

数列1

考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，模拟题共 40 套试卷中出现频率 100%

知识模块	考点	天津卷	一模	二模
数列	等差、等比数列求和公式、性质	2015-18;2016-18; 2017-18;2018-18	17次	11次
	裂项相消	2016-18;2018-18	11次	10次
	放缩		4次	1次
	错位相减	2015-18;2017-18	10次	8次
	分组	2019-19	3次	2次
	不等式最值	2014-19	4次	2次

考点分析



高频考点

- ①求等差数列、等比数列通项公式,求变形数列前 n 项和(如:2018年天津卷理第18题)
- ②掌握通项公式与前 n 项和公式,解决简单的变形问题,如证等式成立(如:2018年天津卷理第18题)
- ③通过通项公式求和公式,证明不等式成立(如:2016年天津卷理第18题)
- ④求新构造数列的最大项与最小项(如:2013年天津卷理第18题)



考试难点

- ①构造数列求通项公式(如:2018年天津卷理第18题)
- ②新设数列求前 n 项和(如:2015年天津卷理第18题)
- ③证明等式不式成立(如:2016年天津卷理第18题)
- ④裂项相消方式求和(如:2018年天津卷理第18题)
- ⑤注意计算错位相减出错(如:2017年天津卷理第18题)



易错点

- ①计算，特别是错位相减计算出错（如：2017年天津卷理第18题）
- ②裂项注意不要丢系数（如：2018年天津卷理第18题）
- ③分组求和丢项，计算出错

一、错位相减法

你先试试看

- 1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ （ q 为实数，且 $q \neq 1$ ）， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_2 + a_3$ ， $a_3 + a_4$ ， $a_4 + a_5$ 成等差数列.
 - （1）求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；
 - （2）设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ （ $n \in \mathbf{N}^*$ ），求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解析：

(1) 依题意 $a_3 = q$, $a_4 = 2q$, $a_5 = q^2$.

因为 $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $a_4 + a_5$ 成等差数列, 所以 $a_3 + a_4 = a_2 + a_5$,

所以 $3q = q^2 + 2$, $q = 2$ 或者 $q = 1$ (舍)

-----3分

当 $n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$;

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}$.

-----5分

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k - 1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*$.

-----6分

(2) 由 (I) 得 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*$.

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

所以 $T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$,

$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$,

-----8分

两式相减, 得

$\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n}$,

-----10分

整理得, $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*$.

-----13分

听我慢慢讲

2 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

导图总结

错位相减模型：

$$a_n \cdot b_n \text{ 或 } \frac{a_n}{b_n}$$

注意：相减之后的项数，求和时正负号等问题.

你再试试看

3 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

(1) 已知 $a_n = (3n+1) \times 2^n$, 求 S_n

(2) 已知 $a_n = \frac{3n+1}{2^n}$, 求证 $S_n < 7$



题型通解

数列的通项是一个等差数列的通项与一个等比数列通项____构成,常选用错位相减法;

①在消项时一定要注意错位相消,明白消去了哪些部分,留下的部分是什么数列,怎样利用等差数列与等比数列求和公式分组求和;

②求和化简时注意正负号及同底数合并问题.

4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.



题型通解

①遇到 $(-1)^n$ 的情况, 需要分奇偶进行讨论, 求和时注意____、____;

②第二问中遇到的错位相减法, 需要注意两式相减时____, 剩余的正项数与负项数要保持一致.

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 8n$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_n = b_n + b_{n+1}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

登堂入室

6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足： $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \dots + \frac{b_n}{3^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(3) 令 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

登峰造极

7 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为其前 n 项和，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1，公比为2的等比数列，求数列 $\{(-1)^n b_n (a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和 T_n 。

二、裂项求和

你先试试看

8 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(2) 设 $a_1 = d$ ， $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ 。

解析：

(1)

$$\text{证明：} C_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_na_{n+1} = 2d \cdot a_{n+1},$$

-----2分

$$C_{n+1} - C_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2 \text{ 为定值.}$$

$\therefore \{C_n\}$ 为等差数列；

-----5分

(2)

$$\text{证明：} T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2 = C_1 + C_3 + \cdots + C_{2n-1} = nC_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4d^2 = nC_1 + 2d^2 n(n-1) \quad (*)$$

-----8分

$$\text{由已知 } C_1 = b_2^2 - b_1^2 = a_2a_3 - a_1a_2 = 2d \cdot a_2 = 2d(a_1 + d) = 4d^2,$$

$$\text{将 } C_1 = 4d^2 \text{ 代入 } (*) \text{ 式得 } T_n = 2d^2 n(n+1),$$

-----11分

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{1}{2d^2}, \text{ 得证}$$

-----13分

听我慢慢讲

9 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

导图总结

裂项相消常见模型：

(1) 把数列的通项拆成两项之差、正负相消剩下首尾若干项。

$$① \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$② \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$③ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{a-b} (\sqrt{a} - \sqrt{b}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n});$$

$$④ \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}, \quad \frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right);$$

$$⑤ \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = 2 \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right);$$

$$⑥ (-1)^n \frac{4n}{4n^2-1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$⑦ \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{n(n+1)} = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n};$$

$$⑧ \text{若 } \{a_n\} \text{ 是公差为 } d \text{ 的等差数列, 则 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

(2) 注意裂项相消最后留下的项数问题. 注意消去了哪些项, 剩余的正项数与负项数是一样的.

你再试试看

10 数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和为 S_n

(1) 已知 $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, 求 S_n

(2) 已知 $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$, 求 S_n

(3) 已知 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$, 求 S_n

(4) 已知 $a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n+1)}$, 求 S_n

(5) 已知 $a_n = \frac{2^n}{(2^{n+1}+1)(2^{n+1}+2)}$, 求 S_n

11 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 = 1$ ， a_3 ， a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(3b_{n-1} - 1)(3b_n - 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $T_n < \frac{1}{3}$ ．

12 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = 2$ ， $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和，求 T_n 。

(3) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$ ，证明： $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{1}{32}$ 。



题型通解

①遇到等式有 a_n 与 S_n 时，一般利用_____去求通项，需验证_____时是否符合所求通项；

②第二问中的求和，其数列通项为_____形式，可以用_____法求和，此方法需要注意问题是：_____；

③第三问证明不等式问题，一般会用到_____方法。分母为三项关于 n 的式子相乘时，如同两项关于 n 的式子相乘，可以利用_____方法求和。

登堂入室

13 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$).

① 求 T_n .

② 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1}) b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}.$

14 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且满足 $a_n + S_n = 2n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求证: $\frac{1}{2a_1a_2} + \frac{1}{2^2a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{2^n a_n a_{n+1}} < \frac{1}{3}.$

15 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 = 1$ ， a_3 ， a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \cdot \frac{1}{b_n}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 。

登峰造极

16 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

17 已知直线 $l_n: y = x - \sqrt{2n}$ 与圆 $C_n: x^2 + y^2 = 2a_n + n$ 交于不同的两点 $A_n, B_n, n \in \mathbf{N}^*$. 数列 $\{a_n\}$

满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{4}|A_n B_n|^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

(2) 若 $b_n = \frac{n}{4a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 在 (2) 的条件下, 求证: 对任意正整数 n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k(T_k + k+1)} < 2.$$

三、试炼之地



错位相减

18 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，当 $n \geq 2$ 时，满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$ ，且 $a_1 = 1$ 。

(1) 求证：数列 $\{S_n\}$ 是等比数列。

(2) 设 $b_n = (\log_4 S_n) \cdot S_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_{10} = 28$ ， $S_8 = 92$ ，数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，

总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1$ 成立。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。



裂项相消

20 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 是

公差为正数的等差数列，且 $b_2 = 5$ ， b_1, b_3, b_{11} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{1}{a_n(2b_n - 1)}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

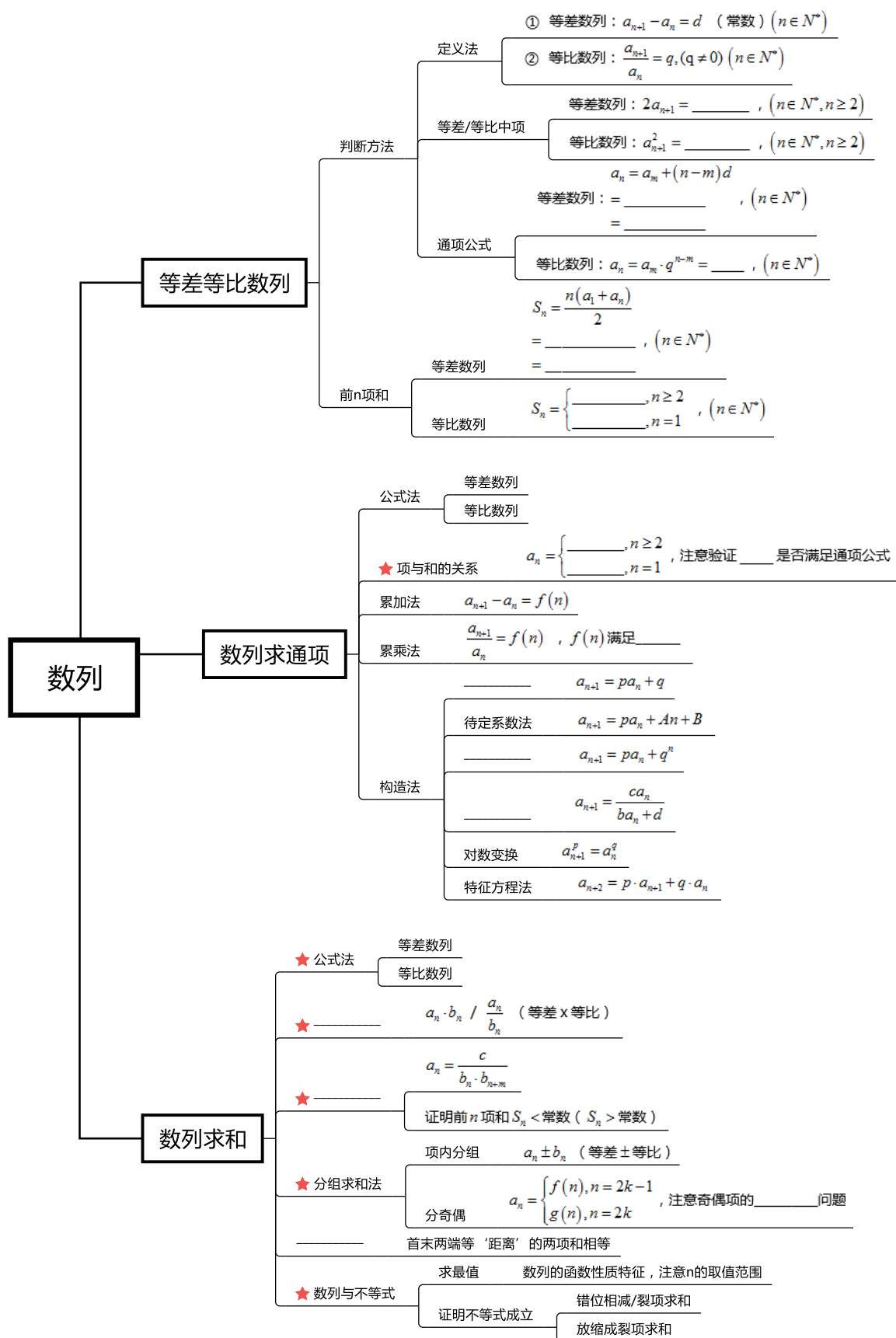
21 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n) - c$ ，数列 $\{b_n\} \{b_n > 0\}$ 的首项为 c ，且前

n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 前 n 项和为 T_n ，问使 $T_n > \frac{1005}{2014}$ 的最小正整数 n 是多少？

思维大导图



易错总结

- ①注意错位相减运算时剩余的项数问题、求和时的正负号问题
- ②注意裂项相消的剩余项问题，前后需保持对称
- ③注意裂项相消的系数问题，不要丢失
- ④注意分组求和中的奇偶项的项数问题，并需要综合

小憩一下

黎曼猜想

在数学界，近年来最近炒得比较火的当属黎曼猜想了，2018年9月，迈克尔·阿蒂亚声明证明黎曼猜想，9月24日，他贴出了他证明黎曼假设（猜想）的预印本。黎曼猜想如果被证实，将对数学的各个领域有一个非常显著性的突破！

可惜的是，截至目前，对他的证明的真伪仍不得而知，老数学家也已经在2019年年初过世，留给后人的只有无尽的遐想。

然而实际上，抛开那些复杂的背景之外，黎曼猜想就是讲了一个零点的故事。

简而言之，黎曼猜想的内容就是有一个复平面内的（*Zeta*）函数：

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ ($\text{Re}(s) > 1$) 在复平面内的解析延拓（这是什么不重要，重要的是它的结果还是一个函数），它的（非平凡）零点全在一条实部为 $\frac{1}{2}$ 的直线上！

所以，我们现在所学的这些概念其实在数学的高阶领域还是很有用的~

数学本身并不可怕，可怕的是你没有勇气去面对它。