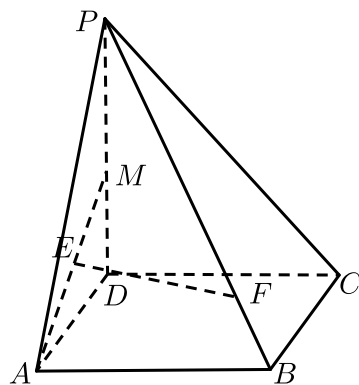


立体几何非墙角建系题

- 1 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $PD = 2$ ， M 为 PD 的中点， E 为 AM 的中点，点 F 在线段 PB 上，且 $PF = 3FB$ 。



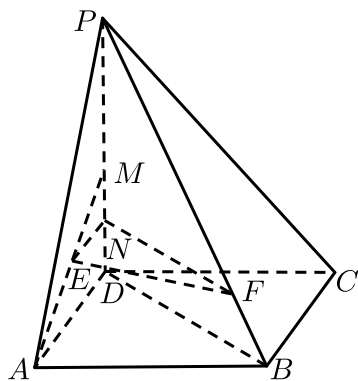
- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 。
- (2) 若平面 $PDC \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PD \perp DC$ ，求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

解析

- (1) 设 DM 中点为 N ，连接 EN ， NF ， BD ，则 $NE \parallel AD$ ，



$\because NE \not\subset$ 平面 $ABCD$ ， $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore NE \parallel$ 平面 $ABCD$ ，

又 $\because \frac{PN}{PD} = \frac{PF}{PB} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore NF \parallel DB$ ，

$\because NF \not\subset \text{平面} ABCD, BD \subset \text{平面} ABCD,$

$\therefore NF // \text{平面} ABCD,$

又 $\because NE \cap NF = N,$

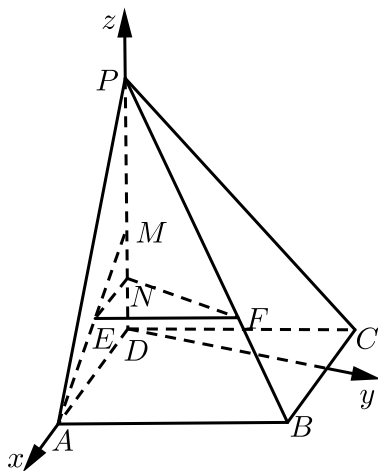
$\therefore \text{平面} NEF // \text{平面} ABCD.$

则 $EF // \text{平面} ABCD.$

(2) $\because \text{平面} PDC \perp \text{底面} ABCD,$ 且 $PD \perp DC,$

$\therefore PD \perp \text{底面} ABCD,$

如图, 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $D-xyz,$



则 $D(0,0,0), P(0,0,2), A(1,0,0), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-1,0,0), \overrightarrow{PC} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right),$

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z),$

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \end{cases},$ 取 $y = 2\sqrt{2},$ 得 $\vec{m} = (0, 2\sqrt{2}, 1).$

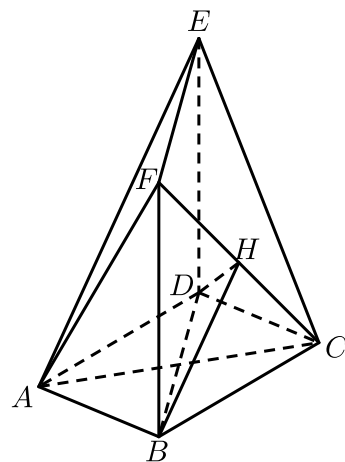
又平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,1,0).$

设平面 PAD 与平面 PBC 所成的二面角为 $\theta,$

则 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

即平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

2 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle BAD = 60^\circ,$ 四边形 $BDEF$ 是矩形, 平面 $BDEF \perp \text{平面} ABCD,$ $BF = 3,$ H 是 CF 的中点.



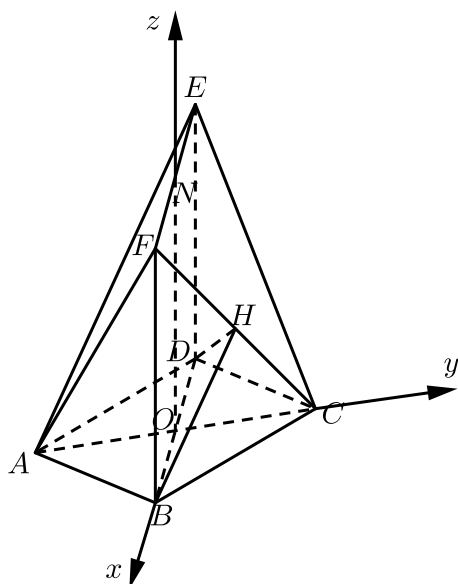
- (1) 求证： $AC \perp$ 平面 $BDEF$.
- (2) 求直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值 .
- (3) 求二面角 $H - BD - C$ 的大小 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$.
- (3) 60° .

解析

- (1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
 $\therefore AC \perp BD$.
 又： $\because$ 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$ ，
 且 $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，
 $\therefore AC \perp$ 平面 $BDEF$.
- (2) 设 $AC \cap BD = O$ ，取 EF 的中点 N ，连接 ON ，
 $\because$ 四边形 $BDEF$ 是矩形， O, N 分别为 BD, EF 的中点，
 $\therefore ON \parallel ED$ ，
 $\because ED \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 $\therefore ON \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 由 $AC \perp BD$ ，得 OB, OC, ON 两两垂直 .
 $\therefore$ 以 O 为原点， OB, OC, ON 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，如图建立空间直角坐标系 .



$\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $BF = 3$,

$\therefore A(0, -\sqrt{3}, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $E(-1, 0, 3)$,

$F(1, 0, 3)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $H\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

$\therefore AC \perp$ 平面 $BDEF$,

$\therefore$ 平面 $BDEF$ 的法向量 $\overrightarrow{AC} = (0, 2\sqrt{3}, 0)$.

设直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角为 α ,

$\therefore \overrightarrow{DH} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

$\therefore \sin \alpha = \left| \cos \langle \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AC} \rangle \right| = \left| \frac{\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{DH}| |\overrightarrow{AC}|} \right| = \frac{\sqrt{7}}{7}$,

$\therefore$ 直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

(3) 由(2), 得 $\overrightarrow{BH} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 0, 0)$.

设平面 BDH 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -x + \sqrt{3}y + 3z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$

令 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (0, -\sqrt{3}, 1)$

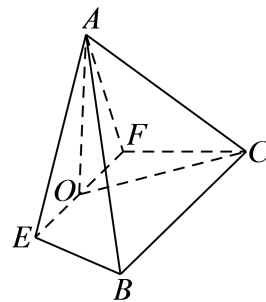
由 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, 得平面 BCD 的法向量为 $\overrightarrow{ED} = (0, 0, -3)$,

则 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{ED} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{ED}|} = -\frac{1}{2}$,

由图可知二面角 $H - BD - C$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $H - BD - C$ 的大小为 60° .

如图，在四棱锥 $A-EFCB$ 中， $\triangle AEF$ 为等边三角形，平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$ ， $EF \parallel BC$ ， $BC = 4$ ， $EF = 2a$ ， $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$ ， O 为 EF 的中点。



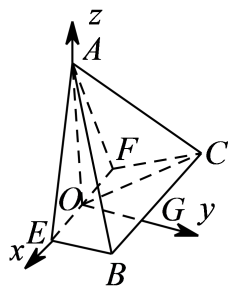
- (1) 求证： $AO \perp BE$ 。
- (2) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值。
- (3) 若 $BE \perp$ 平面 AOC ，求 a 的值。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 二面角 $F-AE-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。
- (3) $a = \frac{4}{3}$ 。

解析

- (1) $\because \triangle AEF$ 为等边三角形，
 O 为 EF 中点，
 $\therefore AO \perp EF$
 又 $\because$ 平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$ ，
 平面 $AEF \cap$ 平面 $EFCB = EF$ ，
 $\therefore AO \perp$ 平面 $EFCB$ ，
 $\therefore AO \perp BE$ 。
- (2) 以 O 为原点建立如图坐标系，



$$E(a, 0, 0), F(-a, 0, 0),$$

$$A(0, 0, \sqrt{3}a), B(2, \sqrt{3}(2-a), 0)$$

$$\overrightarrow{EA} = (-a, 0, \sqrt{3}a), \overrightarrow{EB} = (2-a, \sqrt{3}(2-a), 0)$$

平面 AEF 的法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$;

设平面 AEB 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{3}z = 0 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

$$\text{取} \vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

又 $\because$ 二面角 $F-AE-B$ 为钝角,

$$\therefore \text{二面角} F-AE-B \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

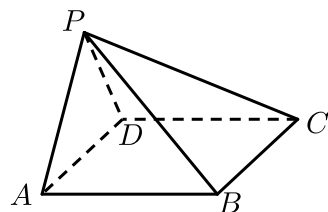
(3) $\because BE \perp$ 平面 AOC , $\therefore BE \perp OC$,

$$\overrightarrow{OC} = (-2, \sqrt{3}(2-a), 0),$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{OC} = -2(2-a) + \sqrt{3}(2-a) \times \sqrt{3}(2-a) = 0,$$

$$\text{解得} a = 2 \text{ (舍)} \text{ 或 } a = \frac{4}{3}.$$

4 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.



(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) 若 $PA = PD = AB = DC$, $\angle APD = 90^\circ$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

答案

(1) 证明见解析.

$$(2) -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解析

(1) 由 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$, 可得 $PD \perp CD$, $AB \perp PA$,

$$\because AB \parallel CD, \therefore AB \perp PD,$$

$$\text{又} \because PD \cap PA = P,$$

$$\therefore AB \perp \text{平面} PAD, \text{ 又 } AB \subset \text{平面} PAB,$$

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) $\because AB \parallel CD$, 且 $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 .

取 O , E 分别为 AD , BC 中点 , 连接 OE , PO , 则 $AB \parallel OE \parallel CD$.

由 (1) 知 $AB \perp$ 平面 PAD ,

$\therefore AB \perp PO$, $AB \perp AD$,

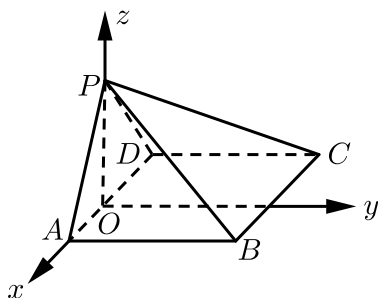
$\therefore OE \perp PO$, $OE \perp AD$,

又 $\because \angle APD = 90^\circ$, $PA = PD$,

$\therefore \triangle PAD$ 为等腰直角三角形 ,

$\therefore PO \perp AD$.

建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$,



不妨令 $PA = PD = AB = DC = 2$,

则 $PO = OA = OD = \sqrt{2}$, $P(0, 0, \sqrt{2})$, $B(\sqrt{2}, 2, 0)$, $C(-\sqrt{2}, 2, 0)$,

则 $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (2\sqrt{2}, 0, 0)$,

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则有 $\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 2y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$, 取 $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$,

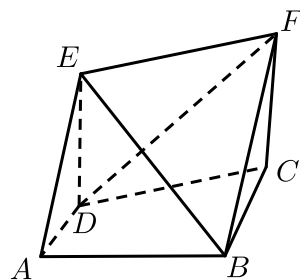
设平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则有 $\begin{cases} \sqrt{2}x_2 + 2y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0 \\ 2\sqrt{2}x_2 = 0 \end{cases}$, 取 $\vec{n}_2 = (0, 1, \sqrt{2})$,

$\therefore \cos \langle A - PB - C \rangle = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

显然二面角 $A - PB - C$ 为钝二面角 , 所以其余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5 如图所示 , 直角梯形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形 , $CF = \sqrt{3}$, 平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.



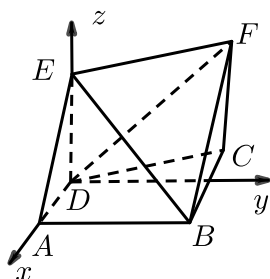
- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 ABE .
- (2) 求平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值 .
- (3) 在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.
- (3) $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

解析

- (1) 取 D 为原点， DA 所在直线为 x 轴， DE 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示；



则 $A(1, 0, 0)$ ， $B(1, 2, 0)$ ， $E(0, 0, \sqrt{3})$ ， $F(-1, 2, \sqrt{3})$ ，

$$\overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3})，\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)，$$

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}，$$

不妨设 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$ ，

$$\text{又}\overrightarrow{DF} = (-1, 2, \sqrt{3})，$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 0，$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} \perp \vec{n}；$$

又 $\because DF \not\subset$ 平面 ABE ，

$\therefore DF \parallel \text{平面} ABE$.

$$(2) \therefore \overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BF} = (-2, 0, \sqrt{3}),$$

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \vec{m} = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 4),$$

$$\therefore |\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{31}} = \frac{5\sqrt{31}}{31},$$

$\therefore$ 平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值是 $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.

$$(3) \text{ 设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DF} = \lambda(-1, 2, \sqrt{3}) = (-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \lambda \in [0, 1];$$

$$\therefore P(-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{BP} = (-\lambda - 1, 2\lambda - 2, \sqrt{3}\lambda),$$

又平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$,

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} \\ &= \frac{|\sqrt{3}(-\lambda - 1) + \sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{化简得 } 8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

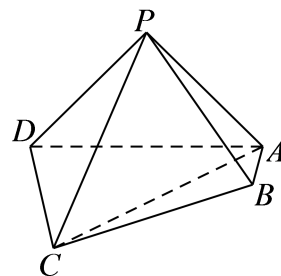
$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{4};$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

综上, $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

- 6 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, $AB \perp AD$, $AB = 1$, $AD = 2$, $AC = CD = \sqrt{5}$.



- (1) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB .
- (2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

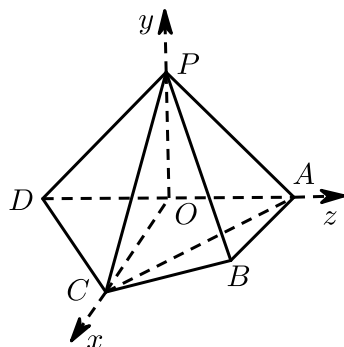
- (3) 在棱 PA 上是否存在点 M ，使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ？若存在，求 $\frac{AM}{AP}$ 的值；若不存在，说明理由.

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 (3) 存在 , $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$.

解析

- (1) $\because$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, $AB \subset$ 面 $ABCD$, 且 $AB \perp AD$,
 $\therefore AB \perp$ 面 PAD ,
 $\therefore AB \perp PD$,
 又 $\because PD \perp PA$, $PA \cap AB = A$,
 $\therefore PD \perp$ 面 PAB .
 (2) 取 AD 的中点 O , 连接 CO , PO ,
 $\because CD = AC = \sqrt{5}$,
 $\therefore CO \perp AD$,
 $\because PA = PD$,
 $\therefore PO \perp AD$,
 以 O 为原点 , 建立如图坐标系 ;



易知 $P(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $C(2, 0, 0)$,
 则 $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{PD} = (0, -1, -1)$, $\overrightarrow{PC} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, -1, 0)$,
 设平面 PDC 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, 1)$,
 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$, 解得 $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$,
 设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ ,

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{PB} \rangle \right| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{PB}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{PB}|} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{1}{2} - 1 - 1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} \times \sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

(3) 假设存在 $M(0, x_0, y_0)$, 使得 $BM \parallel$ 平面 PCD , 设 $\frac{AM}{AP} = \lambda$, $A(0, 1, 0)$, $P(0, 0, 1)$,

$$B(1, 1, 0),$$

$$\vec{AP} = (0, -1, 1), \vec{AM} = (0, y_0 - 1, z_0),$$

$$\vec{AM} = \lambda \vec{AP}, \text{ 得 } M(0, 1 - \lambda, \lambda),$$

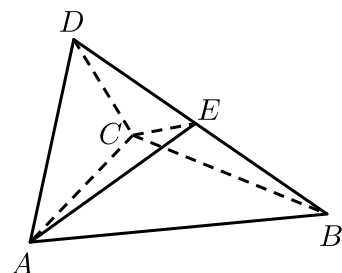
$$\vec{BM} = (-1, -\lambda, \lambda),$$

$\because BM \parallel$ 平面 PCD , 平面 PDC 的法向量为 $\vec{n}$,

$$\therefore \vec{BM} \cdot \vec{n} = 0, \text{ 即 } -\frac{1}{2} + \lambda + \lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{4},$$

即当 $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$ 时, 满足题意.

7 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD$.



(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC .

(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E , 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D - AE - C$ 的余弦值.

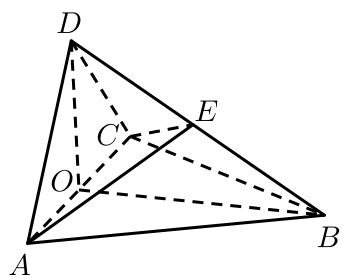
答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

解析

(1) 取 AC 中点为 O , 连接 BO , DO ;



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AB = BC$$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ BC = BD \\ \angle ABD = \angle DBC \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$\therefore AD = CD$ ，即 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形， $\angle ADC$ 为直角，

又 O 为底边 AC 的中点，

$$\therefore DO \perp AC,$$

$$\text{令 } |AB| = a, \text{ 则 } |AB| = |AC| = |BC| = |BD| = a,$$

$$\text{易得: } |OD| = \frac{\sqrt{2}}{2}a, |OB| = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore |OD|^2 + |OB|^2 = |BD|^2,$$

$$\text{由勾股定理的逆定理可得 } \angle DOB = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } OD \perp OB.$$

$$\therefore OD \perp OB, OD \perp AC, AC \cap OB = O, AC \subset \text{平面 } ABC, OB \subset \text{平面 } ABC,$$

$$\therefore OD \perp \text{平面 } ABC,$$

$$\text{又 } OD \subset \text{平面 } ADC,$$

由面面垂直的判定定理可得：平面 $ADC \perp$ 平面 ABC 。

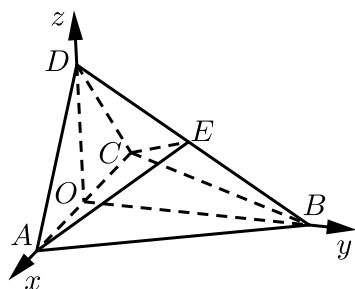
(2) 由题意可知 $V_{D-ACE} = V_{B-ACE}$ ，

即 B, D 到平面 ACE 的距离相等，

即 E 为 BD 中点，

以 O 为原点， $\overrightarrow{OA}$ 为 x 轴正方向， $\overrightarrow{OB}$ 为 y 轴正方向， $\overrightarrow{OD}$ 为 z 轴正方向，

设 $|AC| = a$ ，建立空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$, $A(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $D(0, 0, \frac{a}{2})$, $E(0, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{a}{4})$,

易得: $\overrightarrow{AE} = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{a}{4})$, $\overrightarrow{AD} = (-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{4})$, $\overrightarrow{OA} = (\frac{a}{2}, 0, 0)$

设平面 AED 的法向量 $\vec{n}_1$, 平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}_2$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{解得 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}),$$

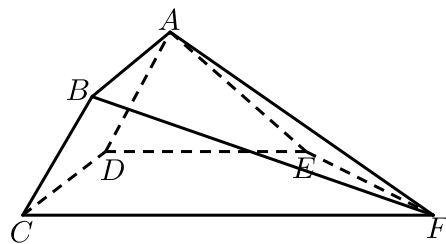
$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{解得 } \vec{n}_2 = (0, 1, -\sqrt{3}),$$

若二面角 $D-AE-C$ 为 θ , 易知 θ 为锐角,

$$\cos \theta = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

8 如图, 多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 二面角 $A-CD-F$ 为 60° , $DE \parallel CF$,

$CD \perp DE$, $AD = 2$, $DE = DC = 3$, $CF = 6$.



(1) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE .

(2) 在线段 CF 上求一点 G , 使锐二面角 $B-EG-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$.

答案

(1) 证明见解析.

(2) G 为 CF 四等分点且靠近 C .

解析

(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

又 $\because DE \parallel CF$,

$AD \cap DC = D$, $AD, DC \subset \text{面}ABCD$,

$BC \cap CF = C$, $BC, CF \subset \text{面}BCF$.

$\therefore \text{面}BCF \parallel \text{面}ABCD$.

又 $\because BF \subset \text{面}BCF$,

$\therefore BF \parallel \text{面}ADE$.

(2) $\because CD \perp AD$, $CD \perp DE$,

$\therefore \angle ADE$ 即为二面角 $A-CD-F$ 的平面角,

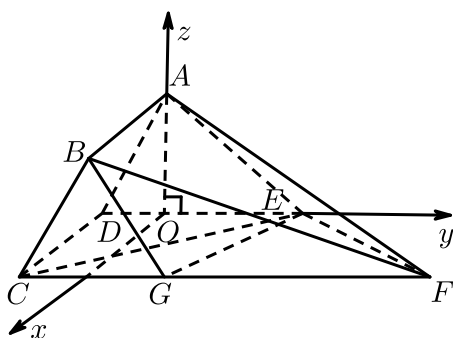
$\therefore \angle ADE = 60^\circ$.

$\because CD \perp DF$ 且 $\text{面}CDEF \cap \text{面}ADE = DE$,

$\therefore \text{面}ADE \perp \text{面}CDEF$.

过 A 作 $AO \perp DE$,

以 O 为原点,建立如图空间直角坐标系,



$AD = 1$, $DO = AD \cos 60^\circ = 1$, $AO = AD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, $DE = 3$, $OE = 2$,

$\therefore A(0, 0, \sqrt{3})$, $B(3, 0, \sqrt{3})$, $E(0, 2, 0)$,

设 $G(3, t, 0) (-1 \leq t \leq 5)$,

$\therefore \vec{BE} = (-3, 2, -\sqrt{3})$, $\vec{BG} = (0, t, -\sqrt{3})$,

设面 BEG 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BG} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -3x_1 + 2y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ ty_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $y = 3$, 则 $z = \sqrt{3}t$, $x = 2 - t$,

$\therefore \vec{m} = (2 - t, 3, \sqrt{3}t)$.

设面 DEG 的法向量 $\vec{n}$, 易知 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

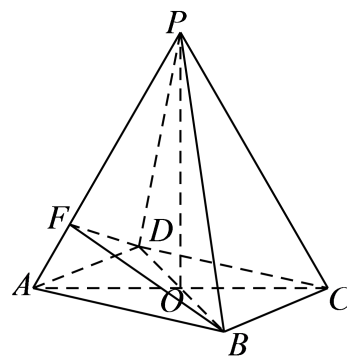
$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2 - 4t + 13}} = \frac{1}{4},$$

解得 $t = \frac{1}{2}$,

$$\therefore GC = \frac{3}{2}, GF = \frac{9}{2}.$$

$\therefore G$ 为 CF 四等分点且靠近 C .

- 9 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$, $\triangle PAC$ 是边长为2的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$, $AP = 4AF$.



- (1) 求证: $PO \perp$ 底面 $ABCD$.
- (2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小.
- (3) 在线段 PB 上是否存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF ? 如果存在, 求 $\frac{BM}{BP}$ 的值, 如果不存在, 请说明理由.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 30° .

(3) 存在, 此时 $\frac{BM}{BP} = \frac{1}{3}$.

解析

(1) 因为底面 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 为 AC, BD 中点.

又因为 $PA = PC, PB = PD$,

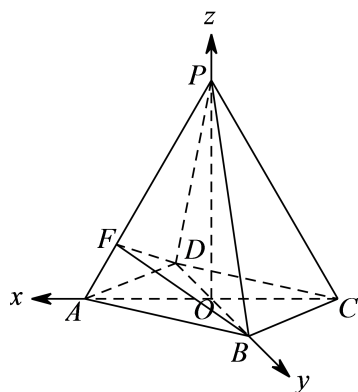
所以 $PO \perp AC, PO \perp BD$,

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

(2) 由底面 $ABCD$ 是菱形可得 $AC \perp BD$,

又由 (I) 可知 $PO \perp AC, PO \perp BD$.

如图, 以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由 $\triangle PAC$ 是边长为2的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$,

可得 $PO = \sqrt{3}, OB = OD = \sqrt{3}$.

所以 $A(1, 0, 0), C(-1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{CP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$.

由已知可得 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $z = -\sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (1, 0, -\sqrt{3})$.

因为 $\cos \langle \overrightarrow{CP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小为 30° .

(3) 设 $\frac{BM}{BP} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \lambda \overrightarrow{BP} = (1, \sqrt{3}(1 - \lambda), \sqrt{3}\lambda)$.

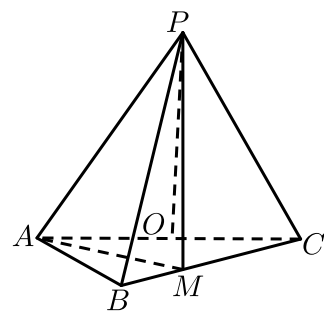
若使 $CM \parallel$ 平面 BDF , 需且仅需 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$ 且 $CM \not\subset$ 平面 BDF ,

解得 $\lambda = \frac{1}{3} \in [0, 1]$,

所以在线段 PB 上存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF .

此时 $\frac{BM}{BP} = \frac{1}{3}$.

10 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.



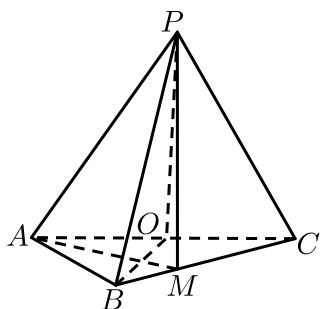
- (1) 证明： $PO \perp$ 平面 ABC .
- (2) 若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M - PA - C$ 为 30° ，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

解析

- (1) 连接 BO ,



$\because AB = BC = 2\sqrt{2}$, O 是 AC 的中点 ,

$\therefore BO \perp AC$ 且 $BO = 2$,

又 $PA = PB = PC = AC = 4$,

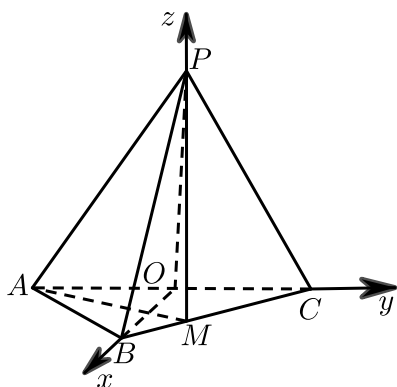
$\therefore PO \perp AC$, $PO = 2\sqrt{3}$,

则 $PB^2 = PO^2 + BO^2$, 则 $PO \perp OB$,

$\because OB \cap AC = O$,

$\therefore PO \perp$ 平面 ABC .

- (2) 建立以 O 为坐标原点 , OB , OC , OP 分别为 x , y , z 轴的空间直角坐标系 ,
- 如图 :



$$A(0, -2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3}), C(0, 2, 0), B(2, 0, 0), \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{BA} = (-2, -2, 0),$$

$$\text{设 } \overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC} = (-2\lambda, 2\lambda, 0), 0 < \lambda < 1,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = (-2\lambda, 2\lambda, 0) - (-2, -2, 0)$$

$$= (2 - 2\lambda, 2\lambda + 2, 0),$$

$$\text{平面 } PAC \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (1, 0, 0),$$

$$\text{设平面 } MPA \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\overrightarrow{PA} = (0, -2, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{AM} = (2 - 2\lambda, 2\lambda + 2, 0),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = -2y - 2\sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = (2 - 2\lambda)x + (2\lambda + 2)y = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z = 1, \text{ 则 } y = -\sqrt{3}, x = \frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda},$$

$$\text{即 } \vec{n} = \left(\frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda}, -\sqrt{3}, 1 \right),$$

$$\because \text{二面角 } M - PA - C \text{ 为 } 30^\circ,$$

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{\sqrt{3}(\lambda + 1)}{1 - \lambda}}{\sqrt{\left(\frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda} \cdot \sqrt{3} \right)^2 + 3 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda = 3 \text{ (舍)},$$

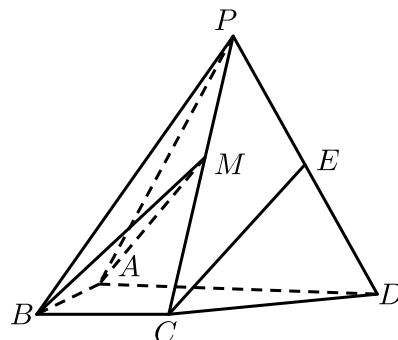
$$\text{则平面 } MPA \text{ 的法向量 } \vec{n} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PC} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$$

$$\text{设 } PC \text{ 与平面 } PAM \text{ 所成角为 } \theta,$$

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{PC}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{16} \times \sqrt{16}} = \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$ ， $AB=BC=\frac{1}{2}AD$ ， $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。



- (1) 证明：直线 $CE \parallel$ 平面 PAB 。
- (2) 点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° ，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值。

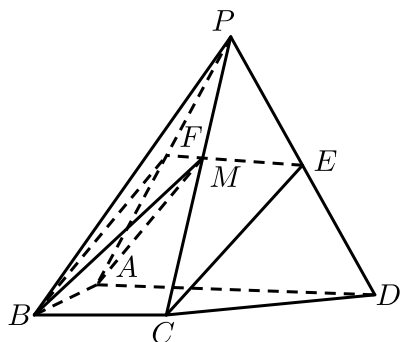
答案

(1) 证明见解析。

(2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

解析

(1) 作点 F 为 PA 的中点，



连接 BF 、 EF ，

$\because E$ 、 F 是 PD 、 PA 的中点，

$\therefore EF \parallel AD$ 且 $EF = \frac{1}{2}AD$ ，

$\because AB = BC = \frac{1}{2}AD$ ，

$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore BC \parallel AD$ 且 $BC = \frac{1}{2}AD$ ，

$\therefore BC \parallel EF$ 且 $BC = EF$ ，

$\therefore$ 四边形 $BFEC$ 是平行四边形，

$\therefore CE \parallel BF$ ，

又 $\because BF \subset \text{平面}PAB$,

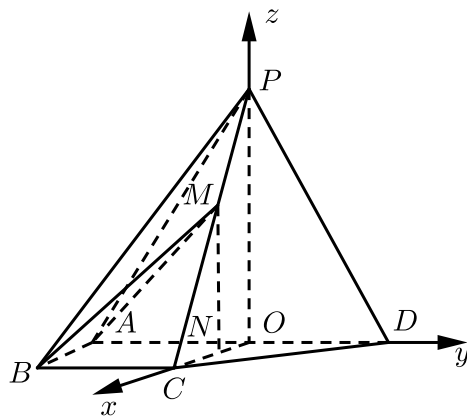
$CE \not\subset \text{平面}PAB$,

$\therefore CE // \text{平面}PAB$.

(2) 取 AD 中点 O , 连接 PO , CO ,

由于 $\triangle PAD$ 是正三角形,

$\therefore PO \perp AD$,



又 $\because \text{平面}PAD \perp \text{平面}ABCD$,

$\text{平面}PAD \cap \text{平面}ABCD = AD$,

$\therefore PO \perp \text{平面}ABCD$,

故以 O 为原点, OC , OD , OP 为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,

设 $AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$,

则 $OA = OD = AB = CO = 1$,

又 $\because \triangle POC$ 为直角三角形,

$$|OC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|OP|,$$

$\therefore \angle PCO = 60^\circ$,

作 $MN \perp CO$, 垂足为 N ,

$\therefore MN \perp \text{平面}ABCD$,

设 $CN = t$, 则 $MN = \sqrt{3}t$, $BN = \sqrt{t^2 + 1}$,

易知 $\angle MBN$ 为 BN 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° ,

$$\therefore \sqrt{3}t = \sqrt{t^2 + 1},$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore ON = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, MN = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$\therefore A(0, -1, 0)$, $B(1, -1, 0)$,

$$M\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), D(0, 1, 0),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AM} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

设平面 MAB 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a = 0 \\ b + \frac{\sqrt{6}}{2}c = 0 \end{cases},$$

$$\text{可取 } \vec{n} = (0, \sqrt{6}, -2),$$

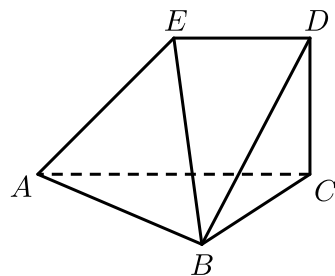
取平面 DAB 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-2}{\sqrt{10} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{10}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $M - AB - D$ 是锐角,

$\therefore$ 二面角 $M - AB - D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

12 如图, $AC = 2ED$, $AC \parallel$ 平面 EDB , $AC \perp$ 平面 BCD , 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC .



- (1) 求证: $AC \parallel ED$.
- (2) 求证: $DC \perp BC$.
- (3) 当 $BC = CD = DE = 1$ 时, 求二面角 $A - BE - D$ 的余弦值.
- (4) 在棱 AB 上是否存在点 P 满足 $EP \parallel$ 平面 BDC .
- (5) 设 $\frac{CD}{CE} = k$, 是否存在 k 满足平面 $ABE \perp$ 平面 CBE ? 若存在求出 k 值, 若不存在说明理由.

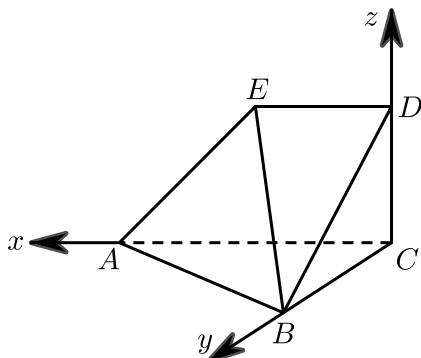
答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (4) 答案见解析.
- (5) 答案见解析.

解析

- (1) 因为 $AC \parallel$ 平面 EDB , 平面 $ACDE \cap$ 平面 $EDB = ED$, 且 $AC \not\subset$ 平面 EDB ,
所以 $AC \parallel ED$.

(2)



法1: 因为 $AC \perp$ 平面 BCD , 所以 $AC \perp CD$,

因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC , 且平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$, $CD \subset$ 平面 $ACDE$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABC ,

所以 $CD \perp CB$.

法2: 因为 $AC \perp$ 平面 BCD , 所以 $AC \perp CD$, $AC \perp CB$,

因为平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$,

所以 $\angle DCB$ 为二面角 $D - AC - B$ 的平面角 ,

又因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC ,

所以 $\angle DCB = 90^\circ$, 即 $CD \perp CB$.

- (3) 由 (2) 证明可知 $AC \perp CD$, $AC \perp CB$, $CD \perp CB$,

所以如图建立空间直角坐标系 , 因为 $BC = CD = DE = 1$,

所以 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$

所以 $\overrightarrow{DE} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AE} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$,

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \vec{m} = 0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot \vec{m} = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \vec{m} = (0, 1, 1) .$$

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x', y', z')$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \vec{n} = (1, 2, 1) .$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

由图可知 , 二面角 $A - BE - D$ 为钝角 , 故二面角 $A - BE - D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (4) 法1: 取 AC 中点 F , 连接 EF , 过点 F 作 $FP \parallel BC$ 交 AB 于点 P ,

所以 P 为 AB 中点 .

因为 $AC = 2ED$, $AC \parallel ED$, 所以 $ED \parallel FC$, 所以 $EF \parallel CD$.

所以平面 $EFP \parallel$ 平面 BCD ,

所以 $EP \parallel$ 平面 BCD .

法2: 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP} = (1 - 2\lambda, \lambda, -1)$,

由 (2) 证明可知平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{k} = (1, 0, 0)$,

由 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{k} = 0$ 可得 $\lambda = \frac{1}{2}$,

所以当 P 为 AB 中点时, AP 与平面 BCD 成角为 0° ,

所以当 P 为 AB 中点时, $AP \parallel$ 平面 BCD .

(5) 设 $AC = 2a$, 则 $A(2a, 0, 0)$, $E(a, 0, ka)$, $B(0, b, 0)$ 则

$\overrightarrow{AE} = (-a, 0, ka)$, $\overrightarrow{AB} = (-2a, b, 0)$.

设平面 CBE 的法向量为 $\vec{m}' = (x_1, y_1, z_1)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{CE} \cdot \vec{m}' = 0, \\ \overrightarrow{CB} \cdot \vec{m}' = 0, \end{cases}$ 可得一个法向量 $\vec{m}' = (k, 0, -1)$,

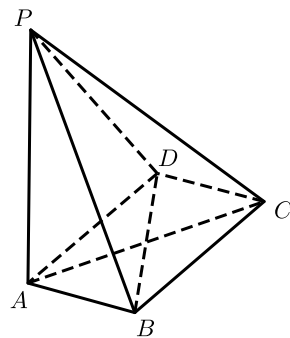
设平面 ABE 的法向量 $\vec{n}' = (x_2, y_2, z_2)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}' = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}' = 0, \end{cases}$ 可得一个法向量 $\vec{n}' = (k, \frac{2ak}{b}, 1)$,

由 $\vec{m}' \cdot \vec{n}' = 0$ 可得 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 平面 $ABE \perp$ 平面 CBE .

13 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $PA = AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$.



(1) 求证: $AB \parallel$ 平面 PCD .

(2) 求证: 直线 $BD \perp$ 平面 PAC .

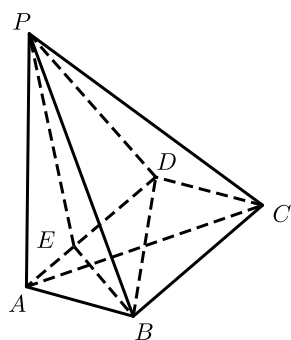
(3) 求直线 PB 与平面 PAD 所成角的正切值.

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .
 (3) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

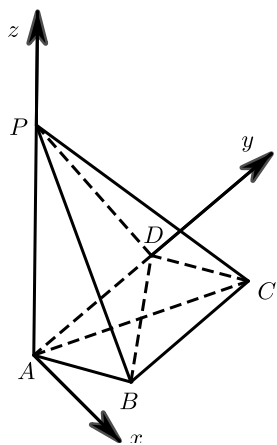
解析

- (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形 ,
 $\therefore AB \parallel CD$,
 又 $\because AB \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD ,
 $\therefore AB \parallel$ 平面 PCD .
 (2) $\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形 ,
 $\therefore AC \perp BD$,
 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore PA \perp BD$,
 又 $\because AC \cap PA = A$,
 $\therefore BD \perp$ 平面 PAC .
 (3) 方法一 : 过 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 连接 PE ,



- $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BE \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore PA \perp BE$,
 $\because BE \perp AD$, $PA \cap AD = A$,
 $\therefore BE \perp$ 平面 PAD , 可得 $\angle BPE$ 就是直线 PB 与平面 PAD 所成的角 ,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BPE$ 中 , $BE = \sqrt{3}$, $PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = \sqrt{5}$,
 $\therefore \tan \angle BPE = \frac{BE}{PE} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$,
 即 PB 与平面 PAD 所成角的正切值等于 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

方法二 : 以点 A 为坐标原点 , AD , AP 方向为 y 轴 , z 轴正方向 ,
 如图所示 , 在平面 $ABCD$ 内与 AD 垂直的方向为 x 轴正方向建立空间直角坐标系
 $A - xyz$,



则： $P(0,0,2)$ ， $B(\sqrt{3},1,0)$ ， $A(0,0,0)$ ， $D(0,2,0)$ ，

则直线 PB 的方向向量 $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}, 1, -2)$ ，

很明显平面 PAD 的法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$ ，

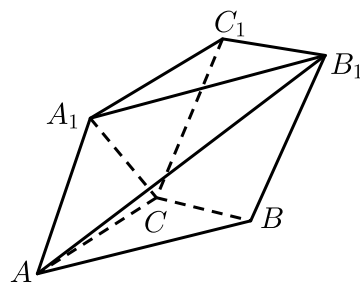
设直线 PB 与平面 PAD 所成角为 θ ，

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{PB}| \times |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8} \times 1} ,$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} ,$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} .$$

- 14 如图，已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC ， $AA_1 = AC$ ， $AC \perp BC$ 。



- (1) 证明： $A_1C \perp AB_1$ 。
- (2) 设 $AC = 2CB$ ， $\angle A_1AC = 60^\circ$ ，求二面角 $C_1 - AB_1 - B$ 的余弦值。

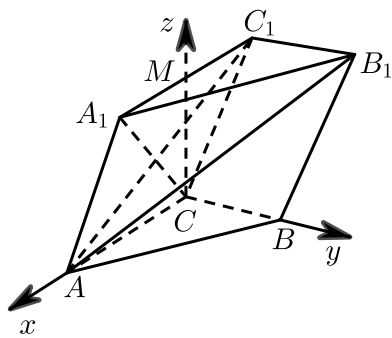
答案

(1) 证明见解析。

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

解析

(1) 连结 AC_1 。



$\because AA_1 = AC$, $\therefore$ 四边形 AA_1C_1C 为菱形 ,

$\therefore A_1C \perp AC_1$.

$\because$ 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC , 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$,

$BC \subset$ 平面 ABC , $BC \perp AC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 AA_1C_1C .

又 $\because BC // B_1C_1$,

$\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

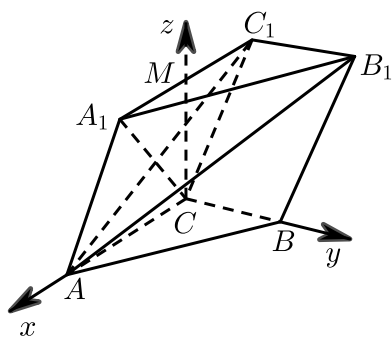
$\therefore B_1C_1 \perp AC$,

$\because AC_1 \cap B_1C_1 = C_1$,

$\therefore A_1C \perp$ 平面 AB_1C_1 , 而 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 ,

$\therefore A_1C \perp AB_1$.

(2) 取 A_1C_1 的中点为 M , 连结 CM .



$\because AA_1 = AC$, 四边形 AA_1C_1C 为菱形 , $\angle A_1AC = 60^\circ$,

$\therefore CM \perp A_1C_1$, $CM \perp AC$.

又 $\because CM \perp BC$, 以 C 为原点 , CA , CB , CM 为正方向建立空间直角坐标系 , 如图 .

设 $CB = 1$, $AC = 2CB = 2$, $AA_1 = AC$, $\angle A_1AC = 60^\circ$,

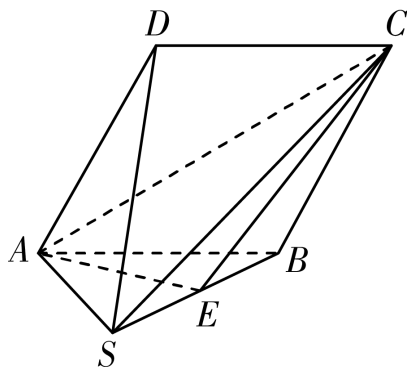
$\therefore C(0,0,0)$, $A_1(1,0,\sqrt{3})$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $B_1(-1,1,\sqrt{3})$.

由 (1) 知 , 平面 C_1AB_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA_1} = (1,0,\sqrt{3})$.

设平面 ABB_1 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\begin{aligned}
 &\text{则 } \vec{n} \perp \vec{AB}, \vec{n} \perp \vec{AB_1}, \\
 &\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB_1} = 0 \end{cases} \\
 &\therefore \vec{AB} = (-2, 1, 0), \vec{AB_1} = (-3, 1, \sqrt{3}), \\
 &\therefore \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -3x + y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \\
 &\text{令 } x = 1, \text{ 得 } y = 2, z = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ 即 } \vec{n} = \left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \\
 &\therefore \cos \langle \vec{CA_1}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{CA_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{CA_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{\frac{16}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\
 &\therefore \text{二面角 } C_1 - AB_1 - B \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

- 15 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中， $\triangle ABS$ 是正三角形，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E 是 BS 的中点。



- (1) 求证： $SD \parallel$ 平面 ACE 。
- (2) 若平面 $ABS \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，求直线 AC 与平面 ADS 所成角的正弦值。

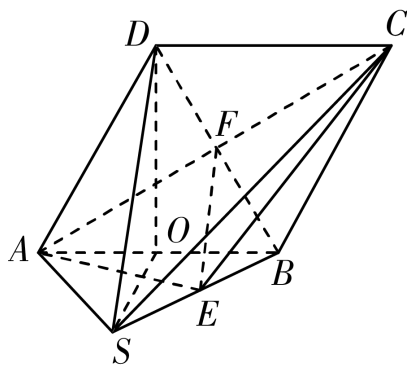
答案

- (1) 见解析
- (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解析

- (1) 证明：连接 BD ，设 $AC \cap BD = F$ ，连接 EF ，
 - $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
 - $\therefore$ 点 F 是 BD 的中点，
 - $\because$ 点 E 是 BS 的中点，
 - $\therefore EF$ 是 $\triangle BDS$ 的中位线，
 - $\therefore SD \parallel EF$ ，
 - $\because SD \not\subset$ 平面 ACE ， $EF \subset$ 平面 ACE ，

$\therefore SD \parallel \text{平面} ACE$.



(2) 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle ABC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AB = AD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是正三角形，

取 AB 的中点 O ，连接 SO ，则 $DO \perp AB$ ， $SO \perp AB$ ，

又平面 $ABS \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DO \subset$ 平面 $ABCD$ ，平面 $ABS \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ，

$\therefore DO \perp$ 平面 ABS ，

设 $AB = 2$ ，在等边 $\triangle ABD$ 中， $DO = BD \sin \angle ABD = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

以 O 为原点， OS 为 x 轴， OB 为 y 轴， OD 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$$A(0, -1, 0), C(0, 2, \sqrt{3}), D(0, 0, \sqrt{3}), S(\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 3, \sqrt{3}), \overrightarrow{AD} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{AS} = (\sqrt{3}, 1, 0),$$

设平面 ADS 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = y + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AS} = \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{得 } \vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 1),$$

设直线 AC 与平面 ADS 所成角为 θ ，

$$\text{则} \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore$ 直线 AC 与平面 ADS 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

