通项练习

1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n=2a_{n-1}+2^n$（$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$），则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$______．

答案 $n\cdot 2^n$

解析 对$a_n=2a_{n-1}+2^n$两边同除以2^n得$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，$\frac{a_1}{2^1}=1$，

所以$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以1为首项和公差的等差数列，

所以$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，

故$a_n=n\cdot 2^n$．

2 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\forall n\in\mathbf{N}^+$，$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 2^n$，求数列的通项a_n．

答案 $2^n\left(\frac{3}{2}n-1\right)$．

解析 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{2}$，

则$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n-1$，

则$a_n=2^n\left(\frac{3}{2}n-1\right)$．

3 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n^3$，则$a_n=$______．

答案 $\left(\sqrt{2}\right)^{3^n-1}$

解析 $\because a_{n+1}=2a_n^3$，

$\therefore \lg a_{n+1}=3\lg a_n+\lg 2$，

$\therefore \lg a_{n+1}+\frac{\lg 2}{2}=3\left(\lg a_n+\frac{\lg 2}{2}\right)$．

而$\lg a_1+\frac{\lg 2}{2}=\frac{3}{2}\lg 2$，

$\therefore\left\{\lg a_1+\dfrac{\lg 2}{2}\right\}$是以$\dfrac{3}{2}\lg 2$为首项，3为公比的等比数列，

$\therefore\lg a_n+\dfrac{\lg 2}{2}=\dfrac{3}{2}\lg 2\cdot 3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}\lg 2$．

$\therefore\lg a_n=\dfrac{3^n-1}{2}\cdot\lg 2=\lg 2^{\frac{3^n-1}{2}}$，

$\therefore a_n=\left(\sqrt{2}\right)^{3^n-1}$．

故答案为：$\left(\sqrt{2}\right)^{3^n-1}$．

4 若数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=2{a_n}^3(n\in\mathbf{N}_+)$，求$a_n$．

答案 $a_n=3^{3^{n-1}}\cdot 2^{\frac{3^{n-1}-1}{2}}$．

解析 易知$a_n>0$，两边取对数，$\lg a_{n+1}=3\lg a_n+\lg 2$，

用待定系数法，有$\lg a_{n+1}+\dfrac{\lg 2}{2}=3\left(\lg a_n+\dfrac{\lg 2}{2}\right)$，

于是$\lg a_n+\dfrac{\lg 2}{2}=3^{n-1}\left(\lg a_1+\dfrac{\lg 2}{2}\right)=3^{n-1}\lg\left(\sqrt{2}a_n\right)$，

化简可得$a_n=3^{3^{n-1}}\cdot 2^{\frac{3^{n-1}-1}{2}}$．

故答案为：$a_n=3^{3^{n-1}}\cdot 2^{\frac{3^{n-1}-1}{2}}$．

5 数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n^2+6a_n+6$，数列$\{a_n\}$的通项公式为______．

答案 $a_n=7^{2^{n-1}}$

6 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+3n+1$，求数列$\{a_n\}$通项公式．

答案 $a_n=\dfrac{8}{3}\cdot 4^{n-1}-n-\dfrac{2}{3}$．

解析 待定系数，设$a_{n+1}+A(n+1)+B=4(a_n+An+B)$，展开得$a_{n+1}=4a_n+3An+3B-A$，与已知比较系数得$3A=3$，$3B-A=1$，$\therefore A=1$，$B=\dfrac{2}{3}$．

即$a_{n+1}+(n+1)+\dfrac{2}{3}=4\left(a_n+n+\dfrac{2}{3}\right)$

$\therefore$数列$\left\{a_n+n+\frac{2}{3}\right\}$是首项为$\frac{8}{3}$，公比为$q=4$的等比数列，

$\therefore a_n+n+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\cdot4^{n-1}$

$\therefore$数列通项公式为$a_n=\frac{8}{3}\cdot4^{n-1}-n-\frac{2}{3}$．

故答案为：$a_n=\frac{8}{3}\cdot4^{n-1}-n-\frac{2}{3}$．

7 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_{n+1}\cdot a_n=a_{n+1}-a_n$，则数列通项$a_n=$______．

答案 $-\frac{1}{n}$

解析 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=1,\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-1,\frac{1}{a_1}=1,$

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}$为首项，以$-1$为公差的等差数列，

$\frac{1}{a_n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n,$

$a_n=-\frac{1}{n}.$

8 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$，则$\{a_n+n\}$（　　）

A. 必为等差数列

B. 必为等比数列

C. 既不是等差数列也不是等比数列

D. 不确定

答案 B

解析 $\because a_{n+1}=3a_n+2n-1$，

等式两边同时加上$n+1$，

$a_{n+1}+n+1=3a_n+2n-1+n+1$，

$a_{n+1}+n+1=3(a_n+n)$，

$\therefore$数列$\{a_n+n\}$为等比数列．

9 数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$且$a_n+a_{n-1}=\frac{n}{a_n-a_{n-1}}+2(n\geqslant2)$，则数列$\left\{\frac{1}{(a_n-1)^2}\right\}$的前2020项和为（　　）．

A. $\frac{4040}{2021}$　B. $\frac{2019}{1010}$　C. $\frac{2020}{2021}$　D. $\frac{4039}{2020}$

答案　A

解析　$\because a_n+a_{n-1}=\dfrac{n}{a_n-a_{n-1}}+2(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_n^2-a_{n-1}^2-2(a_n-a_{n-1})=n$，

化为：$(a_n-1)^2-(a_{n-1}-1)^2=n$，

$\therefore (a_n-1)^2-(a_1-1)^2=n+(n-1)+\cdots\cdots+2$，

$\therefore (a_n-1)^2=\dfrac{n(n+1)}{2}$，可得：$\dfrac{1}{(a_n-1)^2}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$．

则数列$\left\{\dfrac{1}{(a_n-1)^2}\right\}$前2020项和

$=2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2021}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{2021}\right)=\dfrac{4040}{2021}$．

故选：A．

10 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=3a_{n-1}+2n+3(n\geqslant 2)$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

答案　$a_n=5\cdot 3^{n-1}-n-3$．

解析　$a_n=5\cdot 3^{n-1}-n-3$．

11 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=4a_n+2^n$，则通项$a_n=$______．

答案　$2^{2n-1}-2^{n-1}$

解析　$a_{n+1}=4a_n+2^n$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$，

令$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$．

$\therefore b_{n+1}=2b_n+\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$．

$\therefore b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$，$b_1+\dfrac{1}{2}=1$．

$\therefore\left\{b_n+\frac{1}{2}\right\}$是以1为首项,2为公比的等比数列，$b_n+\frac{1}{2}=2^{n-1}$，

$\therefore b_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$.

$\therefore a_n=2^n\left(2^{n-1}-\frac{1}{2}\right)=2^{2n-1}-2^{n-1}$.

12 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+1+3\times2^n$，$a_1=2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式 .

答案 $a_n=(3+3n)\cdot2^{n-1}-1$

解析 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\frac{a_n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3\cdot2^n}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3}{2}$

$\therefore\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3}{2}$

$\therefore\frac{a_n}{2^n}=(\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}})+(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}})+\ldots(\frac{a_3}{2^3}-\frac{a_2}{2^2})+(\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2^1})+\frac{a_1}{2^1}$

$=(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2})+(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{3}{2})+\ldots+(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2})+\frac{2}{2}=(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^2})+\frac{3}{2}n+1$

$=\frac{3+3n}{2}-\frac{1}{2^n}$

$a_n=(3+3n)\cdot2^{n-1}-1$

13 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+2^n$，则$a_n=$______ .

答案 $5\cdot3^{n-1}-2^{n+1}$

解析 由待定系数法：$a_n+\lambda\cdot2^n=3\left(a_{n-1}+\lambda\cdot2^{n-1}\right)$

$\Rightarrow a_n=3a_{n-1}+3\lambda\cdot2^{n-1}-\lambda\cdot2^n$

$=3a_{n-1}+3\lambda\cdot2^{n-1}-2\lambda\cdot2^{n-1}=3a_{n-1}+\lambda\cdot2^{n-1}$，

$\because a_n=3a_{n-1}+2^n$，

$\therefore\lambda=2$，

$\therefore a_n=3a_{n-1}+2^n$

$\Rightarrow a_n+2\cdot2^n=3\left(a_{n-1}+2\cdot2^{n-1}\right)$

$\Rightarrow\frac{a_n+2\cdot2^n}{a_{n-1}+2\cdot2^{n-1}}=3$，

令$b_n=a_n+2\cdot2^n$，$b_1=a_1+2\cdot2^1=5$，

则$\{b_n\}$是首项为5，公比为3的等比数列，

$\therefore b_n=5\cdot 3^{n-1}$，即$a_n+2\cdot 2^n=5\cdot 3^{n-1}$，

$\therefore a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$．

14 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=3a_n+2\times 3^n+1,a_1=3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

答案 $a_n=\frac{2}{3}\times n\times 3^n+\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$．

解析 $a_{n+1}=3a_n+2\times 3^n+1$两边除以$3^{n+1}$，得$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{n+1}}$，

则$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{n+1}}$，故

累加得$\frac{a_n}{3^n}=\frac{2(n-1)}{3}+\frac{\frac{1}{3^n}(1-3^{n-1})}{1-3}+1=\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}$，

则$a_n=\frac{2}{3}\times n\times 3^n+\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$．

15 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1) 求a_2．

(2) 求$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式．

(3) 设$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$\frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\leqslant S_n<\frac{21}{13}$．

答案 (1) $\frac{4}{13}$．

(2) $\frac{1}{a_n}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^n$．

(3) $\frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\leqslant S_n<\frac{21}{13}$．

解析 (1) $\because a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

$\therefore a_2=\frac{2\times\frac{2}{5}}{3-\frac{2}{5}}=\frac{4}{13}$．

(2) $\because a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2a_n}-\frac{1}{2}$，

化为：$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$是等比数列，首项与公比都为$\dfrac{3}{2}$．

$\therefore\dfrac{1}{a_n}-1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，

解得$\dfrac{1}{a_n}=1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$．

(3) 一方面：由（2）可得：

$a_n=\dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}\geqslant\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$．

$\therefore S_n\geqslant\dfrac{2}{5}\left[1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right]=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{6}{5}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$，因此不等式左边成立．

另一方面：$a_n=\dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}<\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，

$\therefore S_n\leqslant\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{13}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^4+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$=\dfrac{46}{65}\times\dfrac{8}{27}\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}}<\dfrac{46}{65}+\dfrac{8}{27}\times3<\dfrac{21}{13}(n\geqslant3)$．

又$n=1$，2时也成立，因此不等式右边成立．

综上可得：$\dfrac{6}{5}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)\leqslant S_n<\dfrac{21}{13}$．

16 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$，求通项$a_n$．

答案 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1$．

解析 由$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$，得$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$，

所以数列$\{a_n-1\}$是以$a_1-1=1$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以$a_n-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，即$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1$．

17 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}a_n=2a_n-2a_{n+1}(n\in\mathrm{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

答案 $a_n=\dfrac{2}{n+1},(n\in\mathrm{N}^*)$.

解析 由题意知$1=\dfrac{2a_n-2a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\dfrac{2}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2},(n\geqslant 2)$．

所以$a_n=\frac{2}{n+1},(n\geqslant 2)$，当$n=1$时也成立．

所以$a_n=\frac{2}{n+1},(n\in \mathrm{N}^*)$．