数列分组求和

1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2,n为奇数\\2a_n,n为偶数\end{cases}$，且$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$，$a_2=2$．

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和S_{2n}．

(3) 设$c_n=a_{2n-1}a_{2n}+(-1)^n$，证明：$\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}<\dfrac{5}{4}$．

答案 (1) $a_n=\begin{cases}n,n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$．

(2) $S_{2n}=(n-1)\cdot2^{n+3}+8$．

(3) 证明见解析．

解析 (1) 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2,n为奇数\\2a_n,n为偶数\end{cases}$，$a_1=1$，$a_2=2$．

$\therefore$当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=2$，此时数列$\{a_{2k-1}\}$$(k\in\mathbf{N}^*)$成等差数列，公差为2，首项为1，$a_n=a_{2k-1}=1+2(k-1)=2k-1=n$．

当n为偶数时，$a_{n+2}=2a_n$，此时数列$\{a_{2k}\}$$(k\in\mathbf{N}^*)$成等比数列，公比为2，首项为2，

$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$．

$\therefore a_n=\begin{cases}n,n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$．

(2) $\because b_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore b_{2n-1}+b_{2n}=a_{2n-1}a_{2n}+a_{2n}a_{2n+1}=(2n+1+2n-1)2^n=4n\cdot2^n$．

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前$2n$项和

$S_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})=4(2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n)$，

令$A_n=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$，

$2A_n=2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，

$\therefore -A_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$

$=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot2^{n+1}$

$=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，

$\therefore A_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$．

$\therefore S_{2n}=(n-1)\cdot2^{n+3}+8$．

(3) $c_n=a_{2n-1}a_{2n}+(-1)^n=(2n-1)\cdot 2^n+(-1)^n$.

$\therefore\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{c_{2k-1}}=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n-1}<\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$ ，$(n\geqslant 5)$.

$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{c_{2k}}=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n+1}<\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}(n\geqslant 4)$.

$\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}<1+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{39}+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots<1+\dfrac{1}{13}$
$+\dfrac{1}{39}+\dfrac{1}{7}<\dfrac{5}{4}$

.

2 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}+2$.

(1) 证明：$\left\{\dfrac{a_n+1}{3^n}\right\}$为等差数列 .

(2) 求$\{a_n\}$的通项公式 .

(3) 求$\{a_n\}$的前n项的和S_n .

答案 (1) 证明见解析 .

(2) $a_n=n\cdot 3^n-1$.

(3) $S_n=\dfrac{2n-1}{4}3^{n+1}+\dfrac{3}{4}-n$.

解析 (1) $a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}+2$ ，

$\dfrac{a_{n+1}+1}{3^{n+1}}=\dfrac{3a_n+3^{n+1}+3}{3^{n+1}}$

$=\dfrac{a_n+1}{3^n}+1$ ，

$\therefore\left\{\dfrac{a_n+1}{3^n}\right\}$为首项是1，公差为1的等差数列 .

(2) $\dfrac{a_n+1}{3^n}=n$ ，

$a_n=n\cdot 3^n-1$.

(3) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=3^1-1+2\cdot 3^2-1\cdots+n\cdot 3^n-1$

$=3^1+2\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^n-n$ ，

令$T_n=3^1+2\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^n$

$3T_n=3^2+2\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n+1}$ ，

$-2T_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\left(\frac{1}{2}-n\right)3^{n+1}-\frac{3}{2}$，

$\therefore T_n=\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}$，

$\therefore S_n=\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}-n$．

3 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足，$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1) 求a_n与b_n．

(2) 记数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，且$c_n=\begin{cases}\frac{1}{b_nb_{n+2}},n为奇数,\\-\frac{1}{a_n},n为偶数,\end{cases}$若对$n\in\mathbf{N}^*$，$T_{2n}\geqslant T_{2k}$恒成立，求正整数$k$的值．

答案 (1) $a_n=2^n$，$b_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $k=1$．

解析 (1) 由$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

即$\{a_n\}$是以2为首项，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^n$．

又$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$①，

$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_{n-1}(n\geqslant2)$②．

①−②式得$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，

得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}(n\geqslant2)$．

$\vdots$

$\frac{b_3}{b_2}=\frac{3}{2}$．

以上式子累乘得$\frac{b_{n+1}}{b_2}=\frac{n+1}{2}(n\geqslant2)$，

$\therefore b_{n+1}=\frac{n+1}{2}\cdot b_2(n\geqslant2)$，

又$\because b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

$\therefore$当$n=1$时，$b_1=b_2-1$，

又$\because b_1=1$，

$\therefore b_2 = b_1 + 1 = b_2$,

$\therefore b_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} \times 2 = n + 1 (n \geqslant 2)$,

$\therefore b_n = n (n \geqslant 3)$,

又$\because b_1 = 1$, $b_2 = 2$,

$\therefore b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) ①$T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{2n-1} + c_{2n}$

$= \dfrac{1}{b_1 b_3} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{b_3 b_5} - \dfrac{1}{a_4} + \cdots + \dfrac{1}{b_{2n-1} b_{2n+1}} - \dfrac{1}{a_{2n}}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{2n}}\right)$

$= \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} - \dfrac{1}{4n+2} + \dfrac{1}{6}$.

②当$n \geqslant 2$时，

$\because T_{2n} - T_{2n-2}$

$= \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} - \dfrac{1}{4n+2} + \dfrac{1}{6} - \left[\dfrac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} - \dfrac{1}{4n-2} + \dfrac{1}{6}\right]$

$= \dfrac{1}{4n^2 - 1} - \dfrac{1}{4^n} > 0$,

$\therefore T_2$最小，

$\therefore k = 1$.

4 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n = n^2\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{3} - \sin^2\dfrac{n\pi}{3}\right)$，前$n$项和为$S_n$ ，求S_{30} .

答案 470 .

解析 由已知可得$a_n = n^2 \cos\dfrac{2n\pi}{3}$ ，则$a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} =$
$(3k-2)^2 \cos\dfrac{2(3k-2)\pi}{3} + (3k-1)^2 \cdot \cos\dfrac{2(3k-1)\pi}{3} + (3k)^2 \cos\dfrac{2 \times 3k\pi}{3} =$
$-\dfrac{1}{2}(3k-2)^2 - \dfrac{1}{2}(3k-1)^2 + (3k)^2 = 9k - \dfrac{5}{2}$ ，所以$S_{30} = 9 \times (1 + 2 + \cdots + 10) - 10 \times \dfrac{5}{2} = 470$
.

5 已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n = n(n+1)$ ，记$T_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n$ ，求T_n .

答案

$$T_n=\begin{cases}-\dfrac{n^2+2n+1}{2}(n\text{为奇数})\\ \dfrac{n^2+2n}{2}(n\text{为偶数})\end{cases}.$$

解析 ①当n为偶数时：

$T_n=-(1\times2)+(2\times3)-(3\times4)+\cdots+n(n+1)$

$=2\times(-1+3)+4(-3+5)+\cdots+n[-(n-1)+(n+1)]$

$=2\times2+4\times2+6\times2+\cdots+n\times2$

$=2\times(2+4+6+\cdots+n)$

$=2\times\dfrac{(2+n)\cdot\dfrac{n}{2}}{2}$

$=\dfrac{n^2+2n}{2}$.

②当n为奇数时：

$T_n=-(1\times2)+(2\times3)-(3\times4)+\cdots-n(n+1)$

$=2\times(-1+3)+4(-3+5)+\cdots+(n-1)[-(n-2)+n]-n(n+1)$

$=2\times2+4\times2+6\times2+\cdots+(n-1)\times2-n(n+1)$

$=2\times\dfrac{(2+n-1)\cdot\dfrac{n-1}{2}}{2}-n(n+1)$

$=-\dfrac{n^2+2n+1}{2}$.

综上：$T_n=\begin{cases}-\dfrac{n^2+2n+1}{2}(n\text{为奇数})\\ \dfrac{n^2+2n}{2}(n\text{为偶数})\end{cases}$.

6 已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，其中，$a_n=\dfrac{1}{2(1+2+3+\cdots+n)}$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式.

(2) 是否存在自然数m，使得对于任意$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，有$1+\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{m-8}{4}$恒成立？若存在，求出$m$的最小值.

(3) 若数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}\frac{1}{na_n},n\text{为奇数}\\ b_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

答案 (1) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$b_n=2^n$.

(2) 存在，最小值为16.

(3) $T_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+4n+3}{4}+\dfrac{4}{3}\left(2^{n-1}-1\right),n为奇数\\ \dfrac{n^2+2n}{4}+\dfrac{4}{3}(2^n-1),n为偶数\end{cases}$.

解析

(1) $\because$数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，其中，$a_n=\dfrac{1}{2(1+2+3\cdots+n)}$，

$\therefore a_n=\dfrac{1}{2\times\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

$\because$数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

$\therefore b_n=2^n$.

(2) 设$f(n)=1+\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}$，

则$f(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

$=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^n}$，

$f(n+1)-f(n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}>0$，

$\because f(n)$在$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$时单调递增，

$\therefore f(n)<2$，

$\because$存在自然数m，使得对于任意$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，有$1+\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{m-8}{4}$恒成立，

$\therefore\dfrac{m-8}{4}\geqslant 2$，$m\geqslant 16$，

解得m的最小值为16 .

(3) $\because$数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}\frac{1}{na_n},n为奇数\\ b_n,n为偶数\end{cases}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}n+1,n为奇数\\ 2^n,n为偶数\end{cases}$，

当n为奇数时，$T_n=\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{3a_3}+\cdots\dfrac{1}{na_n}\right)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})$

$=[2+4+\ldots+(n+1)]+\left(2^2+2^4+\cdots+2^{n-1}\right)$

$=\dfrac{2+n+1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{4\left(1-4^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1-4}$

$=\dfrac{n^2+4n+3}{4}+\dfrac{4}{3}\left(2^{n-1}-1\right)$，

当n为偶数时，$T_n=\left[\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{3a_3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)a_{n-1}}\right]+(b_2+b_4+\cdots+b_n)$

$=(2+4+\ldots+n)+\left(2^2+2^4+\ldots+2^n\right)$

$=\dfrac{2+n}{2}\cdot\dfrac{n}{2}+\dfrac{4\left(1-4^{\frac{n}{2}}\right)}{1-4}=\dfrac{n^2+2n}{4}+\dfrac{4}{3}(2^n-1)$，

因此$T_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+4n+3}{4}+\dfrac{4}{3}\left(2^{n-1}-1\right),n为奇数\\ \dfrac{n^2+2n}{4}+\dfrac{4}{3}(2^n-1),n为偶数\end{cases}$.

7 已知数列$\{a_n\}$满足$2a_1+4a_2+8a_3+\cdots+2^na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求a_n.

(2) 设$b_n=(-2)^{a_n}+(-1)^n\dfrac{2a_n+1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

答案 (1) $a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $S_n=\dfrac{(-2)^{n+1}-2}{3}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析 (1) 设$c_n=2^n\cdot a_n$，$\{c_n\}$的前n项和为T_n，

由题可知$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$，

当$n=1$时，$T_1=c_1=2$，

当$n\geqslant 2$时，

$c_n=T_n-T_{n-1}=(n-1)\times 2^{n+1}-(n-2)\times 2^n=n\cdot 2^n$.

当$n=1$时，c_1也符合上式，因此$c_n=n\cdot 2^n$，

$a_n=\dfrac{c_n}{2^n}=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $b_n=(-2)^{a_n}+(-1)^n\cdot\dfrac{2a_n+1}{a_na_{n+1}}=(-2)^n+(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$=(-2)^n+(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$.

$\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=[(-2)^1+(-2)^2+\cdots+(-2)^n]+\left[-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$，

设$A=(-2)^1+(-2)^2+\cdots+(-2)^n$，

则$A=\dfrac{-2(1-(-2)^n)}{1-(-2)}=\dfrac{-2+(-2)^{n+1}}{3}$，

设$B=-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$，

当$n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$时，

$B=-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots-\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$

$=-1+\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{-n}{n+1}$.

当$n=2k-1$，$k\in\mathbf{N}^*$时，

$B=-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$=-1-\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{n+2}{n+1}$.

$\therefore B=-1+\dfrac{1}{n+1}\cdot(-1)^n$.

$\therefore$前n项和$S_n=A+B=\dfrac{(-2)^{n+1}-2}{3}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

8 已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 记$\{b_n\}$的前n项和为$T_n(n\in N^*)$，求$\{T_n\}$的前n项和Q_n .

(3) 对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, n\text{为奇数},\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, n\text{为偶数},\end{cases}$

求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和S_{2n} .

答案 (1) $a_n=n$；$b_n=2^{n-1}$.

(2) $2^{n+1}-n-2$.

(3) $\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times4^n}-\dfrac{4}{9}$.

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由$a_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，则$1+4d=5d$，可得$d=1$，

$\therefore a_n=1+n-1=n$，

$\because b_1=1$，$b_5=4(b_4-b_3)$，

$\therefore q^4=4(q^3-q^2)$，

解得$q=2$，

$\therefore b_n=2^{n-1}$.

(2) $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+2+\cdots+2^{n-1}$

$=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}$

$=2^n-1$，

$\therefore Q_n=T_1+T_2+\cdots+T_n=(2+2^2+\cdots+2^n)-n$

$=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n$

$=2^{n+1}-n-2$.

(3) 当n为奇数时，$c_n=\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$，

当n为偶数时，$c_n=\frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\frac{n-1}{2^n}$，

对任意的正整数n，有$\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k}}{2k+1}-\frac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\frac{2^{2n}}{2n+1}-1$，

和$\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{4^k}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}+\cdots+\frac{2n-1}{4^n}$，①

由①×$\frac{1}{4}$可得$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{2n-3}{4^n}+\frac{2n-1}{4^{n+1}}$，②

①-②得$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{2}{4^n}=\frac{2n-1}{4^{n+1}}$，

$\therefore\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{5}{9}-\frac{6n+5}{9\times4^n}$，

因此$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

数列$\{c_n\}$的前$2n$项和$\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

9 已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$，且满足$a_1+a_2=6a_3$，$a_4=4a_3^2$，数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

(2) 设$c_n=\begin{cases}\frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}}\cdot a_{n+2}, n\text{为奇数}\\ a_nb_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

答案

(1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$；$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2) $T_{2n}=\frac{25}{18}-\left[\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{3n+4}{9}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$.

解析

(1) 因为$a_1+a_2=6a_3$，$a_4=4a_3^2$，

所以$\begin{cases}a_1+a_1q=6a_1q^2\\ a_1q^3=4(a_1q^2)^2\end{cases}$，

即$\begin{cases}1+q=6q^2\\ a_1q^3=4a_1^2q^4\end{cases}$，即$\begin{cases}6q^2-q-1=0\\ 4a_1q=1\end{cases}$，即$\begin{cases}(3q+1)(2q-1)=0\\ a_1=\frac{1}{4q}\end{cases}$，

因为$q>0$，所以解得$q=\frac{1}{2}$，所以$a_1=\frac{1}{4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

又因为数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

则当$n=1$时，$b_1=S_1=\frac{1\times2}{2}=1$，

当$n\geqslant2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2+n-n^2+n}{2}=n$，

所以当$n=1$时，$b_1=1$也满足上式，

所以$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

综上所述，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 因为$c_n=\begin{cases}\frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}}\cdot a_{n+2}, n\text{为奇数}\\ a_nb_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，所以当$n$为奇数时，

$c_n=\frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}}\cdot a_{n+2}=\frac{3n+8}{n(n+2)}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\frac{1}{n\times 2^n}-\frac{1}{(n+2)\times 2^{n+2}}$，

当n为偶数时，$c_n=a_n\cdot b_n=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

令$A=c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n-1}$，$B=c_2+c_4+c_6+\cdots+c_{2n}$，

即$A=c_1+c_3+\cdots+c_{2n-1}$

$=\frac{1}{1\times 2^1}-\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{3\times 2^3}-\frac{1}{5\times 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}}$

$=\frac{1}{1\times 2^1}-\frac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}}$，

则$B=c_2+c_4+c_6+\cdots+c_{2n}$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$，

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^2B=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+(2n-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$，

所以

$B-\frac{1}{4}B=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$，

则$\frac{3}{4}B=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$

$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$

$=\frac{2}{3}-\left(n+\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$，

所以$B=\frac{8}{9}-\frac{3n+4}{9}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$，

所以$T_{2n}=c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n}$

$=(c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n-1})+(c_2+c_4+c_6+\cdots+c_{2n})$

$=A+B$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}}-\frac{3n+4}{9}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\frac{8}{9}$

$$=\frac{25}{18}-\left[\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{3n+4}{9}\right]\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

故$T_{2n}=\frac{25}{18}-\left[\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{3n+4}{9}\right]\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$.

10 设$\{a_n\}$是等比数列，$\{b_n\}$是递增的等差数列，$\{b_n\}$的前n项和为$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=2$，$b_1=1$，$S_4=a_1+a_3$，$a_2=b_1+b_3$.

(1) 求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 设$d_n=a_n+b_n$，数列$\{d_n\}$的前n项和为$T_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求满足$T_n>2^{n+1}+1$成立的n的最小值 .

(3) 对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}a_nb_n, n\text{为奇数}\\ \dfrac{(3b_n-2)\,a_n}{b_nb_{n+2}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和 .

答案 (1) $a_n=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$；$b_n=n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 3 .

(3) $\left(\frac{6n-5}{9}+\frac{1}{n+1}\right)\cdot 2^{2n+1}-\frac{8}{9}$.

解析 (1) 由题知$S_4=\frac{b_1+b_4}{2}\times 4=2\,(1+b_4)$，

$\therefore 2\,(1+b_4)=2+a_3$，

$\because a_2=1+b_3$，

$\therefore\begin{cases}2\,(1+b_1+3d)=2+a_1q^2\\ a_1q=1+b_1+2d\end{cases}$，

即$\begin{cases}2+3d=1+q^2\\ q=1+d\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}d=0\\ q=1\end{cases}$或$\begin{cases}d=1\\ q=2\end{cases}$，

$\because\{b_n\}$递增，

$\therefore d=1$，$q=2$，

$\therefore a_n=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

$b_n=n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $d_n=a_n+b_n=n+2^n$，

$\therefore T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$，

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=\frac{2\,(1-2^n)}{1-2}+\frac{(1+n)\,n}{2}=2^{n-1}+\frac{n^2+n}{2}-2$，

若$T_n > 2^{n+1}+1$则$\dfrac{n^2+n}{2} > 3$即$n^2+n-6>0$，

$\therefore (n+3)(n-2)>0$，即$n<-3$或$n>2$，

$\because n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore n\geqslant 3$，

故n的最小值为3．

(3) 记$\{c_n\}$的前$2n$项奇数项和为A，偶数项和为B，

故$A=c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n-1}$

$=a_1b_1+a_3b_3+a_5b_5+\cdots+a_{2n-1}b_{2n-1}$

$=1\cdot 2^1+3\cdot 2^3+5\cdot 2^5+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{2n-1}$，

$\therefore 4A=1\cdot 2^3+3\cdot 2^5+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{2n-1}+(2n-1)\cdot 2^{2n+1}$，

$\therefore A-4A=2+2\left(2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}\right)-(2n-1)\cdot 2^{2n+1}$

$=2+\dfrac{2\cdot 8\left(1-4^{n-1}\right)}{1-4}-(2n-1)\cdot 2^{2n+1}$

$=\left(\dfrac{5}{3}-2n\right)\cdot 2^{2n+1}-\dfrac{10}{3}$，

$\therefore A=\dfrac{6n-5}{9}\cdot 2^{2n+1}+\dfrac{10}{9}$．

n为偶数时，

$c_n=\dfrac{(3n-2)\cdot 2^n}{n(n+2)}=2^{n+2}\cdot\dfrac{3n-2}{4n(n+2)}=2^{n+2}\cdot\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{4n}\right)=\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n}$，

$\therefore B=c_2+c_4+c_6+\cdots+c_{2n-2}+c_{2n}$

$=\left(\dfrac{2^4}{4}-\dfrac{2^2}{2}\right)+\left(\dfrac{2^6}{6}-\dfrac{2^4}{4}\right)+\left(\dfrac{2^8}{8}-\dfrac{2^6}{6}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2^{2n}}{2n}-\dfrac{2^{2n-2}}{2n-2}\right)$

$+\left(\dfrac{2^{2n+2}}{2n+2}-\dfrac{2^{2n}}{2n}\right)$

$=\dfrac{2^{2n+2}}{2n+2}-\dfrac{2^2}{2}=\dfrac{2^{2n+1}}{n+1}-2$，

$\therefore A+B=\dfrac{6n-5}{9}\cdot 2^{2n+1}+\dfrac{10}{9}+\dfrac{2^{2n+1}}{n+1}-2=\left(\dfrac{6n-5}{9}+\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot 2^{2n+1}-\dfrac{8}{9}$，

即数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\left(\dfrac{6n-5}{9}+\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot 2^{2n+1}-\dfrac{8}{9}$．

11 数列$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，前n项和$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{a_2}+4$，$a_3=\dfrac{1}{b_4+b_6}$，$a_4=\dfrac{1}{b_5+2b_7}$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式a_n，b_n．

(2) 设$\{S_n\}$的前n项和为$T_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

① 求T_n．

2 若$c_n=\dfrac{(T_{n+1}-b_{n+1})\,b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}$，记$R_n=\sum\limits_{n=1}^{n}C_n$，求$R_n$的取值范围．

答案 (1) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，$b_n=n-1$．

(2) ① $T_n=n-1+\dfrac{1}{2^n}$．

② $R_n\in\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{2}\right)$．

解析 (1) 设数列$\{a_n\}$的公比为$q\,(q>0)$，

因为$a_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{a_2}+4$，可得$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{a_1q^2}=\dfrac{1}{a_1q}+4\end{cases}$，

整理得$\dfrac{1}{q^2}-\dfrac{1}{q}-2=0$，解得$q=-1$（舍）或$q=\dfrac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$通项公式为$a_n=\dfrac{1}{2^n}$，

设数列$\{b_n\}$的公差为d，因为$a_3=\dfrac{1}{b_4+b_6}$，$a_4=\dfrac{1}{b_5+2b_7}$，

可得$\begin{cases}\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2\,(b_1+4d)}\\ \dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{3b_1+16d}\end{cases}$，即$\begin{cases}b_1+4d=4\\ 3b_1+16d=16\end{cases}$，解得$\begin{cases}b_1=0\\ d=1\end{cases}$，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n-1$．

(2) ①

由等比数列的前n项和公式，可得$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$，

所以$T_n=(1+1+\cdots+1)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=n-\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=n-1+\dfrac{1}{2^n}$．

② 由①，可得：

$$c_n=\frac{(T_{n+1}-b_{n+1})\,b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}=\frac{\left(n+\frac{1}{2^{n+1}}-n\right)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{(n+2)}{n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}},$$

所以$\{c_n\}$的前n项和：

$$R_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

易知$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}<\dfrac{1}{2}$，

又$\because R_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$是关于$n$的单调递增函数，

$\therefore R_n\geqslant R_1=\frac{3}{8}$．

从而$R_n\in\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$．

12 设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，其前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{S_n\}$的前n项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$．

① 求T_n．

② 证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$．

(2) ① $T_n=2^{n+1}-n-2$．

② 证明见解析．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比q，

由$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，可得$q^2-q-2=0$，

$\because q>0$，可得$q=2$，故$a_n=2^{n-1}$．

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，由$a_4=b_3+b_5$，

可得$b_1+3d=4$，由$a_5=b_4+2b_6$，

可得$3b_1+13d=16$，从而$b_1=1$，$d=1$，$\therefore b_n=2$．

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$．

(2) ① 由(1)得，$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

$\therefore T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$．

② $\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(2^{k+1}-k-2+k+2)k}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{k+2}}{k+2}-\frac{2^{k+1}}{k+1}$，

$\therefore$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)+\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2$

13 数列$\{a_n\}$的通项$a_n=n^2\left(\cos^2\frac{n\pi}{3}-\sin^2\frac{n\pi}{3}\right)$，其前$n$项和为$S_n$.

(1) 求S_n .

(2) $b_n=\frac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

答案 (1)

$$S_n=\begin{cases}-\frac{n}{3}-\frac{1}{6}\\ \frac{(n+1)(1-3n)}{6}\\ \frac{n(3n+4)}{6}\end{cases},\begin{cases}n=3k-2\\ n=3k-1\\ n=3k\end{cases},(k\in\mathbf{N}^*).$$

(2) $T_n=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n-3}}-\frac{3n}{2^{2n+1}}$.

解析 (1) 由于$\cos^2\frac{n\pi}{3}-\sin^2\frac{n\pi}{3}=\cos\frac{2n\pi}{3}$，故

$$\begin{aligned}S_{3k}&=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})\\&=\left(-\frac{1^2+2^2}{2}+3^2\right)+\left(-\frac{4^2+5^2}{2}+6^2\right)+\cdots+\left[-\frac{(3k-2)^2+(3k-1)^2}{2}+(3k)^2\right]\\&=\frac{13}{2}+\frac{31}{2}+\cdots+\frac{18k-5}{2}=\frac{k(9k+4)}{2},\end{aligned}$$

$$S_{3k-1}=S_{3k}-a_{3k}=\frac{k(4-9k)}{2},$$

$$\begin{aligned}S_{3k-2}=S_{3k-1}-a_{3k-1}&=\frac{k(4-9k)}{2}+\frac{(3k-1)^2}{2}\\&=\frac{1}{2}-k=-\frac{3k-2}{3}-\frac{1}{6},\end{aligned}$$

故$S_n=\begin{cases}-\frac{n}{3}-\frac{1}{6}\\ \frac{(n+1)(1-3n)}{6}\\ \frac{n(3n+4)}{6}\end{cases},\begin{cases}n=3k-2\\ n=3k-1\\ n=3k\end{cases},(k\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $b_n=\frac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}=\frac{9n+4}{2\cdot 4^n}$，

$$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}+\frac{22}{4^2}+\cdots+\frac{9n+4}{4^n}\right),$$

$$4T_n=\frac{1}{2}\left(13+\frac{22}{4}+\cdots+\frac{9n+4}{4^{n-1}}\right),$$

两式相减得

$$\begin{aligned}3T_n&=\frac{1}{2}\left(13+\frac{9}{4}+\cdots+\frac{9}{4^{n-1}}-\frac{9n+4}{4^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(13+\frac{\frac{9}{4}-\frac{9}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{9n+4}{4^n}\right)\\&=8-\frac{1}{2^{2n-3}}-\frac{9n}{2^{2n+1}},\end{aligned}$$

故$T_n=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{2n-3}}-\dfrac{3n}{2^{2n+1}}$.

14 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$. 数列$\{b_n\}$满足：$b_1=b_2=2$，$b_{n+1}b_n=2^{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 求$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(b_{2i-1}-\dfrac{1}{b_{2i}}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$.

答案 (1) $a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$；$b_n=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}},n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(b_{2i-1}-\dfrac{1}{b_{2i}}\right)=(n-1)\cdot 2^{n+1}+\dfrac{n+2}{2^n}$.

解析 (1) 因为数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$，

当$n=1$时，$S_1=\dfrac{1+1}{2}=1$，所以$a_1=1$；

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$

$=\dfrac{n^2+n-n^2-1+2n-n+1}{2}=\dfrac{2n}{2}=n$；

所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=n$，则$a_1=1$也满足上式，

所以$a_n=n$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$；

又因为$b_{n+1}b_n=2^{n+1}$，则当$n\geqslant 2$时，$b_nb_{n-1}=2^n$，

因为$b_1=b_2=2$，所以$b_n\neq 0$.

所以$\dfrac{b_{n+1}b_n}{b_nb_{n-1}}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$，即$b_{n+1}=2b_{n-1}\ (n\geqslant 2)$，又$b_1=b_2=2$，

所以数列$\{b_n\}$的奇数项和偶数项分别是以2为首项,2为公比的等比数列，所以

$b_n=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}},n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$；

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}},n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$.

(2) 由（1）可知，$a_i=i$，$b_{2i-1}=2^{\frac{2i-1+1}{2}}=2^{\frac{2i}{2}}=2^i$，$b_{2i}=2^{\frac{2i}{2}}=2^i$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(b_{2i-1}-\dfrac{1}{b_{2i}}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}i\left(2^i-\dfrac{1}{2^i}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot 2i-\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot\dfrac{i}{2^i}$；

设$M_n=1\cdot x+2\cdot x^2+3\cdot x^3+\cdots+(n-1)\cdot x^{n-1}+n\cdot x^n\ (x\neq 0,1)$，①

$xM_n=1\cdot x^2+2\cdot x^3+\cdots+(n-1)\cdot x^n+n\cdot x^{n+1}$，②

由①-②可得：$(1-x)M_n=x+x^2+\cdots+x^n-nx^{n+1}=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}$，

所以$M_n=\dfrac{x\left(1-x^n\right)}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^{n+1}}{1-x}=\dfrac{x-x^{n+1}-n\left(1-x\right)x^{n+1}}{(1-x)^2}=\dfrac{x+\left(nx-n-1\right)\cdot x^{n+1}}{(1-x)^2}$

，

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot 2i=\dfrac{2+\left(2n-n-1\right)\cdot 2^{n+1}}{(1-2)^2}=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=\dfrac{\frac{1}{2}+\left(\frac{n}{2}-n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$；

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot 2i-\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-2+\dfrac{n+2}{2^n}=(n-1)\cdot 2^{n+1}+\dfrac{n+2}{2^n}$；

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(b_{2i-1}-\dfrac{1}{b_{2i}}\right)=(n-1)\cdot 2^{n+1}+\dfrac{n+2}{2^n}$．

15 已知等比数列$\{a_n\}$的首项为1，公比为q，a_4，a_3，a_5依次成等差数列．

(1) 求q的值．

(2) 当$q<0$时，求数列$\{na_n\}$的前n项和S_n．

(3) 当$q>0$时，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{\left(2i-\dfrac{1}{3}\right)^2-a_i^2}<\dfrac{3}{4}$．

答案 (1) 1或-2．

(2) $\dfrac{1}{9}-\dfrac{1+3n}{9}(-2)^n$．

(3) 证明见解析．

解析 (1) $\because a_4$，a_3，a_5依次成等差数列，

$\therefore 2a_3=a_5+a_4$，

$\therefore 2a_3=a_3(q^2+q)$，化为$q^2+q-2=0$，

解得$q=1$或-2．

(2) $q=-2$，

$\therefore a_n=(-2)^{n-1}$，

$\therefore na_n=n(-2)^{n-1}$，

$\therefore$数列$\{na_n\}$的前n项和$S_n=1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$，

$-2S_n=(-2)+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n(-2)^n$，

$\therefore 3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1+3n}{3}(-2)^n.$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{9}-\frac{1+3n}{9}(-2)^n.$$

(3) $q=1$，

$a_n=1$，

$$\therefore \frac{a_i^2}{\left(2i-\frac{1}{3}\right)^2-a_i^2}=\frac{1}{\left(2i-\frac{1}{3}\right)^2-1}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3i-2}-\frac{1}{3i+1}\right),$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\left(2i-\frac{1}{3}\right)^2-a_i^2}$$

$$=\frac{3}{4}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)<\frac{3}{4}.$$