

数列分组求和

1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

(3) 设 $c_n = a_{2n-1} a_{2n} + (-1)^n$, 证明: $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{5}{4}$.

2 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1} + 2$.

(1) 证明: $\left\{\frac{a_n + 1}{3^n}\right\}$ 为等差数列.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 S_n .

3 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \cdots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求 a_n 与 b_n .

(2) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ -\frac{1}{a_n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 若对 $n \in \mathbf{N}^*$, $T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立, 求

正整数 k 的值.

4 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n^2 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$ ，前 n 项和为 S_n ，求 S_{30} 。

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = n(n+1)$ ，记 $T_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n$ ，求 T_n 。

6 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ ，其中， $a_n = \frac{1}{2(1+2+3+\cdots+n)}$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2$ ， $b_{n+1} = 2b_n$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 是否存在自然数 m ，使得对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $n \geq 2$ ，有 $1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} < \frac{m-8}{4}$ 恒成立？若存在，求出 m 的最小值。

(3) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{na_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \cdots + 2^n a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_n .

(2) 设 $b_n = (-2)^{a_n} + (-1)^n \frac{2a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

8 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in N^*)$, 求 $\{T_n\}$ 的前 n 项和 Q_n .

(3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

9 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ，且满足 $a_1 + a_2 = 6a_3$ ， $a_4 = 4a_3^2$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{3b_n + 8}{b_n b_{n+2}} \cdot a_{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ a_n b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

10 设 $\{a_n\}$ 是等比数列， $\{b_n\}$ 是递增的等差数列， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $a_1 = 2$ ， $b_1 = 1$ ，

$$S_4 = a_1 + a_3, a_2 = b_1 + b_3.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $d_n = a_n + b_n$ ，数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)，求满足 $T_n > 2^{n+1} + 1$ 成立的 n 的最小值.

(3) 对任意的正整数 n ，设 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3b_n - 2)a_n}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

11 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。

① 求 T_n 。

② 若 $c_n = \frac{(T_{n+1} - b_{n+1})b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}$ ，记 $R_n = \sum_{n=1}^n C_n$ ，求 R_n 的取值范围。

12 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

13 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n^2 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$ ，其前 n 项和为 S_n 。

(1) 求 S_n 。

(2) $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

14 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$. 数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = b_2 = 2$, $b_{n+1}b_n = 2^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right)$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

15 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, 公比为 q , a_4, a_3, a_5 依次成等差数列.

(1) 求 q 的值.

(2) 当 $q < 0$ 时, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 当 $q > 0$ 时, 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\left(2i - \frac{1}{3}\right)^2 - a_i^2} < \frac{3}{4}$.