

数列1

本段落仅教师可见

数列解答题是天津卷高考必考内容，第一问通常考察求数列通项公式，第二问考察数列求和的方法、不等式的综合应用等。这里我们分成两讲，本节主要研究错位相减法以及裂项相消法求和应用。

年份	2019	2018	2017	2016	2015	2014
题目类型	分组求和	裂项相消	错位相减	数列不等式	错位相减	数列与不等式

讲义制作人：李肖肖——097395

讲义审核人：天津教研团队

考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，模拟题共 40 套试卷中出现频率 100%

知识模块	考点	天津卷	一模	二模
数列	等差、等比数列求和公式、性质	2015-18;2016-18; 2017-18;2018-18	17次	11次
	裂项相消	2016-18;2018-18	11次	10次
	放缩		4次	1次
	错位相减	2015-18;2017-18	10次	8次
	分组	2019-19	3次	2次
	不等式最值	2014-19	4次	2次

考点分析



高频考点

- ①求等差数列、等比数列通项公式,求变形数列前 n 项和（如：2018年天津卷理第18题）
- ②掌握通项公式与前 n 项和公式,解决简单的变形问题,如证等式成立（如：2018年天津卷理第18题）
- ③通过通项公式求和公式,证明不等式成立（如：2016年天津卷理第18题）

④求新构造数列的最大项与最小项（如：2013年天津卷理第18题）



考试难点

①构造数列求通项公式（如：2018年天津卷理第18题）

②新设数列求前 n 项和（如：2015年天津卷理第18题）

③证明等式不式成立（如：2016年天津卷理第18题）

④裂项相消方式求和（如：2018年天津卷理第18题）

⑤注意计算错位相减出错（如：2017年天津卷理第18题）



易错点

①计算，特别是错位相减计算出错（如：2017年天津卷理第18题）

②裂项注意不要丢系数（如：2018年天津卷理第18题）

③分组求和丢项，计算出错

一、错位相减法

你先试试看

1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ （ q 为实数，且 $q \neq 1$ ）， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_2 + a_3$ ， $a_3 + a_4$ ， $a_4 + a_5$ 成等差数列.

（1）求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ （ $n \in \mathbf{N}^*$ ），求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

答案

$$(1) a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}$$

$$(2) 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

解析

（1）依题意 $a_3 = q$ ， $a_4 = 2q$ ， $a_5 = q^2$.

因为 $a_2 + a_3$ ， $a_3 + a_4$ ， $a_4 + a_5$ 成等差数列，所以 $a_3 + a_4 = a_2 + a_5$ ，

所以 $3q = q^2 + 2$ ， $q = 2$ 或者 $q = 1$ （舍）

当 $n = 2k-1$ （ $k \in \mathbf{N}^*$ ）时， $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$ ；

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, n = 2k-1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$

(2) 由 (I) 得 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*.$

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}, \\ \frac{1}{2} T_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}, \end{aligned}$$

两式相减, 得

$$\frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n},$$

$$\text{整理得, } T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*.$

解析:

(1) 依题意 $a_3 = q, a_4 = 2q, a_5 = q^2$.

因为 $a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5$ 成等差数列, 所以 $a_3 + a_4 = a_2 + a_5$,

所以 $3q = q^2 + 2, q = 2$ 或者 $q = 1$ (舍)

-----3分

当 $n = 2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}};$

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}.$

-----5分

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, n = 2k-1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$

-----6分

(2) 由 (I) 得 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*.$

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}, \\ \frac{1}{2} T_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}, \end{aligned}$$

-----8分

两式相减, 得

$$\frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n},$$

-----10分

整理得, $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

-----13分

听我慢慢讲

2 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列, 且公比大于0,

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和($n \in \mathbf{N}^*$).

答案

(1) $a_n = 3n - 2, b_n = 2^n$.

(2) $\frac{3n-2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{8}{3}$.

解析

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由已知 $b_2 + b_3 = 12$, 得 $b_1(q + q^2) = 12$, 而 $b_1 = 2$, 所以 $q + q^2 = 6$,

又 $q > 0$, 解得 $q = 2$, 所以 $b_n = 2^n$.

由 $b_3 = a_4 - 2a_1$ 可得 $3d - a_1 = 8$, ①

由 $S_{11} = 11b_4$, 可得 $S_{11} = 11a_6 = 11b_4$, 即 $a_1 + 5d = 16$, ②

联立①②解得 $a_1 = 1, d = 3$,

所以 $a_n = 3n - 2$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$.

(2) 设数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

由 $a_{2n} = 6n - 2, b_{2n-1} = 2 \times 4^{n-1}$, 有 $a_{2n}b_{2n-1} = (3n - 1) \times 4^n$,

故 $T_n = 2 \times 4 + 5 \times 4^2 + 8 \times 4^3 + \cdots + (3n - 1) \times 4^n$,

$4T_n = 2 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + 8 \times 4^4 + \cdots + (3n - 4) \times 4^n + (3n - 1) \times 4^{n+1}$,

上述两式相减, 得 $-3T_n = 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \cdots + 3 \times 4^n - (3n - 1) \times 4^{n+1}$

$$= \frac{12 \times (1 - 4^n)}{1 - 4} - 4 - (3n - 1) \times 4^{n+1}$$

$$= -(3n - 2) \times 4^{n+1} - 8.$$

$$\text{得 } T_n = \frac{3n - 2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{8}{3}.$$

所以数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3n-2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{8}{3}$.

导图总结

错位相减模型：

$$a_n \cdot b_n \text{ 或 } \frac{a_n}{b_n}$$

注意：相减之后的项数，求和时正负号等问题.

你再试试看

3 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

(1) 已知 $a_n = (3n+1) \times 2^n$ ，求 S_n

(2) 已知 $a_n = \frac{3n+1}{2^n}$ ，求证 $S_n < 7$

答案

(1) $S_n = (3n-2) \times 2^{n+1} + 4$

(2) 证明见解析

解析

(1) 解： $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$$= 4 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + \cdots + (3n-2) \times 2^{n-1} + (3n+1) \times 2^n$$

所有项同乘2得

$$2S_n = 4 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + (3n-5) \times 2^{n-1} + (3n-2) \times 2^n + (3n+1) \times 2^{n+1}$$

上式减下式可得

$$-S_n = 8 + 3 \times (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n) - (3n+1) \times 2^{n+1}$$

$$= 8 + 3 \times (2^{n+1} - 4) - (3n+1) \times 2^{n+1} = -(3n-2) \times 2^{n+1} - 4$$

$$\text{则 } S_n = (3n-2) \times 2^{n+1} + 4$$

(2) 解： $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{4}{2^1} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + \frac{3n-2}{2^{n-1}} + \frac{3n+1}{2^n}$

所有项同乘 $\frac{1}{2}$ 得

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{3n-5}{2^{n-1}} + \frac{3n-2}{2^n} + \frac{3n+1}{2^{n+1}}$$

上式减下式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}} = 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{3n+7}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{则 } S_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n} < 7, \text{ 得证}$$

题型通解

数列的通项是一个等差数列的通项与一个等比数列通项相乘构成,常选用错位相减法;

①在消项时一定要注意错位相消,明白消去了哪些部分,留下的部分是什么数列,怎样利用等差数列与等比数列求和公式分组求和;

②求和化简时注意正负号及同底数合并问题.

4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

答案

$$(1) a_n = \begin{cases} \frac{n}{3 \cdot 2}, & n \text{ 为偶} \\ n, & n \text{ 为奇} \end{cases}.$$

(2) 证明见解析.

解析

(1) ①当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

$$\text{即 } q^2 = 3.$$

$$q = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}.$$

②当 n 为奇数时 $a_{n+2} = a_n + 2$.

$$\text{即 } 2d = 2.$$

$$d = 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = n.$$

$$\text{综上: } a_n = \begin{cases} \frac{n}{3 \cdot 2}, & n \text{ 为偶} \\ n, & n \text{ 为奇} \end{cases}.$$

$$(2) b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{2n-1}{3^n}.$$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n}, \quad ①$$

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{2n-3}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}}, \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得: } S_n = 1 - \frac{n}{3^n}.$$

$$\text{即证: } 1 - \frac{n}{3^n} \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1} .$$

$$\frac{n}{3^n} \leq \frac{n+1}{2^n + 1} .$$

$$n(3^n - 2^n) + (3^n - n) \geq 0 .$$

$$\therefore n \geq 1 .$$

$$\therefore n(3^n - 2^n) > 0 , \text{ 恒成立} .$$

$$3^n - n > 0 , \text{ 恒成立} .$$

$$\therefore \text{证明成立} .$$

题型通解

①遇到 $(-1)^n$ 的情况,需要分奇偶进行讨论,求和时注意**首项**、**项数**.

②第二问中遇到的错位相减法,需要注意两式相减时**项数**,剩余的正项数与负项数要保持一致.

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列,且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案 (1) $a_n = 6n + 5$, $b_n = 3n + 1$.

(2) $T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$.

解析 (1) $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 11$,

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5 ,$$

a_1 也满足,

$$\therefore a_n = 6n + 5 ,$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \end{cases} , \begin{cases} 11 = 2b_1 + d \\ 17 = 2b_1 + 3d \end{cases} ,$$

$$b_1 = 4 , d = 3 ,$$

$$\therefore b_n = 3n + 1 .$$

$$(2) c_n = \frac{(6n + 6)^{n+1}}{(3n + 3)^n} = 3(n + 1) \cdot 2^{n+1} ,$$

$$T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n ,$$

$$= 3[2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (n + 1) \cdot 2^{n+1}] ,$$

$$\begin{aligned}
 2T_n &= 3[2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n+2}] , \\
 -T_n &= 3[2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - (n+1) \cdot 2^{n+2}] , \\
 &= 3 \times \left[4 + \frac{4(1-2^n)}{1-2} - (n+1) \times 2^{n+2} \right] , \\
 &= -3n \cdot 2^{n+2} , \\
 \therefore T_n &= 3n \cdot 2^{n+2} .
 \end{aligned}$$

登堂入室

6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足： $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(3) 令 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2n$.

(2) $b_n = 2(3^n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) $T_n = \frac{(2n-1) \times 3^{n+1} + 3}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$.

解析

(1) 当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 2$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n$ ，

知 $a_1 = 2$ 满足该式，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$.

(2) $\because a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1} (n \geq 1)$ ，①

$\therefore a_{n+1} = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1} + \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}+1}$ ，②

②-①得： $\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}+1} = a_{n+1} - a_n = 2$ ，

$b_n = 2(3^n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

故 $b_n = 2(3^n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) $c_n = \frac{a_n b_n}{4} = n(3^n + 1) = n \cdot 3^n + n$ ，

∴

$$T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = (1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\text{令 } H_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n, \quad ①$$

$$\text{则 } 3H_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \dots + n \times 3^{n+1}, \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得: } -2H_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n - n \times 3^{n+1}$$

$$= \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \times 3^{n+1}.$$

$$\therefore H_n = \frac{(2n-1) \times 3^{n+1} + 3}{4}, \dots (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{(2n-1) \times 3^{n+1} + 3}{4} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

登峰造极

7 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且 $a_5 = 3a_2$, $S_7 = 14a_2 + 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求数列 $\{(-1)^n b_n (a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2n - 1$.

(2) $T_n = \frac{-1 + (-4)^n}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}(6n-1) \cdot (-2)^n.$

解析

(1) 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 且 $a_5 = 3a_2$, $S_7 = 14a_2 + 7$,

$$\text{可得 } a_1 + 4d = 3(a_1 + d), \quad 7a_1 + 21d = 14(a_1 + d) + 7,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, \quad d = 2,$$

$$\text{则 } a_n = 2n - 1.$$

(2) 数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

$$\text{可得 } a_n + b_n = 2^{n-1}, \quad \text{可得 } b_n = 2^{n-1} - (2n-1),$$

$$\text{则 } b_n(a_n + b_n) = (-1)^n 4^{n-1} - (-1)^n (2n-1) \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{设 } K_n = -1 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2 + \dots + (-1)^n (2n-1) \cdot 2^{n-1},$$

$$-2K_n = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + \dots - (-1)^{n+1} (2n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{相减可得 } 3K_n = -1 + 2(2 - 2^2 + \dots) - (-1)^{n+1} (2n-1) \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned}
 &= -1 + \frac{4[1 - (-2)^{n-1}]}{1+2} - (-1)^{n+1}(2n-1) \cdot 2^n, \\
 &\text{化简可得 } K_n = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}(6n-1) \cdot (-2)^n, \\
 &\text{则前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{1 - (-4)^n}{1+4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}(6n-1) \cdot (-2)^n \\
 &= \frac{-1 + (-4)^n}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}(6n-1) \cdot (-2)^n.
 \end{aligned}$$

二、裂项求和

你先试试看

8 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(2) 设 $a_1 = d$ ， $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ 。

答案 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

解析 (1) $C_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 2d \cdot a_{n+1}$

$$C_{n+1} - C_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2 \text{ 为定值。}$$

$\therefore \{C_n\}$ 为等差数列；

$$\begin{aligned}
 (2) \quad T_n &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2 = C_1 + C_3 + \cdots + C_{2n-1} = nC_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4d^2 = nC_1 \\
 &\quad + 2d^2 n(n-1)
 \end{aligned}$$

(*)

$$\text{由已知 } C_1 = b_2^2 - b_1^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2 = 2d \cdot a_2 = 2d(a_1 + d) = 4d^2$$

$$\text{将 } C_1 = 4d^2 \text{ 代入 (*) 式得 } T_n = 2d^2 n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{2d^2}, \text{ 得证.}$$

解析：

(1)

$$\text{证明：} C_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 2d \cdot a_{n+1},$$

-----2分

$$C_{n+1} - C_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2 \text{ 为定值.}$$

$\therefore \{C_n\}$ 为等差数列；

-----5分

(2)

$$\text{证明: } T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2 = C_1 + C_3 + \cdots + C_{2n-1} = nC_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4d^2 = nC_1 + 2d^2 n(n-1) \quad (*)$$

-----8分

$$\text{由已知 } C_1 = b_2^2 - b_1^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2 = 2d \cdot a_2 = 2d(a_1 + d) = 4d^2,$$

$$\text{将 } C_1 = 4d^2 \text{ 代入 } (*) \text{ 式得 } T_n = 2d^2 n(n+1),$$

-----11分

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2d^2}, \text{ 得证}$$

-----13分

听我慢慢讲

9 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

$$\text{② 证明 } \sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*).$$

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}, b_n = n.$

(2) ① $T_n = 2^{n+1} - n - 2.$

② 证明见解析.

解析

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q ,

$$\text{由 } a_1 = 1, a_3 = a_2 + 2, \text{ 可得 } q^2 - q - 2 = 0,$$

$$\because q > 0, \text{ 可得 } q = 2, \text{ 故 } a_n = 2^{n-1}.$$

$$\text{设等差数列 } \{b_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 由 } a_4 = b_3 + b_5,$$

$$\text{可得 } b_1 + 3d = 4, \text{ 由 } a_5 = b_4 + 2b_6,$$

可得 $3b_1 + 13d = 16$ ，从而 $b_1 = 1$ ， $d = 1$ ， $\therefore b_n = 2$ 。

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n$ 。

(2) ① 由(1)得， $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ，

$$\therefore T_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - n = \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2。$$

$$\begin{aligned} \text{② } \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} &= \frac{(2^{k+1} - k - 2 + k + 2)k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k \cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+2} - \frac{2^{k+1}}{k+1}， \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2。$$

导图总结

裂项相消常见模型：

(1) 把数列的通项拆成两项之差、正负相消剩下首尾若干项。

$$\text{① } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\text{② } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$\text{③ } \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{a-b} (\sqrt{a} - \sqrt{b}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n});$$

$$\text{④ } \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \quad \frac{3^n}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right);$$

$$\text{⑤ } \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = 2 \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right);$$

$$\text{⑥ } (-1)^n \frac{4n}{4n^2 - 1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\text{⑦ } \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{n(n+1)} = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n};$$

$$\text{⑧ 若 } \{a_n\} \text{ 是公差为 } d \text{ 的等差数列, 则 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

(2) 注意裂项相消最后留下的项数问题. 注意消去了哪些项, 剩余的正项数与负项数是一样的。

你再试试看

10 数列 $\{a_n\}$ ，前 n 项和为 S_n

- (1) 已知 $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$, 求 S_n
- (2) 已知 $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$, 求 S_n
- (3) 已知 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$, 求 S_n
- (4) 已知 $a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n+1)}$, 求 S_n
- (5) 已知 $a_n = \frac{2^n}{(2^{n+1} + 1)(2^{n+1} + 2)}$, 求 S_n

答案

- (1) $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$
- (2) $S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$
- (3) $S_n = \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - 1)$
- (4) $S_n = \frac{1}{4} \left[-1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right]$
- (5) $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$

解析

- (1) 解: $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$
- 则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$
- $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$
- (2) 解: $a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$
- 则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$
- $= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$
- (3) 解: $a_n = \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$
- 则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{2} (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \cdots + \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$
- $= \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - 1)$
- (4) 解: $a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$
- 则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{4} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$
- $= \frac{1}{4} \left[-1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right]$
- (5) 解: $a_n = \frac{2^n}{(2^{n+1} + 1)(2^{n+1} + 2)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$
- 则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$
- $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 = 1$ ， a_3, a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(3b_{n-1} - 1)(3b_n - 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $T_n < \frac{1}{3}$ 。

答案 (1) $a_n = n + 1$ ， $b_n = 2^n$ 。

(2) 证明见解析。

解析 (1) $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ($n \geq 1$)，

$$a_n^2 = 2S_{n-1} + n - 1 + 4 \quad (n \geq 2),$$

$$\text{相减：} a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2, \quad (n \geq 2)$$

由 $\{a_n\}$ 各项均为正数，

$$a_{n+1} - a_n = 1 \quad (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } a_3 = a_2 + 1, a_7 = a_2 + 5,$$

$$\text{故：} (a_2 + 1)^2 = (a_2 - 1)(a_2 + 5) \Rightarrow a_2 = 3,$$

$$n = 1 \text{ 时，解得 } a_1 = 2,$$

故 $\{a_n\}$ 是以2为首项，1为公差的等差数列，

$$\therefore a_n = n + 1, \text{ 易知 } b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8,$$

$$\text{故 } b_n = 2^n.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{b_n}{(3b_{n-1} - 1)(3b_n - 1)} = \frac{2^n}{(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1)} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1} - \frac{1}{3 \cdot 2^n - 1} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 2 - 1} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 2 - 1} - \frac{1}{3 \times 2^2 - 1} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1} - \frac{1}{3 \times 2^n - 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3 \times 2^n - 1} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

12 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = 2$ ， $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

(3) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$, 证明: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{1}{32}$.

答案

(1) $a_n = 2n$.

(2) $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ ①

得 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n = S_{n-1} + (n-1)n$ ②

① - ②, 得 $na_{n+1} - (n-1)a_n = a_n + 2n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2 (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时, $a_2 = S_1 + 1 \times 2$,

所以, $a_2 = a_1 + 2$,

所以对一切正整数 n , 有 $a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 故 $a_n = 2n$.

(2) 由 (1) 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$,

所以 $T_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$, ①

两边同乘以 $\frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$, ②

① - ②, 得 $\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$,

整理得 $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(3) 由 (1) 知, $b_n = \frac{1}{2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2)} = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$,

所以,

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{32} - \frac{1}{16(n+1)(n+2)} < \frac{1}{32}. \end{aligned}$$



题型通解

①遇到等式有 a_n 与 S_n 时, 一般利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 去求通项, 需验证 $n=1$ 时是否符合所求通项;

②第二问中的求和,其数列通项为**等差乘以等比**形式,可以用**错位相减**法求和,此方法需要注意问题是:**数清项数**.

③第三问证明不等式问题,一般会用到**裂项相消**方法.分母为三项关于 n 的式子相乘时,如同两项关于 n 的式子相乘,可以利用**裂项相消**方法求和.

登堂入室

13 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,公比大于0,前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等差数列,已知 $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$).

① 求 T_n .

② 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1}) b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}.$

答案

(1) $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = n - 1$.

(2) ① $T_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}$.

② 证明见解析.

解析

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1 q} + 4 \end{cases}$, $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} - 2 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$,

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{设等差数列 } a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6} = \frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7} = \frac{1}{16},$$

$$\therefore 2b_1 + 8d = 8, 3b_1 + 16d = 16,$$

$$\text{解得 } b_1 = 0, d = 1,$$

$$\therefore b_n = n - 1.$$

$$(2) \text{ ① } S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$\{S_n\}$ 的前 n 项和为

$$T_n = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n} = n - \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = n - 1 + \frac{1}{2^n}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} = \frac{\left(i + \frac{1}{2^{i+1}} - i\right)(i+2)}{i(i+1)} = \frac{1}{i \cdot 2^i} - \frac{1}{(i+1) \cdot 2^{i+1}},$$

$\therefore$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{i \cdot 2^i} - \frac{1}{(i+1) \cdot 2^{i+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{2}$$

.

14 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且满足 $a_n + S_n = 2n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求证: $\frac{1}{2a_1a_2} + \frac{1}{2^2a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{2^n a_n a_{n+1}} < \frac{1}{3}$.

答案 (1) $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$.

(2) 证明如下.

解析 (1) $\because a_n + S_n = 2n + 1$, 令 $n = 1$, 得 $2a_1 = 3$, $a_1 = \frac{3}{2}$.

$\because a_n + S_n = 2n + 1$, $\therefore a_{n-1} + S_{n-1} = 2(n-1) + 1$, ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)

两式相减, 得 $2a_n - a_{n-1} = 2$, 整理 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$, $a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$, ($n \geq 2$)

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ 是首项为 $a_1 - 2 = -\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$\therefore a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$.

(2) 证明: $\because \frac{1}{2^n a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2^n \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)(2^{n+2}-1)}$

$$= \frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2^{n+2}-1}.$$

$$\frac{1}{2a_1a_2} + \frac{1}{2^2a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{2^n a_n a_{n+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1}\right) + \left(\frac{1}{2^3-1} - \frac{1}{2^4-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2^{n+2}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+2}-1} < \frac{1}{3}.$$

15 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$, $a_2 = 1$, a_3, a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \cdot \frac{1}{b_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

答案 (1) $a_n = n + 1$, $b_n = 2^n$.

(2) $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$.

解析 (1) $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ($n \geq 1$),

$$a_n^2 = 2S_{n-1} + n - 1 + 4 \quad (n \geq 2),$$

$$\text{相减: } a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2, \quad (n \geq 2)$$

由 $\{a_n\}$ 各项均为正数,

$$a_{n+1} - a_n = 1 \quad (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } a_3 = a_2 + 1, a_7 = a_2 + 5,$$

$$\text{故: } (a_2 + 1)^2 = (a_2 - 1)(a_2 + 5) \Rightarrow a_2 = 3,$$

$$n = 1 \text{ 时, 解得 } a_1 = 2,$$

故 $\{a_n\}$ 是以2为首项, 1为公差的等差数列,

$$\therefore a_n = n + 1, \text{ 易知 } b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8,$$

$$\text{故 } b_n = 2^n.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \cdot \frac{1}{b_n} \\ &= \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^n} \\ &= \frac{2(n+1) - n}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}, \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{2 \times 2^1}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 2^1} - \frac{1}{3 \times 2^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}\right) = 1 \\ &\quad - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \end{aligned}$$

登峰造极

16 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案 (1) $b_n = n$.

(2) $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(3) $-\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}$.

解析 (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$,

$$\text{可得 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1,$$

设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 公差为1, 首项为1,

$$\therefore b_n = n.$$

(2) 易得 $a_n = n \cdot 2^n$, 其前 n 项和: $S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \cdots \textcircled{1}$,

$$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} \cdots \textcircled{2},$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 可得: } S_n = -1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^n + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

$$(3) c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)2^{n+1}} = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)}{n \cdot (n+1)2^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n(n^2 + n + 2(n+1) + n)}{n \cdot (n+1)2^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + (-1)^n \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right),$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{-1}{1 \cdot 2^1} - \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} \right) + \left(\frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(-1)^3}{3 \cdot 2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right) \right]$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

17 已知直线 $l_n: y = x - \sqrt{2n}$ 与圆 $C_n: x^2 + y^2 = 2a_n + n$ 交于不同的两点 A_n, B_n , $n \in \mathbf{N}^*$. 数列 $\{a_n\}$

满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}|A_n B_n|^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

(2) 若 $b_n = \frac{n}{4a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，在(2)的条件下，求证：对任意正整数 n ，

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k(T_k+k+1)} < 2.$$

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) $T_n = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 圆 C_n 的圆心到直线 l_n 的距离 $d_n = \frac{|\sqrt{2n}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{n}$ ，半径 $r_n = \sqrt{2a_n + n}$ ，

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{4} |A_n B_n|^2 = r_n^2 - d_n^2 = 2a_n,$$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

又 $a_1 = 1$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为2的等比数列，

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由(I)知， $b_n = \frac{n}{4a_n} = \frac{n}{2^{n+1}}$ ，

$$\therefore T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \cdots + \frac{n}{2^{n+2}},$$

$$\text{两式相减，得 } \frac{1}{2} \cdot T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2^{n+2}},$$

$$\therefore T_n = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

(3) 因为 $a_n = 2^{n-1}$ ，

$$\text{所以 } S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{k+2}{S_k(T_k+k+1)} \\ &= \frac{k+2}{(2^k-1) \cdot \left(1 - \frac{k+2}{2^{k+1}} + k+1\right)} \\ &= \frac{k+2}{(2^k-1) \cdot (2^{k+1}-1)} \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2^k-1} - \frac{1}{2^{k+1}-1} \right),$$

$$\begin{aligned} & \text{所以，} \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k(T_k+k+1)} \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1} \right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right) < 2. \end{aligned}$$

三、试炼之地

错位相减

18 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，当 $n \geq 2$ 时，满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$ ，且 $a_1 = 1$ 。

(1) 求证：数列 $\{S_n\}$ 是等比数列。

(2) 设 $b_n = (\log_4 S_n) \cdot S_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

答案 (1) 证明见解析。

$$(2) b_n = (n-1) \cdot 4^{n-1}, T_n = \frac{4}{9} + \left(\frac{n}{3} - \frac{4}{9}\right) 4^n.$$

解析 (1) $(S_n - 2S_{n-1})^2 = S_n \cdot S_{n-1}$ 。

$$S_n^2 - 4S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2 = S_n S_{n-1}.$$

$$S_n^2 - 5S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2 = 0.$$

$$(S_n - S_{n-1})(S_n - 4S_{n-1}) = 0,$$

$$a_n(S_n - 4S_{n-1}) = 0,$$

$\because \{a_n\}$ 各项均为正数。

$$\therefore S_n - 4S_{n-1} = 0, \text{ 即 } \frac{S_n}{S_{n-1}} = 4.$$

$\therefore \{S_n\}$ 为首项为1公比为4的等比数列。

$$(2) S_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}.$$

$$b_n = (\log_4 S_n) \cdot S_n = (n-1) \cdot 4^{n-1}.$$

$$T_n = 0 + 4^1 + 2 \times 4^2 + \cdots + (n-2)4^{n-2} + (n-1) \cdot 4^{n-1},$$

$$4T_n = 0 + 4^2 + \cdots + (n-2)4^{n-1} + (n-1)4^n,$$

$$-3T_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} - (n-1)4^n,$$

$$-3T_n = -\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3} + n\right) \cdot 4^n,$$

$$T_n = \frac{4}{9} + \left(\frac{n}{3} - \frac{4}{9}\right) 4^n.$$

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_{10} = 28$ ， $S_8 = 92$ ，数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1$ 成立。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

答案

(1) $a_n = 3n - 2$ ； $b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) $T_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n}$ 。

解析

(1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，由 $a_{10} = 28$ ， $S_8 = 92$ ，

$$\text{得 } a_{10} = a_1 + 9d = 28, S_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times d = 92,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 3, a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,$$

$$\text{又 } \because b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1,$$

$$\therefore b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} = 3n - 2 (n \geq 2),$$

$$\text{两式相除得 } b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时 $b_1 = 4$ 适合上式，

$$\therefore b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 把 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式代入 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$ ，得 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n} = \frac{3n+1}{2^n}$ ，

$$\text{则 } T_n = \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + \frac{3n+1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{3n-2}{2^n} + \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式作差得：} \frac{1}{2}T_n = 2 + \left(\frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{3}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n = 2 + 3 \times \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\text{即 } T_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n}.$$



裂项相消

20

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 是公差为正数的等差数列，且 $b_2 = 5$ ， b_1, b_3, b_{11} 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2)

令 $c_n = \frac{1}{a_n(2b_n - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案 (1) $a_n = 2n + 1$, $b_n = 3n - 1$.

(2) $T_n = \frac{n}{6n + 3}$.

解析

(1) $\because S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3)$.

$$S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - 3) .$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}) .$$

$$\therefore 4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1} .$$

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2(a_n - a_{n-1}) = 0 .$$

$$\therefore (a_n + a_{n-1}) + (a_n - a_{n-1} - 2) = 0 .$$

$\because \{a_n\}$ 各项都为正数 .

$$\therefore a_n - a_{n-1} - 2 = 0 .$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2 .$$

$$\therefore n = 1 \text{ 时 } , S_1 = \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1 - 3) .$$

$$\therefore a_1 = 3 \text{ 或 } -1 \text{ (舍去)} .$$

$\therefore \{a_n\}$ 为首项为 3 , 公差为 2 的等差数列 .

$$\therefore a_n = 2n + 1 .$$

$\therefore$ 设 $\{b_n\}$ 公差为 d .

$$\therefore b_3^2 = b_1 \cdot b_{11} , b_2 = 5 .$$

$$\therefore (5 + d)^2 = (5 - d)(5 + 9d) .$$

$$\therefore d = 3 .$$

$\therefore \{b_n\}$ 为首项为 2 , 公差为 3 的等差数列 .

$$\therefore b_n = 3n - 1 .$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \therefore c_n &= \frac{1}{a_n(2b_n - 1)} = \frac{1}{(2n + 1)(6n + 3)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n + 1)(2n - 1)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right) . \end{aligned}$$

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{n}{6n + 3} .$$

$$\therefore T_n = \frac{n}{6n+3}.$$

21 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n) - c$ ，数列 $\{b_n\}$ ($b_n > 0$) 的首项为 c ，且前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \geq 2$) .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 前 n 项和为 T_n ，问使 $T_n > \frac{1005}{2014}$ 的最小正整数 n 是多少？

答案 (1) $a_n = -\frac{2}{3^n}$ ， $b_n = 2n - 1$.

(2) 252 .

解析 (1) $\because$ 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n) - c$ ，

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时}, a_n = [f(n) - c] - [f(n-1) - c] = -\frac{2}{3^n},$$

对 $n = 1$ 也成立 .

$$\therefore \text{等比数列 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q = \frac{1}{3},$$

$$\therefore c = 1, a_1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore a_n = -\frac{2}{3^n},$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n\} \{b_n > 0\} \text{ 的首项为 } c, \text{ 且前 } n \text{ 项和 } S_n \text{ 满足 } S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} (n \geq 2).$$

$$\therefore b_1 = 1, \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1,$$

$$\therefore \{\sqrt{S_n}\} \text{ 是首项为 } 1, \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列},$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = n,$$

$$\therefore S_n = n^2,$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时}, b_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1,$$

$$\therefore b_1 = 1,$$

$$\therefore b_n = 2n - 1.$$

$$(2) \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

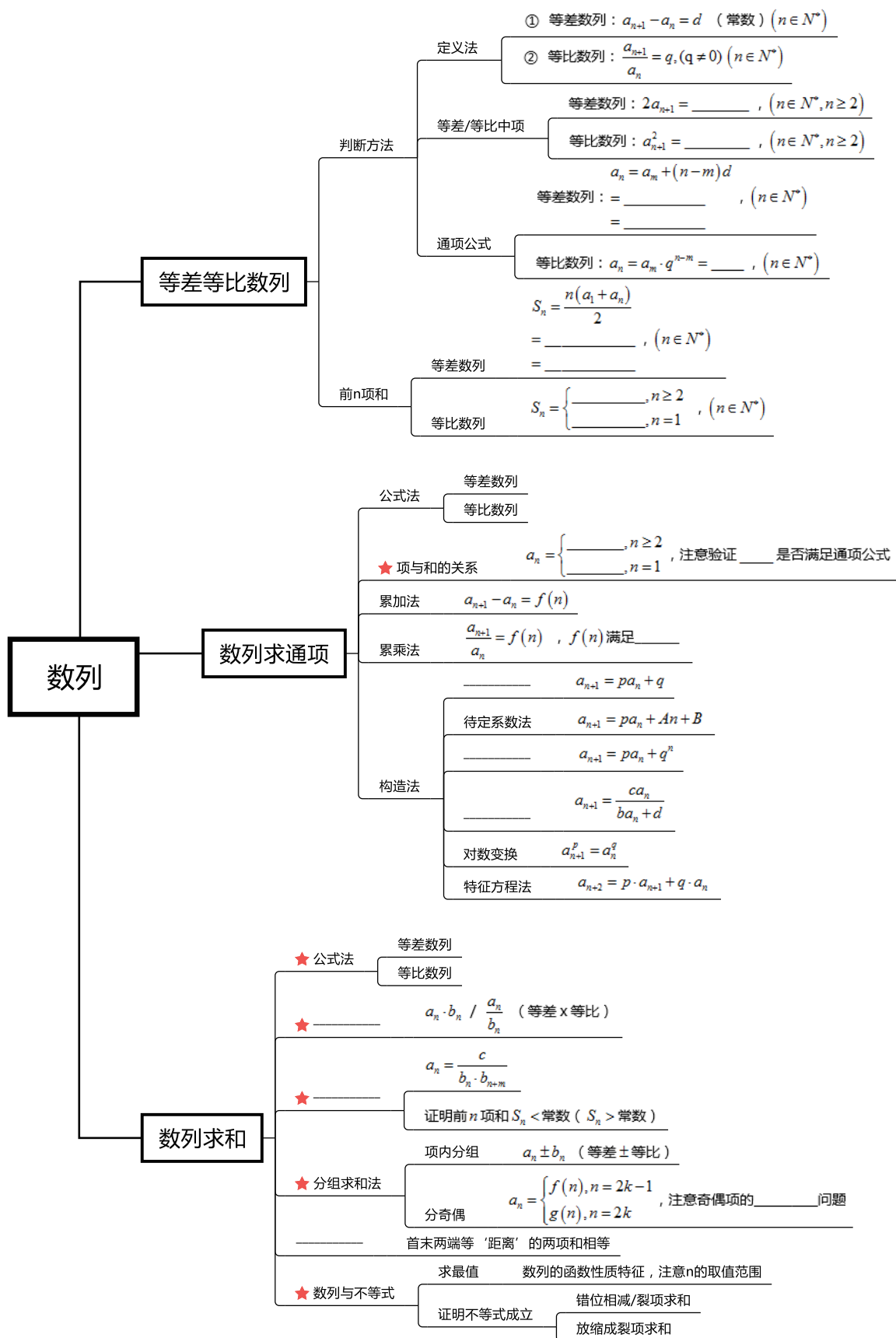
$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

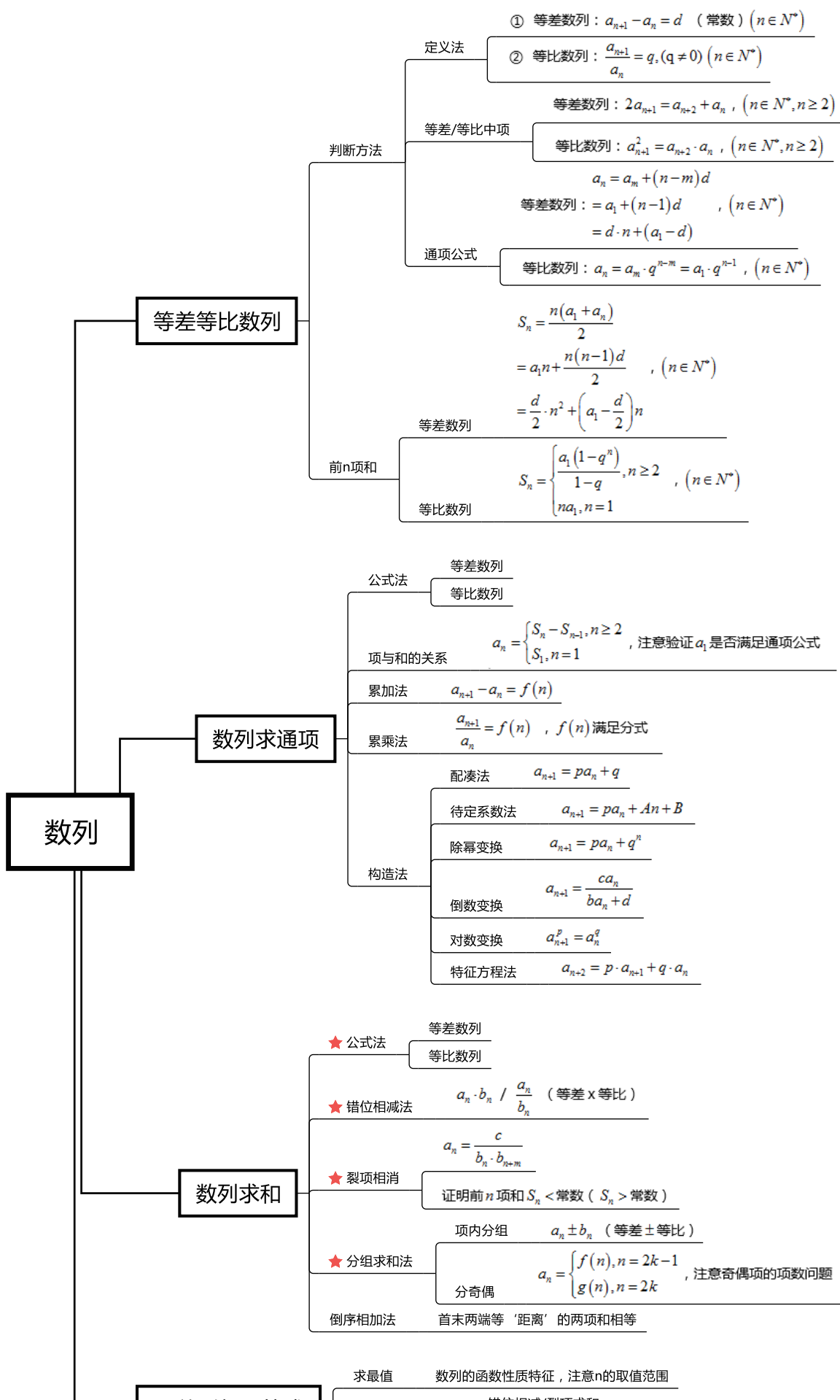
$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1},$$

$$\text{由 } T_n > \frac{1005}{2014}, \text{ 得 } \frac{n}{2n+1} > \frac{1005}{2014}, \text{ 解得 } n > 251.25,$$

$$\therefore T_n > \frac{1005}{2014} \text{ 的最小正整数 } n \text{ 是 } 252.$$

思维大导图





易错总结

- ①注意错位相减运算时剩余的项数问题、求和时的正负号问题
- ②注意裂项相消的剩余项问题，前后需保持对称
- ③注意裂项相消的系数问题，不要丢失
- ④注意分组求和中的奇偶项的项数问题，并需要综合

小憩一下

黎曼猜想

在数学界，近年来最近炒得比较火的当属黎曼猜想了，2018年9月，迈克尔·阿蒂亚声明证明黎曼猜想，9月24日，他贴出了他证明黎曼假设（猜想）的预印本。黎曼猜想如果被证实，将对数学的各个领域有一个非常显著性的突破！

可惜的是，截至目前，对他的证明的真伪仍不得而知，老数学家也已经在2019年年初过世，留给后人的只有无尽的遐想。

然而实际上，抛开那些复杂的背景之外，黎曼猜想就是讲了一个零点的故事。

简而言之，黎曼猜想的内容就是有一个复平面内的（Zeta）函数：

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ ($\text{Re}(s) > 1$) 在复平面内的解析延拓（这是什么不重要，重要的是它的结果还是一个函数），它的（非平凡）零点全在一条实部为 $\frac{1}{2}$ 的直线上！

所以，我们现在所学的这些概念其实在数学的高阶领域还是很有用的~

数学本身并不可怕，可怕的是你没有勇气去面对它。