

一、2021耀华一模

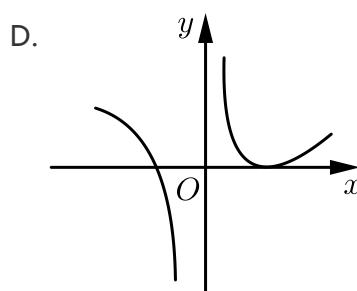
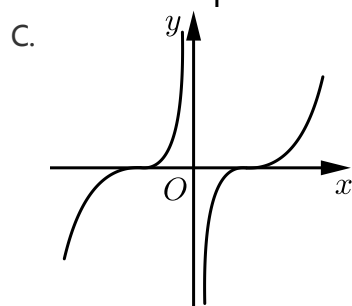
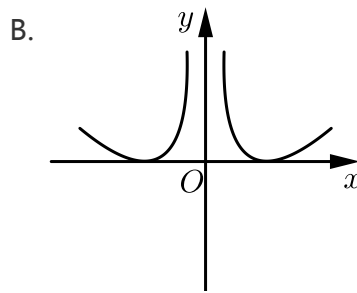
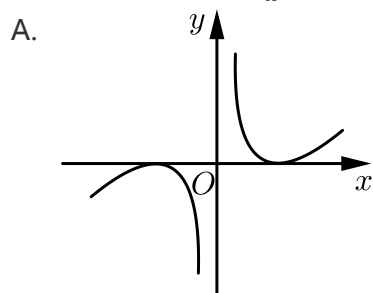
二、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

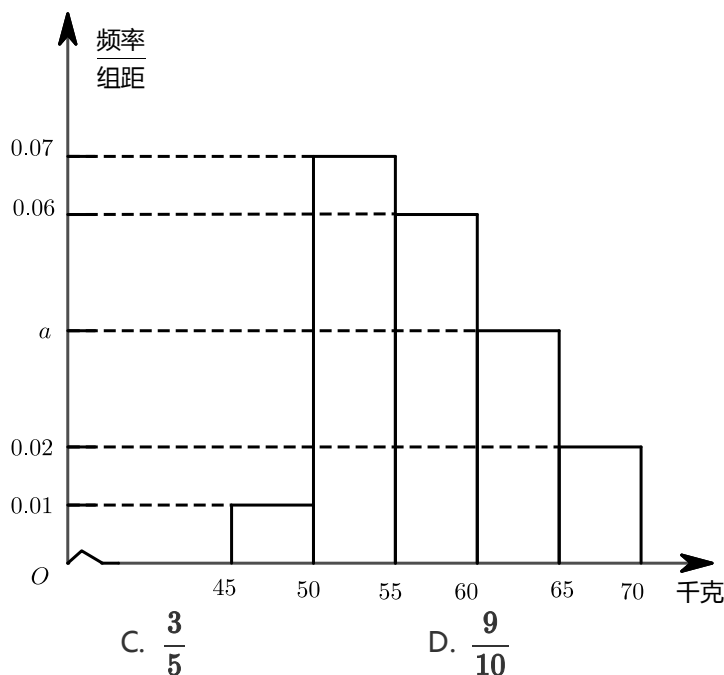
1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 4\}$, 则集合 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = (\quad)$.
- A. $\{5, 6\}$ B. $\{1, 5, 6\}$ C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{1, 2, 5, 6\}$

2. 已知 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则 “ $\varphi = 0$ ” 是 “ $y = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数” 的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

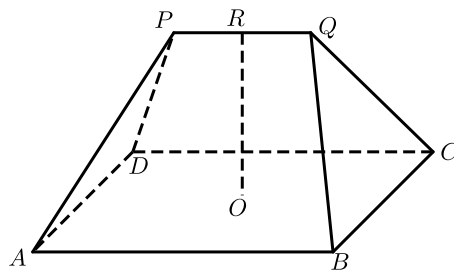
3. 已知函数 $f(x) = \frac{|x| - 1}{x} \ln|x|$, 其图象大致为 ().



4. 为了解学生的身体状况, 某校随机抽取了一批学生测量体重. 经统计, 这批学生的体重数据 (单位: 千克) 全部介于45至70之间. 将数据分成5组, 并得到如图所示的频率分布直方图. 现采用分层抽样的方法, 从 $[55, 60)$, $[60, 65)$, $[65, 70]$ 这三个区间中随机抽取6名学生, 再从这6名学生中随机抽取3人, 则这三人中恰有两人位于区间 $[55, 60)$ 的概率是 ().



5. 如图所示的屋脊状楔体 $PQ-ABCD$ ，下底面 $ABCD$ 是矩形，假设屋脊没有歪斜，即 PQ 的中点 R 在底面 $ABCD$ 上的投影为矩形 $ABCD$ 的中心点 O ， $PQ \parallel AB$ ， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $PQ = 2$ ， $OR = 1$ （长度单位：丈）则楔体 $PQ-ABCD$ 的体积为（ ）（体积单位：立方丈）。



- A. $6\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 8 D. 5
6. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 满足 $2f(2) = f(16)$ ，若 $a = f(\log_4 2)$ ， $b = f(\ln 2)$ ， $c = f(5^{-\frac{1}{2}})$ ，则 a, b, c 的大小关系是（ ）。
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$
7. 已知第一象限内的点 M 既在双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上，又在抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 上，设 C_1 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，若 C_2 的焦点为 F_2 ，且 $\triangle MF_1F_2$ 是以 MF_1 为底边的等腰三角形，则双曲线的离心率为（ ）。
- A. $1 + \sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2 + \sqrt{3}$
8. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，则下列说法正确的是（ ）。
- ① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点
 ② $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心

③ $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

④ 要得到 $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 可以将 $y = f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

A. ①②③

B. ②③

C. ①②

D. ①④

9. 对于函数 $f(x)$, $g(x)$, 设 $x_1 \in \{x|f(x) = 0\}$, $x_2 \in \{x|g(x) = 0\}$, 若存在 x_1, x_2 使得 $|x_1 - x_2| \leq 2$, 则称 $f(x)$, $g(x)$ 互为“零点相邻函数”. 若 $f(x) = e^{x-2} + x - 3$ 与 $g(x) = x^2 - ax - a - 2$ 互为“零点相邻函数”, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(-2, \frac{14}{5}\right)$

B. $\left[-2, \frac{14}{5}\right]$

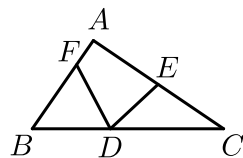
C. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{14}{5}, +\infty\right)$

D. $(-\infty, 2] \cup \left[\frac{14}{5}, +\infty\right)$

三、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

1. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 且满足 $(1+i)z = \frac{4-2i}{1-i}$, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, x^{-2} 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知直线 $l: kx + b (k > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 且被圆 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$; $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 某市有 A, B, C, D 四个景点, 一位游客来该市游览, 已知该游客游览 A 的概率为 $\frac{2}{3}$, 游览 B, C, D 的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且该游客是否游览这四个景点相互独立, 则该游客至多游览一个景点的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 用随机变量 X 表示该游客游览的景点个数, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 已知实数 x, y 满足 $xy = 4x + y (x > 0, y > 0)$, 则 $\frac{4x+y+4}{\sqrt{xy}}$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为边 BC, CA, AB 上的点, 且 $CD = \frac{3}{5}BC$, $EC = \frac{1}{2}AC$, $AF = \frac{1}{3}AB$, 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点 (P 点不在边界上), 若 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE}$, 则实数 λ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

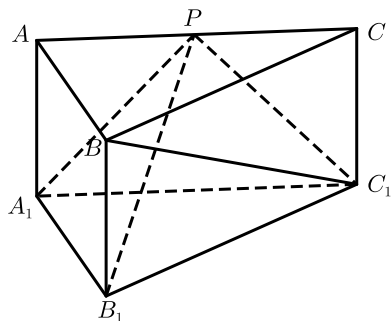
1. 已知 a, b, c 分别为锐角三角形 ABC 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $\sqrt{3}c = 2a \sin C$.

(1) 求 A .

(2) 若 $\cos B = \frac{2}{3}$, 求 $\sin(2B - A)$ 的值.

(3) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

2. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 P 为 AC 的中点, $PA_1 = PC_1 = 2\sqrt{2}$, $A_1B_1 = B_1C_1 = 2\sqrt{3}$, $A_1C_1 = 4$.

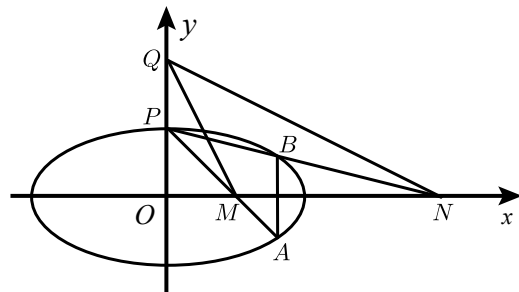


(1) 求证: $A_1P \perp C_1B$.

(2) 求 PC_1 与平面 PA_1B_1 所成角的正弦值.

(3) 求二面角 $B_1 - PA_1 - C_1$ 的正弦值.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为2.



(1) 求椭圆 C 的标准方程 .

(2) 设 P 为椭圆上顶点, 点 A 是椭圆 C 上异于顶点的任意一点, 直线 PA 交 x 轴于点 M , 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N . 问: 在 y 轴的正半轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由 .

4. 已知首项大于 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 1$, 且满足 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{3}$; 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $b_3, \frac{3}{2}b_2, 2b_1$ 成等差数列, 且 $b_1 \neq \frac{15}{2}$, $S_4 = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求 $\frac{(a_n)^2 + 1}{b_n}$ 的最大值, 并求出此时 n 的值 .

(3) 记 $c_n = (-1)^{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{3n + 5}{(a_n + 1)(a_n + 2)b_n} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \sin x$, 其中 $x \in (0, \pi]$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程 .

(2) 判断函数 $f(x)$ 是否存在极值, 若存在, 请判断是极大值还是极小值; 若不存在, 说明理由 .

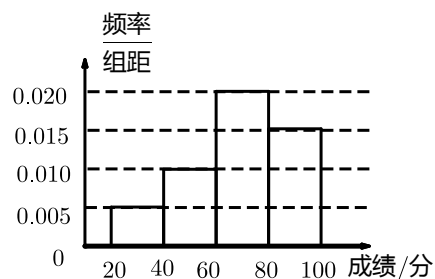
(3) 讨论函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上零点的个数 .

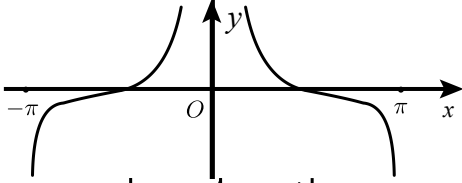
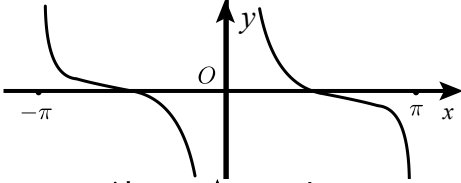
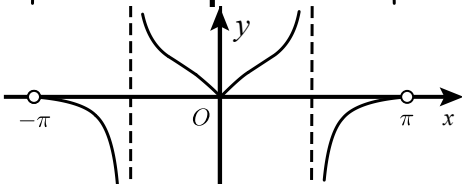
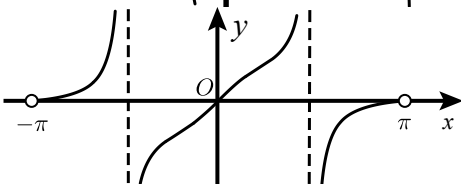
五、2021和平一模

六、选择题

(本大题共9小题,每小题5分,共45分)

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | |x| < 2\}$, $C = \{-2, -1, 0\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = ()$.
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $2 < a < 3$ ” 是 “ $a^2 - 5a - 6 < 0$ ” 的 ().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 某校高三级的全体学生参加体育测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$. 若低于60分的人数是90, 则该校高三级的学生人数是 ().



- A. 270 B. 300 C. 330 D. 360
4. 函数 $y = \frac{\tan x}{x^2 + 1}$ 在 $(-\pi, \pi)$ 的图象大致为 ().
A. 
B. 
C. 
D. 
 5. 设 $a = 8^{\frac{1}{2}}$, $b = \log_3 2$, $c = \log_2 3$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的体积为 () .

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 4 D. 6

7. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点，且双曲线的两条渐近线相互垂直，则双曲线的方程为 () .

- A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

8. 设函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$. 给出下列结论：

- ① $f(x)$ 的最小正周期是 π ;
 ② $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ 内单调递增 ;
 ③ 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得到函数 $y = \cos 2x$ 的图象 .

其中所有正确结论的序号是 () .

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

9. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ 恰有两个互异的实数解，则实数 a 的取值范围是 () .

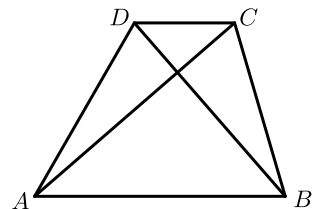
- A. $(-\infty, 0]$ B. $(\frac{5 + 2\sqrt{6}}{8}, +\infty)$
 C. $(-\infty, 0] \cup (\frac{5 + 2\sqrt{6}}{8}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8}) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$.

七、填空题

(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

1. 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{1-i}{2+i}$ 的虚部等于 _____ .
2. 在 $(x - \frac{3}{x^2})^5$ 的展开式中， x^2 的系数是 _____ .
3. 已知直线 $l: x + y - 2 = 0$ 与圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点，则线段 AB 的长度为 _____ .
4. 甲、乙两名同学进行篮球投篮练习，甲同学一次投篮命中的概率为 $\frac{3}{4}$ ，乙同学一次投篮命中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，假设两人投篮命中与否互不影响，则甲、乙两人各投篮一次，至少有一人命中的概率是 _____ .

5. 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b}$ 的最小值为 _____ .
6. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB = 5, CD = 2, BC = \sqrt{13}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, M, N$ 分别是线段 AB, AD 上的点, 且 $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{AN}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为 _____ .

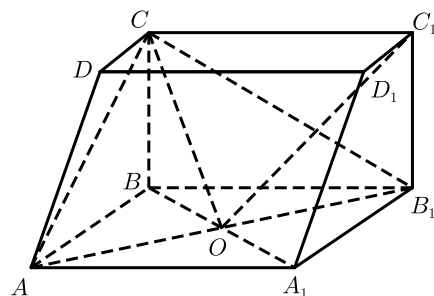


八、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, b = 2\sqrt{7}, c = 2, B = \frac{\pi}{3}$.
- (1) 求 a 的值.
 - (2) 求 $\sin A$.
 - (3) 求 $\sin(B + 2A)$ 的值.

2. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 侧面 ABB_1A_1 是正方形, AB_1 与 A_1B 交于点 $O, AB \perp BC, AB \parallel CD, AB = 2, BC = CD = 1$.



- (1) 求证: $AD \parallel$ 平面 COC_1 .
- (2) 求直线 OC_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值.
- (3) 若点 P 在线段 A_1D_1 上, 且 $A_1P = \frac{2}{3}A_1D_1$, 求二面角 $C - AB_1 - P$ 的正弦值.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(1, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设经过点 F 的直线 l 不与坐标轴垂直, 直线 l 与椭圆 C 相交于点 A, B , 且线段 AB 的中点为 M , 经过坐标原点 O 作射线 OM 与椭圆 C 交于点 N , 若四边形 $OANB$ 为平行四边形, 求直线 l 的方程.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, $S_2 = 0$, $b_1 - a_1 = 1$, $b_3 + a_2 = 5$, $2b_5 = b_4 + 3b_2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $c_n = \frac{(2n+1)a_n}{T_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

① 当 n 是奇数时, 求 $c_n + c_{n+1}$ 的最大值.

② 求证: $\sum_{i=1}^{2n} c_i < 1$.

5. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 直线 l 与 $y = f(x)$ 相切于点 $(e^{\frac{2}{3}}, f(e^{\frac{2}{3}}))$.

① 求 $f(x)$ 的极值, 并写出直线 l 的方程.

② 若对任意的 $x \geq e$ 都有 $f(x) \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$, $m > 0$, 求 m 的最大值.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 有且只有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 x_2 > e^2$.

九、2021河西一模

十、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

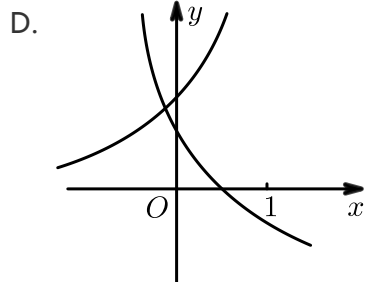
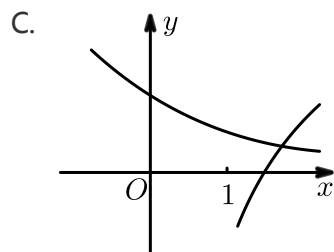
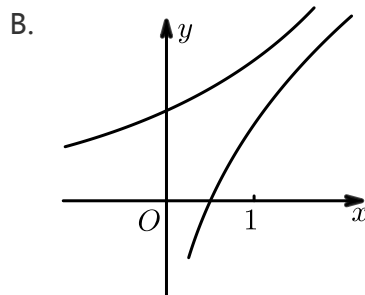
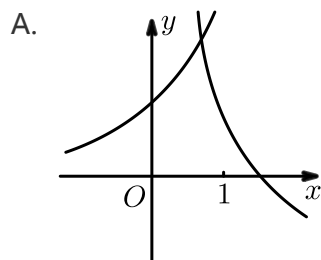
1. 设全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = ()$.

- A. $\{-1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 3\}$

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 " $x > \frac{1}{2}$ " 是 " $2x^2 + x - 1 > 0$ " 的 ().

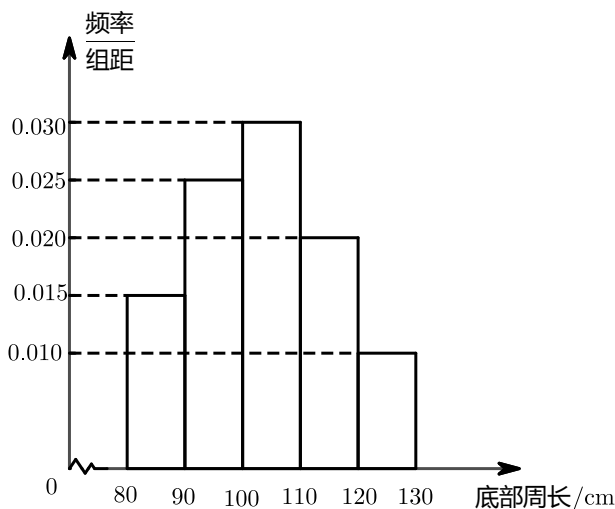
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ().



4.

为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中60株树木的底部周长（单位：cm），所得数据均在区间[80, 130]上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的60株树木中，底部周长小于100cm的株数为（ ）。



- A. 15 B. 24 C. 6 D. 30

5. 将长、宽分别为4和3的长方形ABCD沿对角线AC折成直二面角，得到四面体A-BCD，则四面体A-BCD的外接球的表面积为（ ）。

- A. 25π B. 50π C. 5π D. 10π

6. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则（ ）。

- A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}})$ B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}})$
 C. $f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$ D. $f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$ ，双曲线的一个焦点在直线 l 上，则双曲线的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π ，将该函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到的图象对应的函数为奇函数，则 $f(x)$ 的图象①关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称，②关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称，③在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递增。其中所有正确结论的序号是（ ）。

- A. ② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点，则（ ）。

- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

十一、 填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

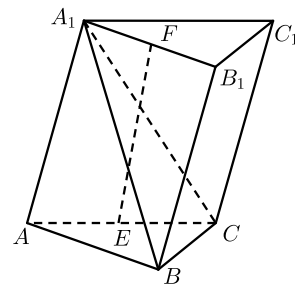
1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{11-7i}{1-2i} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)
3. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2, -1)$, 则圆 C 的标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 将一颗骰子先后抛掷2次, 观察向上的点数, 两数中至少有一个奇数的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 以第一次向上的点数为横坐标 x , 第二次向上的点数为纵坐标 y 的点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 内部的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$, 则 $x + y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上 $BC = 3BE$, $CD = \lambda DF$, 若 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1$, 则 λ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若 G 为线段 DC 上的动点, 则 $\vec{AG} \cdot \vec{AE}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

十二、 解答题

(本大题共5小题, 共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a > b, a = 5, c = 6, \sin B = \frac{3}{5}$.
 - (1) 求 b .
 - (2) 求 $\sin A$ 的值 .
 - (3) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .
- 2.

如图，已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $A_1A = A_1C = AC$ ， E ， F 分别是 AC ， A_1B_1 的中点．



- (1) 证明： $EF \perp BC$ ．
- (2) 求直线 EF 与 A_1BC 平面所成角的余弦值．
- (3) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的正弦值．

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 = 1$ ， $b_1 = 2$ ， $b_2 = 2a_2$ ， $b_3 = 3a_3 - 1$ ．

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．
- (2) 若 $c_n = \frac{2^{a_n}}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ．

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 ， F_2 ，且满足离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$ ，过原点 O 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 M ， N 两点．

- (1) 求椭圆 C 的方程．
- (2) 设点 $A(2, 1)$ ，求 $\triangle AMN$ 面积的最大值．

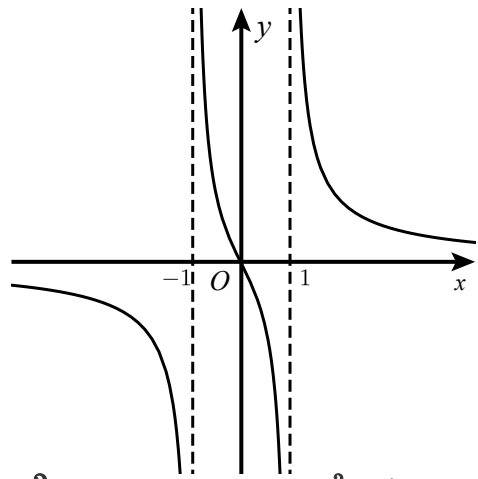
5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2a \ln x$ (其中 a 是实数) .
- (1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (3) 设 $g(x) = \ln x - bx - cx^2$, 若函数 $f(x)$ 的两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点 , 且 $y = (x_1 - x_2)g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的范围是 $\left[\ln 2 - \frac{2}{3}, +\infty\right)$ 求实数 a 的取值范围 .

十三、 2021南开一模

十四、 选择题

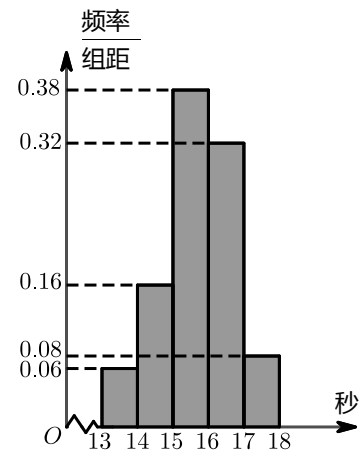
(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

- 设全集为 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $S = \{-3, 0, 1\}$, $T = \{-1, 2\}$, 则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于 () .
 A. $\emptyset$ B. $\{-2, 3\}$ C. $\{-2, -1, 2, 3\}$ D. $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$
- 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x > 1, y > 1$ ” 是 “ $xy > 1$ ” 的 () .
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 () .



- A. $f(x) = \frac{2x}{1-|x|}$ B. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ C. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ D. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

4. 某校抽取100名学生做体能测试，其中百米测试中，成绩全部介于13秒与18秒之间，将测试结果分成五组：第一组[13, 14)，第二组[14, 15)，…，第五组[17, 18]。如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图，若成绩低于a即为优秀，如果优秀的人数为14人，则a的估计值是（ ）。



- A. 14 B. 14.5 C. 15 D. 15.5
5. 已知一个圆锥的底面半径为2，高为3，其体积大小等于某球的表面积大小，则此球的体积是（ ）。
- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ C. 4π D. $\frac{4\pi}{3}$
6. 已知 $a = 4^{0.3}$ ， $b = 0.3^4$ ， $c = \log_3 10$ ，则（ ）。
- A. $b > c > a$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin \omega x - \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 满足 $f(x_1) - f(x_2) = 4$ ，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值为（ ）。
- A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

8.

设直线 $x - \sqrt{3}y + m = 0$ ($m \neq 0$) 与 x 轴交于点 C , 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A, B . 若 A 为 BC 中点, 则该双曲线的离心率是 ().

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根, 则实数 a 的取值

范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$
C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

十五、 填空题

(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{2-i}{1+2i}$ 的共轭复数为 _____ .
2. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中, 常数项为 _____ .
3. 已知过点 $(1, 1)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 _____ .
4. 对某种型号的仪器进行质量检测, 每台仪器最多可检测 3 次, 一旦发现问题, 则停止检测, 否则一直检测到 3 次为止. 设该仪器一次检测出现问题的概率为 0.2, 则检测 2 次停止的概率为 _____ ; 设检测次数为 X , 则 X 的数学期望为 _____ .
5. 已知 $a > 0, b > 0, a + b + c = 1$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1}$ 的最大值是 _____ .
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, AC = 2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{3}|\overrightarrow{BA}|$, 则 $AB =$ _____ ; 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{FB}, \lambda > 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最大值为 _____ .

十六、 解答题

(本大题共 5 小题, 共 75 分)

- 1.

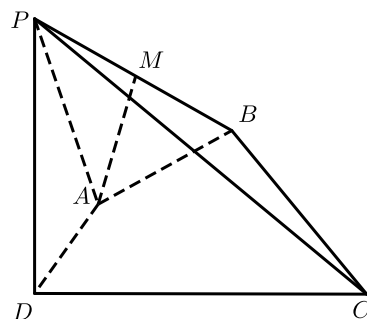
在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 对边的边长分别是 a 、 b 、 c ．已知

$$(2 \sin A - \sqrt{3} \sin B)^2 = 4 \sin^2 C - \sin^2 B.$$

(1) 求角 C 的大小．

(2) 若 $b = 1$ ， $c = \sqrt{7}$ ，求 $\cos 2(B - C)$ 的值．

2. 如图所示，四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = DC = 2AD = 2$ ， $AD \perp DC$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ．



(1) 求 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值．

(2) 求二面角 $B - PC - D$ 的正弦值．

(3) 设 M 为 PB 上一点，且 $PM = 2MB$ ，若 $AM \parallel$ 平面 PCD ，求 BC 的长．

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，右顶点为点 A ，点 E 的坐标为 $(0, \frac{b}{4})$ ，延长线段 F_1E 交椭圆于点 M ， $MF_2 \perp x$ 轴．

(1) 求椭圆的离心率．

(2) 设抛物线 $y^2 = \frac{24}{5}bx$ 的焦点为 F ， B 为抛物线上一点， $|BF| = \frac{36}{5}b$ ，直线 BF 交椭圆于 P 、 Q 两点，若 $|AP|^2 + |AQ|^2 = \frac{42}{5}$ ，求椭圆的标准方程．

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_2^2 = a_3 + a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = a_1$,
 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1)(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求证: 数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最大值.

(3) 求 $\sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}}$.

5. 已知曲线 $y = \ln(x+m)$ 与 x 轴交于点 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = f(x)$, 且 $f(1) = 2$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 的极值.

(3) 设 $h(x) = \frac{\ln^2 x + (1-a)\ln x + 1}{x}$, 若存在实数 $x_1 \in [1, e]$, $x_2 \in [e^{-1}, 1]$, 使

$2h(x_1) < x_2 \ln^2 x_2 + (a-1)x_2 \ln x_2 + x_2$ 成立, 求实数 a 的取值范围.