

王心恺第二周课后练习

1 若函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ 在区间 $(2, 3)$ 内有极值点，则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(2, 7)$

B. $(4, 12)$

C. $(-21, -8)$

D. $(-18, -4)$

答案 C

解析

$$\because \text{函数 } f(x) = x^3 - x^2 + ax ,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 2x + a ,$$

$$\text{设 } g(x) = 3x^2 - 2x + a , g(0) = a ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } (2, 3) \text{ 内有极值点 ,}$$

$$\therefore \text{二次函数 } g(x) = 3x^2 - 2x + a \text{ 在区间 } (2, 3) \text{ 内有零点 ,}$$

$$\therefore g(2)g(3) = (8 + a)(21 + a) < 0 ,$$

$$\therefore -21 < a < -8 ,$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } (-21, -8) .$$

故选 C .

2 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + x + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上有极值点，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2]$

C. $(-2, 2)$

D. $[-2, 2]$

$\cup [2, +\infty)$

答案 A

解析

$$\because \text{函数 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + x + 1 ,$$

$$\therefore f'(x) = x^2 + mx + 1 ,$$

$$\text{若函数 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + x + 1 \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上有极值点 ,}$$

$$\text{则 } f'(x) = x^2 + mx + 1 \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上有零点 ,}$$

$$\text{即方程 } x^2 + mx + 1 = 0 \text{ 有实数根 ,}$$

$$\therefore \Delta = m^2 - 4 \geq 0 , \text{ 解得 : } m \leq -2 \text{ 或 } m \geq 2 ,$$

当 $m = -2$ 或 2 时, $f(x)$ 的导函数等于零时值为 1 或 -1 ,

两边单调性相同,

所以 a 不能等于 -2 或 2 ,

综上, $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

故选 A.

3 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有极值点, 实数 a 的取值范围是 ().

A. $(0, 2)$

B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

C. $(0, 4)$

D. $(-4, 0) \cup (0, 4)$

答案 C

解析

$\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$,

$\therefore f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x}$,

又 $\because f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有极值点,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $\frac{x^2 - a}{x} = 0$, 即 $x^2 - a = 0$,

$\therefore x^2 - a = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有实数解,

$\therefore 0 < a < 4$,

即 a 的取值范围是 $(0, 4)$,

故答案选 C.

4 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3ax - 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有且仅有一个极值点, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $a \geq -\frac{3}{4}$

B. $a < -\frac{5}{3}$

C. $-\frac{5}{3} < a < -\frac{3}{4}$

D. $-\frac{5}{3} \leq a \leq -\frac{3}{4}$

答案 C

解析

若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有且仅有一个极值点,

则 $f'(x) = x^2 + 4x + 3a$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有且仅有一个根,

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(1) < 0$, 即 $\left(\frac{9}{4} + 3a\right)(5 + 3a) < 0$,

解得 $-\frac{5}{3} < a < -\frac{3}{4}$.

故选：C .

5 若函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ 在 $(0, 1)$ 内有极小值，则实数 a 的取值范围为 () .

- A. $(-1, 1)$. B. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. C. $(0, \frac{1}{3})$. D. $(0, \frac{1}{2})$.

答案 D

解析 函数的导数为 $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$. 由 $f'(x) = 0$,

解得 $x = 0$ 或 $x = 2a$.

若 $a = 0$, 则 $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, 此时函数递增，无极值 . 所以 $a \neq 0$

若 $a > 0$, 则 $2a > 0$. 此时函数在 $x = 2a$ 处取得极小值，由 $0 < 2a < 1$,

解得 $0 < a < \frac{1}{2}$ 若 $a < 0$, 则 $2a < 0$, 此时函数在 $x = 0$ 处取得极小值，

所以此时不满足条件 .

综上所述：实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2})$, 故答案选 D .

6 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$, $f'(x)$ 为其导函数，若 $(x-2)f'(x) + f(x) = \frac{1-x}{e^x}$ 且 $f(0) = 0$, 则

$f(x) < 0$ 的解集为 () .

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(0, 2)$

答案 D

解析 设 $g(x) = (x-2)f(x)$, $x < 2$, 则 $g'(x) = f(x) + (x-2)f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $x < 1$, 令 $g'(x) < 0$ 得 $1 < x < 2$,

故函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$,

单调递减区间为 $(1, 2)$,

$\because f(0) = 0$, $\therefore g(0) = g(2) = 0$,

不等式 $f(x) < 0$ 等价于 $g(x) > 0$, 故 $f(x) < 0$ 的解集为 $(0, 2)$.

故选 D .

7 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，函数 $y = f(x)$ 的导数都存在，若 $f(x) + f'(x) > 0$ 恒成立，且 $a > 0$ ，则下列结论正确的是（ ）。

- A. $f(a) < f(0)$ B. $f(a) > f(0)$ C. $e^a \cdot f(a) < f(0)$ D. $e^a \cdot f(a) > f(0)$

答案 D

解析 令 $g(x) = e^x \cdot f(x)$ ，则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] > 0$ ，
所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，
因为 $a > 0$ ，所以 $g(a) > g(0)$ ，即 $e^a \cdot f(a) > f(0)$ 。

8 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若对于任意实数 x 有 $f'(x) + f(x) > 0$ ，且 $f(0) = 1$ ，则不等式 $e^x f(x) > 1$ 的解集为（ ）。

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, e)$ D. $(e, +\infty)$

答案 B

解析 构造函数 $g(x) = e^x f(x)$ ，
则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] > 0$ ，
所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。
又 $f(0) = 1$ ，
所以 $g(0) = e^0 \cdot f(0) = 1$ ，
故 $e^x f(x) > 1$ ，
即 $g(x) > g(0)$ 的解集为 $(0, +\infty)$ 。
故选 B。

9 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f'(x)(x \ln x^2) > 2f(x)$ ，则（ ）。

- A. $6f(e) > 2f(e^3) > 3f(e^2)$ B. $6f(e) < 3f(e^2) < 2f(e^3)$
C. $6f(e) > 3f(e^2) > 2f(e^3)$ D. $6f(e) < 2f(e^3) < 3f(e^2)$

答案 B

解析 令 $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x \ln x^2) - 2f(x)}{x(\ln x^2)^2} > 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增,

故 $g(e) < g(e^2) < g(e^3)$,

故 $6f(e) < 3f(e^2) < 2f(e^3)$.

故选 B.

10 已知 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(2) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > \frac{2}{x}f(x)$, 则不等式 $(x-1)f(x) < 0$ 的解集为 ().

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (1, 2)$

答案 D

解析 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) > 2f(x) \Rightarrow xf'(x) - 2f(x) > 0$,

$$\left[\frac{f(x)}{x^2} \right]' = \frac{f'(x) \cdot x^2 - f(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} > 0,$$

令 $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $f(x)$ 为奇函数,

$\therefore h(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增且 $(+\infty, 0)$ 上单调递增,

当 $x < 0$ 时, $(x-1)f(x) < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} > \frac{f(-2)}{(-2)^2} \Rightarrow x > -2$,

综上: $(x-1)f(x) < 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (1, 2)$.

故选: D.

11 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - mx$ (e 为自然对数的底数), 若 $f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, 2)$ B. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right)$ C. $(-\infty, e)$ D. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

答案 B

解析

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - mx > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore m < \frac{e^x}{x^2},$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{e^x}{x^2}, h'(x) = \frac{e^x x^2 - 2e^x x}{x^4} = \frac{xe^x - 2e^x}{x^3} = 0, x = 2,$$

$\therefore x \in (0, 2)$ 时, $h(x)$ 单调递减,

$x \in (2, +\infty)$ 时, $h(x)$ 单调递增,

$$\therefore h(x)_{\min} = h(2) = \frac{e^2}{4},$$

$$\therefore m < \frac{e^2}{4}.$$

故选B.

- 12 已知 $f(x) = x^3 + 3x^2 + a$ (a 为常数) 在 $[-3, 3]$ 上有最小值3, 那么 $[-3, 3]$ 上 $f(x)$ 的最大值是 _____.

答案

57

解析

$$f'(x) = 3x^2 + 6x, \text{ 令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{得 } 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2,$$

(i) 当 $0 \leq x \leq 3$, 或 $-3 \leq x \leq -2$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增,

(ii) 当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 由最小值为3知,

$$\text{最小为 } f(-3) \text{ 或 } f(0) \Rightarrow f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 + a = a,$$

$$f(0) = a, \text{ 则 } a = 3,$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + 3, \text{ 其最大值为 } f(-2) \text{ 或 } f(3),$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 3 = 7,$$

$$f(3) = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 = 57, \text{ 则最大值为 } 57.$$

故答案为57.

- 13 当 $x \in [-2, 1]$ 时, 不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-5, -3]$

B. $\left[-6, -\frac{9}{8}\right]$

C. $[-6, -2]$

D. $[-4, -3]$

答案 C

解析

方法一：令 $t = \frac{1}{x}$ ， $x \in (0, 1]$ 时，

得 $a \geq -3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} = -3t^3 - 4t^2 + t$ ， $t \in [1, +\infty)$ 。

令 $g(t) = -3t^3 - 4t^2 + t$ ， $t \in [1, +\infty)$ ，

则 $g'(t) = -9t^2 - 8t + 1 = -(t+1)(9t-1)$ ，

显然在 $t \in [1, +\infty)$ 时， $g'(t) < 0$ ，

所以 $g(t)$ 的最大值为 $g(1) = -6$ ，因此 $a \geq -6$ 。

同理 $x \in [-2, 0)$ 时，得 $a \leq -3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} = -3t^3 - 4t^2 + t$ ，

$t \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ ， $g'(t) = -9t^2 - 8t + 1 = -(t+1)(9t-1)$ ，

$t < -1$ 时， $g'(t) < 0$ ， $g(t)$ 单调递减； $-1 < x < -\frac{1}{2}$ 时， $g(t)$ 单调递增，

则 $t = -1$ 时， $g(t)$ 的最小值为 $g(-1) = -2$ ，因此 $a \leq -2$ 。

$x = 0$ 时，显然不等式恒成立。

综上得： $-6 \leq a \leq -2$ ，故答案为 C。

方法二：当 $x = 0$ 时， $3 \geq 0$ 恒成立，即 $a \in \mathbf{R}$ 。

当 $x \in (0, 1]$ 时， $ax^3 \geq x^2 - 4x - 3$ ， $a \geq \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$ ，

$\therefore a \geq \left[\frac{x^2 - 4x - 3}{x^3} \right]_{\max}$ ，

设 $\varphi(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$ ，

则 $\varphi'(x) = \frac{(2x-4)x^3 - (x^2-4x-3)3x^2}{x^6}$

$= -\frac{x^2 - 8x - 9}{x^4}$

$= -\frac{(x-9)(x+1)}{x^4} > 0$ ，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, 1]$ 上递增， $\varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = -6$ ，

$\therefore a \geq -6$ 。

当 $x \in [-2, 0)$ 时， $a \leq \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$ 。

$\therefore a \leq \left[\frac{x^2 - 4x - 3}{x^3} \right]_{\min}$ 。

仍设 $\varphi(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$ ，

则 $\varphi'(x) = -\frac{(x-9)(x+1)}{x^4}$ ，

当 $x \in [-2, -1]$ 时， $\varphi'(x) < 0$ ，当 $x \in (-1, 0)$ 时， $\varphi'(x) > 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时， $\varphi(x)$ 有极小值，也是最小值，

$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(-1) = \frac{1+4-3}{-1} = -2$ ，

$$\therefore a \leq -2.$$

综上, $-6 \leq a \leq -2$.

14 已知 $a \leq \frac{1-x}{x} + \ln x$ 对于任意 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 恒成立, 则 a 的最大值为 _____.

答案 0

解析 设 $g(x) = \frac{1-x}{x} + \ln x$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 依题意 $a \leq g(x)_{\min}$,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,$$

$\therefore g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, $[1, 2]$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 0, \text{ 即 } a \leq 0,$$

$\therefore a$ 的最大值为 0.

故答案为 0.

15 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (1+a)x + \ln x$ ($a \geq 0$), 讨论 $f(x)$ 的单调性.

答案 ① 当 $a = 0$ 时, 单增区间 $(0, 1)$, 单减区间 $(1, +\infty)$;

② 当 $0 < a < 1$ 时, 单增区间 $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 单减区间 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$;

③ 当 $a = 1$ 时, 单增区间 $(0, +\infty)$;

④ 当 $a > 1$ 时, 单增区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, $(1, +\infty)$, 单减区间 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$.

16 已知函数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

答案 (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 没有单调递减区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, a)$, 单调递增区间是 $(a, +\infty)$;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, -\frac{a}{2})$, 单调递增区间是 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$.

(2) $[-2e^{\frac{3}{4}}, 1]$

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - ax - a^2}{x} = \frac{(x-a)(2x+a)}{x}.$$

由 $f'(x) = 0$, 可得 $x = a$ 或 $x = -\frac{a}{2}$,

当 $a = 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 没有单调递减区间;

当 $a > 0$ 时, $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, a)$, 单调递增区间是 $(a, +\infty)$.

当 $a < 0$ 时, $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, -\frac{a}{2})$	$-\frac{a}{2}$	$(-\frac{a}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, -\frac{a}{2})$, 单调递增区间是 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$.

(2) 由 (1) 知, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 符合题意.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, a)$, 单调递增区间是 $(a, +\infty)$,

所以 $f(x) \geq 0$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min} \geq 0$, 即 $f(a) \geq 0$,

所以 $a^2 - a^2 - a^2 \ln a \geq 0$, 所以 $0 < a \leq 1$.

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, -\frac{a}{2})$, 单调递增区间是 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$,

所以 $f(x) \geq 0$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min} \geq 0$, 即 $f(-\frac{a}{2}) \geq 0$.

所以 $\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - a^2 \ln(-\frac{a}{2}) \geq 0$, 所以 $-2e^{\frac{3}{4}} \leq a < 0$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-2e^{\frac{3}{4}}, 1]$.