 } nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1), \text{ 得 } \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = -1,$$

$$\text{又 } \frac{b_1}{1} = 3,$$

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为3, 公差为-1的等差数列.

$$\text{所以 } \frac{b_n}{n} = 3 - (n-1) = 4 - n,$$

$$\text{所以 } b_n = 4n - n^2,$$

$$\text{依题意有 } \begin{cases} b_n = 4n - n^2 \geq 0 \\ b_{n+1} = 4(n+1) - (n+1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

解得 $3 \leq n \leq 4$, 所以当 $n = 3$ 或 4 时, $\{b_n\}$ 前 n 项和取最大值, 最大值为10.

$$(3) \text{ 因为 } \frac{3b_k}{a_{k+1}} = \frac{3(4k - k^2)}{3 \cdot 2^k} = \frac{4k - k^2}{2^k} = \frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} \right] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= \frac{n^2}{2^n} + 2 - \frac{2}{2^n} = 2 + \frac{n^2 - 2}{2^n}.$$

【标注】 【知识点】裂项相消法求和; 分组法求和; 数列中最大项与最小项的求解问题; 等差数列的判定 (涉及新数列构造); 等比数列求通项问题

5. 已知曲线 $y = \ln(x + m)$ 与 x 轴交于点 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = f(x)$, 且 $f(1) = 2$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 的极值.

(3) 设 $h(x) = \frac{\ln^2 x + (1-a)\ln x + 1}{x}$, 若存在实数 $x_1 \in [1, e]$, $x_2 \in [e^{-1}, 1]$, 使

$$2h(x_1) < x_2 \ln^2 x_2 + (a-1)x_2 \ln x_2 + x_2 \text{ 成立, 求实数 } a \text{ 的取值范围.}$$

【答案】(1) $f(x) = x + 1$.

(2) $g(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值 1, 无极小值.

(3) $a \in (-\infty, 3 - 2e) \cup \left(3 - \frac{e}{2}, +\infty\right)$.

【解析】(1) 依题意, 点 P 的坐标为 $(1 - m, 0)$,

因为 $y' = \frac{1}{x + m}$,

所以曲线在点 P 的切线斜率为 1,

所以切线方程为 $y = x + m - 1$,

因为 $f(1) = 2$,

所以 $m = 2$,

所以 $f(x) = x + 1$.

(2) 由 (1) 知 $g(x) = \frac{x + 1}{e^x}$, 则 $g'(x) = -\frac{x}{e^x}$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值 1, 无极小值.

(3) 令 $m = \frac{1}{x_2}$, 则 $m \in [1, e]$.

$x_2 \ln^2 x_2 + (a - 1)x_2 \ln x_2 + x_2$ 化为: $h(m) = \frac{\ln^2 m + (1 - a) \ln m + 1}{m}$,

问题转化为:

存在实数 x_1 , $m \in [1, e]$, 使 $2h(x_1) < h(m)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

$h'(x) = -\frac{\ln^2 x - (1 + a) \ln x + a}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)(\ln x - a)}{x^2}$.

① 当 $a \geq 1$ 时, $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

所以 $2h(e) < h(1)$, 即 $\frac{2(3 - a)}{e} < 1$, 解得 $a > 3 - \frac{e}{2} > 1$.

② 当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

所以 $2h(1) < h(e)$, 即 $2 < \frac{3 - a}{e}$, 解得 $a < 3 - 2e < 0$.

③ 当 $0 < a < 1$ 时,

若 $x \in [1, e^a)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $[1, e^a)$ 上单调递减;

若 $x \in (e^a, e]$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(e^a, e]$ 上单调递增.

所以 $2h(e^a) < \max\{h(1), h(e)\}$.

即 $\frac{2(a + 1)}{e^a} < \max\left\{1, \frac{3 - a}{e}\right\}$. ①

由 (2) 知, $g(a) = \frac{a + 1}{e^a}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

故 $\frac{4}{e} < \frac{2(a + 1)}{e^a} < 2$, 而 $\frac{2}{e} < \frac{3 - a}{e} < \frac{3}{e}$, 所以不等式 ① 无解.

综上，存在 $a \in (-\infty, 3 - 2e) \cup \left(3 - \frac{e}{2}, +\infty\right)$ ，使命题成立。

【标注】 【知识点】利用导数证明不等式能成立问题；求在某点处的切线方程