

导数综合（解答）

本段落仅教师可见

本讲讲义主要研究导数中的极最值问题、零点问题、切线问题、利用导数证明不等式问题.

年份	2019	2018	2017	2016	2015	2014
题型	零点+证明 不等式	切线+极 值	切线+证 明不等式	极值+证明 等式	零点+证 明不等式	零点+证 明不等式

本讲讲义针对这三类题型设计了四个一级标题，每个标题下都用思维导图总结了各类模型的通解通法，再所有一级标题结束后设置了一个挖空式的思维导图，旨在让学生自我总结课上所学重点内容，检验学习成果。

讲义制作人：闫聪聪——096277

讲义审核人：天津教研团队

考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

知识点	考点	天津卷	一模	二模
导数	极最值问题	2016-20；2018-20	11	13
	零点问题	2015-20；2019-20	6	5
	切线问题	2017-20；2018-20	5	8
	利用导数证明不等式	2014-20；2015-20；2016-20； 2017-20；2019-20	9	7

考点分析



高频考点

- ①求函数极值最值
- ②求切线方程或已知切线方程求参数范围
- ③求零点个数或零点存在问题
- ④证明不等式问题



考试难点

①利用导数证明不等式（如：2019年天津卷20题）

②构造函数证明题（如：2018天津卷20题）



易错点

①渐近线影响零点存在

②极值最值与零点的关系

一、导数极最值与零点问题

1. 极值问题

你先试试看

1 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} - a \ln x$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 当 $a = -1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间。

(3) 若函数 $g(x) = x^2 + f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有极值，求 a 的取值范围。

答案

(1) $x + y - 3 = 0$ 。

(2) 当 $a \geq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减，在 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增。

(3) $(-\infty, 0)$ 。

解析

(1) 当 $a = -1$ 时，

$$f(x) = \frac{2}{x} + \ln x,$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x},$$

$$\text{又 } f(1) = 2, f'(1) = -1,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 2 = -(x - 1)$ ，

即 $x + y - 3 = 0$.

(2) 由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{又 } f'(x) = -\frac{ax+2}{x^2} ,$$

当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,

当 $a < 0$ 时 ,

由 $f'(x) < 0$ 得 ,

$$0 < x < -\frac{2}{a} ,$$

由 $f'(x) > 0$ 得 , $x > -\frac{2}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减 , 在 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增 .

(3) $\because g(x) = x^2 + f(x)$,

$\therefore g(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore g'(x) = \frac{2x^3 - ax - 2}{x^2} ,$$

令 $h(x) = 2x^3 - ax - 2$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\therefore h'(x) = 6x^2 - a ,$$

当 $a < 0$ 时 ,

$\therefore h'(x) > 0$ 恒成立 ,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

又 $h(0) = -2 < 0$, $h(1) = -a > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内存在一个零点 , 也是 $g'(x)$ 的零点 ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值 ;

当 $a \geq 0$ 时 ,

当 $0 < x < 1$ 时 , $h(x) < 0$,

即 $g'(x) < 0$ 恒成立 ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无极值 .

综上所述 , 若 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值 , 则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

解析 :

(1) 当 $a = -1$ 时 ,

$$f(x) = \frac{2}{x} + \ln x ,$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} ,$$

-----2分

又 $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$,

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 2 = -(x - 1)$,

即 $x + y - 3 = 0$.

-----4分

(2) 由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

又 $f'(x) = -\frac{ax+2}{x^2}$,

-----6分

当 $a \geq 0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,

当 $a < 0$ 时 ,

由 $f'(x) < 0$ 得 ,

$0 < x < -\frac{2}{a}$,

由 $f'(x) > 0$ 得 , $x > -\frac{2}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减 , 在 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增 .

-----9分

(3) $\because g(x) = x^2 + f(x)$,

$\therefore g(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$\therefore g'(x) = \frac{2x^3 - ax - 2}{x^2}$,

令 $h(x) = 2x^3 - ax - 2$, $x \in (0, +\infty)$,

$\therefore h'(x) = 6x^2 - a$,

-----10分

当 $a < 0$ 时 ,

$\therefore h'(x) > 0$ 恒成立 ,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

又 $h(0) = -2 < 0$, $h(1) = -a > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内存在一个零点 , 也是 $g'(x)$ 的零点 ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值 ;

-----12分

当 $a \geq 0$ 时 ,

当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$,

即 $g'(x) < 0$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无极值.

综上所述, 若 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值, 则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

-----14分

听我慢慢讲

2 函数 $f(x) = 2(a-1)\ln(e^x - 1) + e^x$, $g(x) = (4a-2)x$, 其中 a 为常数 ($a > \frac{1}{2}$), $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, 证明 $f'(x) \geq 4$.

(2) 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, x_0 满足 $f(x_0) = 4x_0$, 证明: 当 $x > x_0$ 时, $f(x) > 4x$.

(3) 设 x_1, x_2 分别是函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极大值点和极小值点, 且 $x_2 - x_1 > \ln 2$, 求 a 的取值范围.

答案 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

解析 (1) $a = \frac{3}{2}$ 时, 由 $e^x - 1 > 0$ 得 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} + 2 \geq 2\sqrt{(e^x - 1) \cdot \frac{1}{e^x - 1}} + 2 = 4.$$

(2) 构造函数 $F(x) = f(x) - 4x = \ln(e^x - 1) + e^x - 4x$,

$$\therefore f(x_0) = 4x_0, \therefore F(x_0) = 0,$$

$$\text{由 (1) 得 } F'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} + e^x - 4 \geq 0,$$

故 $F(x)$ 在定义域内是增函数,

$$\therefore x > x_0 \text{ 时, } F(x) > F(x_0) = 0,$$

$$\text{故 } f(x) > 4x.$$

(3) $\therefore h(x) = 2(a-1)\ln(e^x - 1) + e^x - (4a-2)x$,

$$\therefore h'(x) = 2(a-1)\frac{e^x}{e^x - 1} + e^x - (4a-2),$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 化简得: } e^{2x} - (2a+1)e^x + (4a-2) = 0,$$

解得： $x = \ln 2$ 或 $\ln(2a - 1)$ ，

① $2a - 1 > 2$ 即 $a > \frac{3}{2}$ 时， $x_1 = \ln 2$ ， $x_2 = \ln(2a - 1)$ ，

$\therefore x_2 - x_1 > \ln 2$ ， $\therefore \ln(2a - 1) - \ln 2 > \ln 2$ ，

$\therefore a > \frac{5}{2}$ 。

② $2a - 1 < 2$ 即 $a < \frac{3}{2}$ 时， $x_1 = \ln(2a - 1)$ ， $x_2 = \ln 2$ ，

$\therefore x_2 - x_1 > \ln 2$ ， $\therefore \ln 2 - \ln(2a - 1) > \ln 2$ ，

$\therefore \frac{1}{2} < a < 1$ (舍)，

③ $2a - 1 = 2$ 即 $a = \frac{3}{2}$ 时，无极值点，不满足题意，

综上， a 的范围是 $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 。

题型通解

① 由 $h'(x) = 0$ ，解得两个极值点 $\ln 2$ 和 $\ln(2a - 1)$ ；

② 分类讨论 $2a - 1$ 与 2 的大小关系，判断极大值点和极小值点。

你再试试看

3 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1$ 。

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 若函数 $g(x) = af(x) - \frac{1}{2}x^2$ ($a \in \mathbf{R}$) 在其定义域内有两个不同的极值点，求 a 的取值范围。

(3) 在 (2) 的条件下，记两个极值点分别为 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，若不等式

$a < mx_1 + (1 - m)x_2$ ($m > 0$) 恒成立，求 m 的取值范围。

答案 (1) $y = 0$ 。

(2) $(e, +\infty)$ 。

(3) $m \in (0, 1)$ 。

解析 (1) 由题意得， $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ ，

则 $f'(1) = 0$ ，且 $f(1) = 0$ ，

即在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = 0$.

$$(2) \quad g(x) = af(x) - \frac{1}{2}x^2 = a(x \ln x - x + 1) - \frac{1}{2}x^2 ,$$

$$\text{则 } x > 0, \quad g'(x) = a \ln x - x ,$$

因为函数 $g(x)$ 在定义域内有两个不同的极值点 ,

所以 $g'(x) = a \ln x - x = 0$ 有两个不同的正根 ,

$$g''(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x} , \text{ 由 } g''(x) = 0 \text{ 得 } x = a > 0 ,$$

当 $x \in (0, a)$ 时 , $g''(x) > 0$, 则 $g'(x)$ 在 $(0, a)$ 上递增 ,

当 $x \in (a, +\infty)$ 时 , $g''(x) < 0$, 则 $g'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上递减 ,

所以 $g'(x) = a \ln x - x$ 的最大值是 $g'(a)$,

因为 $g'(x) = a \ln x - x = 0$ 有两个不同的正根 ,

$$\text{则 } g'(a) = a \ln a - a > 0 , \text{ 即 } \ln a > 1 , \text{ 解得 } a > e ,$$

所以 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

(3) 由(2)和条件得 ,

$$g'(x) = a \ln x - x = 0 \text{ 有两个不同的正根分别是 } x_1, x_2 ,$$

$$\text{且 } x_1 < x_2 , \text{ 且 } x_1 < a < x_2 ,$$

①当 $m \in (0, 1)$ 时 , 有 $1 - m > 0$,

$$\because mx_1 + (1 - m)x_2 > mx_1 + (1 - m)x_1 = x_1 ,$$

$$mx_1 + (1 - m)x_2 < mx_2 + (1 - m)x_2 = x_2 ,$$

得 $mx_1 + (1 - m)x_2 \in (x_1, x_2)$, 符合条件 ;

②当 $m \geq 1$ 时 , $1 - m \leq 0$,

$$\because mx_1 + (1 - m)x_2 \leq mx_1 + (1 - m)x_1 = x_1 ,$$

$$mx_1 + (1 - m)x_2 \leq mx_2 + (1 - m)x_2 = x_2 ,$$

可得 $mx_1 + (1 - m)x_2 \leq x_1$, 与条件不符 ,

$\therefore$ 综合①②得 $m \in (0, 1)$.

2. 最值问题

你先试试看

4 设函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若直线 $y = 3x - 1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线, 求实数 a 的值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的最大值为 $1 - ae$ (e 为自然对数的底数), 求实数 a 的值.

答案 (1) $a = -2$.

(2) $a = \frac{1}{e}$.

解析 (1) 由 $f(x) = \ln x - ax$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 3$,

$$\therefore x = \frac{1}{a+3}, \text{ 则 } f\left(\frac{1}{a+3}\right) = \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3},$$

$$\therefore \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3} = \frac{3}{a+3} - 1, \text{ 得 } \ln \frac{1}{a+3} = 0, \text{ 即 } a = -2.$$

$$(2) f'(x) = \frac{1}{x} - a,$$

当 $a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上为增函数,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(e^2) = 2 - ae^2 = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e^2 - e}$ (舍);

当 $\frac{1}{e^2} < a < 1$ 时, 若 $x \in \left[1, \frac{1}{a}\right]$, $f'(x) > 0$, $x \in \left[\frac{1}{a}, e^2\right]$, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上先增后减, 故 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$,

由 $-\ln a - 1 = 1 - ae$, 解得 $a = \frac{1}{e}$;

当 $a \geq 1$ 时, 故当 $x \in [1, e^2]$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 是 $[1, e^2]$ 上的减函数,

故 $f(x)_{\max} = f(1) = -a = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e-1}$ (舍);

综上, $a = \frac{1}{e}$.

解析:

$$(1) \text{ 由 } f(x) = \ln x - ax, \text{ 得 } f'(x) = \frac{1}{x} - a = 3,$$

-----1分

$$\therefore x = \frac{1}{a+3}, \text{ 则 } f\left(\frac{1}{a+3}\right) = \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3},$$

$$\therefore \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3} = \frac{3}{a+3} - 1, \text{ 得 } \ln \frac{1}{a+3} = 0, \text{ 即 } a = -2.$$

-----4分

$$(2) f'(x) = \frac{1}{x} - a,$$

当 $a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上为增函数,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(e^2) = 2 - ae^2 = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e^2 - e}$ (舍);

-----6分

当 $\frac{1}{e^2} < a < 1$ 时, 若 $x \in \left[1, \frac{1}{a}\right]$, $f'(x) > 0$, $x \in \left[\frac{1}{a}, e^2\right]$, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上先增后减, 故 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$,

由 $-\ln a - 1 = 1 - ae$, 解得 $a = \frac{1}{e}$;

-----8分

当 $a \geq 1$ 时, 故当 $x \in [1, e^2]$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 是 $[1, e^2]$ 上的减函数,

故 $f(x)_{\max} = f(1) = -a = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e-1}$ (舍);

综上, $a = \frac{1}{e}$.

-----10分

听我慢慢讲

5 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$), $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求实数 a, b 的值.

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值.

答案 (1) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.

(2) a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(3) $h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}$.

解析 (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$), $g(x) = bx^2 + 2b - 1$,

所以 $f'(x) = x^2 - a, g'(x) = 2bx$.

因为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线,

所以 $f(1) = g(1)$, 且 $f'(1) = g'(1)$,

即 $\frac{1}{3} - a = b + 2b - 1$, 且 $1 - a = 2b$,

解得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$ ($a > 0$),

所以 $h'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$.

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = a > 0$.

当 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, a)$,

故 $h(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减.

又函数 $h(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 所以有:

$$\begin{cases} h(-2) < 0 \\ h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{8}{3} + 2(1-a) + 2a - a < 0 \\ -\frac{1}{3} + \frac{1-a}{2} + a - a > 0 \\ -a < 0 \end{cases},$$

解得: $0 < a < \frac{1}{3}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{3})$.

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$,

则由(2)可知, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为

$(-1, 1)$.

因为 $h(-2) = -\frac{5}{3}$, $h(1) = -\frac{5}{3}$, 所以 $h(-2) = h(1)$.

① 当 $t + 3 < -1$, 即 $t < -2$ 时, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

② 当 $-2 \leq t < 1$ 时, $h(x)_{\min} = h(-2) = -\frac{5}{3}$.

③ 当 $t \geq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上单调递增, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

综上所述, 函数 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最小值

$$h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}.$$

你再试试看

6 设函数 $f(x) = ae^x(x+1)$ (其中 $e = 2.71828 \dots$), $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知它们在 $x = 0$ 处有相同的切线.

(1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ ($t > -3$) 上的最小值.

(3) 若对 $\forall x \geq -2$, $kf(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

答案

(1) $f(x) = 2e^x(x+1)$, $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

(2) $f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}$.

(3) $[1, e^2]$.

解析

(1) $f'(x) = ae^x(x+2)$, $g'(x) = 2x + b$,

由题意, 两函数在 $x=0$ 处有相同的切线.

$\therefore f'(0) = 2a$, $g'(0) = b$,

$\therefore 2a = b$, $f(0) = a = g(0) = 2$,

$\therefore a = 2$, $b = 4$,

$\therefore f(x) = 2e^x(x+1)$, $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

(2) $f'(x) = 2e^x(x+2)$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > -2$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < -2$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-\infty, -2)$ 单调递减.

$\therefore t > -3$,

$\therefore t+1 > -2$.

① 当 $-3 < t < -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, -2]$ 单调递减, $[-2, t+1]$ 单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(-2) = -2e^{-2}$.

② 当 $t \geq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(t) = 2e^t(t+1)$;

$\therefore f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}$.

(3) 令 $F(x) = kf(x) - g(x) = 2ke^x(x+1) - x^2 - 4x - 2$,

由题意当 $x \geq -2$, $F(x)_{\min} \geq 0$,

$\therefore \forall x \geq -2$, $kf(x) \geq g(x)$ 恒成立,

$\therefore F(0) = 2k - 2 \geq 0$,

$\therefore k \geq 1$

$F'(x) = 2ke^x(x+1) + 2ke^x - 2x - 4 = 2(x+2)(ke^x - 1)$,

$\therefore x \geq -2$, 由 $F'(x) > 0$ 得 $e^x > \frac{1}{k}$,

$\therefore x > \ln \frac{1}{k}$; 由 $F'(x) < 0$ 得 $x < \ln \frac{1}{k}$,

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{k}]$ 单调递减, 在 $[\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增

① 当 $\ln \frac{1}{k} < -2$, 即 $k > e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 单调递增,

$$F(x)_{\min} = F(-2) = -2ke^{-2} + 2 = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) < 0, \text{ 不满足 } F(x)_{\min} \geq 0.$$

②当 $\ln \frac{1}{k} = -2$, 即 $k = e^2$ 时, 由①知, $F(x)_{\min} = F(-2) = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) = 0$, 满足 $F(x)_{\min} \geq 0$.

③当 $\ln \frac{1}{k} > -2$, 即 $1 \leq k < e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, \ln \frac{1}{k}]$ 单调递减, 在 $[\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增, $F(x)_{\min} = F\left(\ln \frac{1}{k}\right) = \ln k(2 - \ln k) > 0$, 满足 $F(x)_{\min} \geq 0$.

综上所述, 满足题意的 k 的取值范围为 $[1, e^2]$.

你先试试看

7 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极值.
- (3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围.

答案

- (1) $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,
 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) 当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,
 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.
 $\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.
- (3) $a > 1$.

解析

- (1) $f(x) = \ln x^2 - x^2 + x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$$

$$= \frac{(-x+1)(2x+1)}{x},$$
 $\therefore x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,
 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-2x^2 + (2a-1)x + a}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(-x+a)(2x+1)}{x},$$
 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,
 当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.

(3) 当 $a = 0$ 时,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意,

当 $a \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-(2x+1)(x-a)}{x},$$

$$f'(x) = 0 \text{ 时, } x = -\frac{1}{2} \text{ 或 } a,$$

$$\text{设 } g(x) = -(2x+1)(x-a),$$

$$\therefore x \in (0, +\infty),$$

$\therefore g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,

$g(x) > 0$ 时, $f(x)$ 单调增,

$g(x) < 0$ 时, $f(x)$ 单调减,

$\therefore f(x)$ 有两个而不同的两点,

则 $f(x)$ 不可在 $(0, +\infty)$ 恒单调,

即只有 $a > 0$ 时满足 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调减,

$f(x)$ 可能存在两个零点, 且由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 取最大, $f(a) > 0$,

$$f(a) = a \ln a - a^2 + (2a-1)a > 0.$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore \ln a - a + 2a - 1 > 0 \text{ 即 } \ln a > 1 - a,$$

得: $a > 1$.

解析:

$$(1) f(x) = \ln x^2 - x^2 + x,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \\ &= \frac{(-x+1)(2x+1)}{x}, \end{aligned}$$

$\therefore x \in (0, 1), f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$x \in (1, +\infty), f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

-----4分

$$(2) f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-2x^2 + (2a-1)x + a}{x},$$

$$f'(x) = \frac{(-x+a)(2x+1)}{x},$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,

-----6分

当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.

-----9分

(3) 当 $a = 0$ 时,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意,

-----10分

当 $a \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-(2x+1)(x-a)}{x},$$

$$f'(x) = 0 \text{ 时, } x = -\frac{1}{2} \text{ 或 } a,$$

$$\text{设 } g(x) = -(2x+1)(x-a),$$

$$\because x \in (0, +\infty),$$

$\therefore g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,

$g(x) > 0$ 时, $f(x)$ 单调增,

$g(x) < 0$ 时, $f(x)$ 单调减,

$\therefore f(x)$ 有两个而不同的两点,

则 $f(x)$ 不可在 $(0, +\infty)$ 恒单调,

即只有 $a > 0$ 时满足 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调减,

$f(x)$ 可能存在两个零点, 且由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 取最大, $f(a) > 0$,

$$f(a) = a \ln a - a^2 + (2a-1)a > 0.$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore \ln a - a + 2a - 1 > 0 \text{ 即 } \ln a > 1 - a,$$

得: $a > 1$.

-----14分

听我慢慢讲

8 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + a \ln x$.

(1) 若 $a < 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 在 (1) 的条件下, 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

答案

(1) 单调递减区间为 $(0, \sqrt{-a})$, 单调递增区间为 $(\sqrt{-a}, +\infty)$, 有极小值 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$.

(2) 见解析.

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = x + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a}{x},$$

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \sqrt{-a}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下.

x	$(0, \sqrt{-a})$	$\sqrt{-a}$	$(\sqrt{-a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$	$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \sqrt{-a})$, 单调递增区间是 $(\sqrt{-a}, +\infty)$,

$f(x)$ 在 $x = \sqrt{-a}$ 处取得极小值 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$.

(2) 由 (1) 知, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$,

因为 $f(x)$ 存在零点, 所以 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2} \leq 0$, 从而 $a \leq -e$,

当 $a = -e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且 $f(\sqrt{e}) = 0$,

所以 $x = \sqrt{e}$ 是 $f(x)$

在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上的唯一零点,

当 $a < -e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递减,

且 $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, $f(\sqrt{e}) = \frac{e+a}{2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上所述, 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上仅有一个零点.



题型通解

【基础题型】

① 判断函数零点个数或方程解的个数

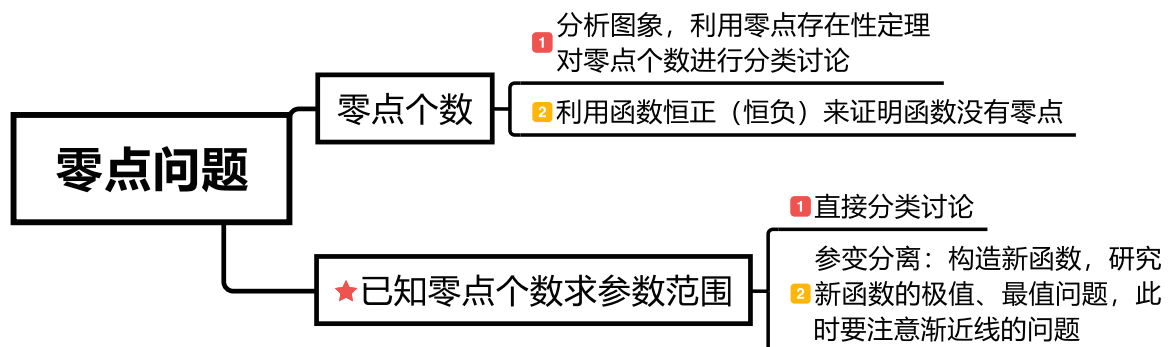
②根据零点个数或方程解的个数求参数范围

【解题技巧】

①分类讨论或参变分离

②构造函数

导图总结



你再试试看

9 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值.

(2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 探讨函数 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$ 是否存在零点? 若存在, 求出函数 $F(x)$ 的零点, 若不存在, 请说明理由.

答案 (1) 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$, 当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = t \ln t$.
 (2) $(-\infty, 4]$.
 (3) 不存在, 理由见解析.

解析 (1) $f(x) = x \ln x$,

$f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$.

①当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, 在 $x \in [t, \frac{1}{e})$ 上 $f'(x) < 0$; 在 $x \in (\frac{1}{e}, t+2]$ 上 $f'(x) > 0$.

因此, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极小值, 也是最小值. $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$.

②当 $t \geq \frac{1}{e}$, $f'(x) \geq 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增, $f_{\min}(x) = f(t) = t \ln t$.

(2) 由对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

即有 $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$.

即 $a \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ 恒成立,

$$\text{令 } h(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}, h'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2},$$

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数,

$$\therefore a \leq h(x)_{\min} = h(1) = 4.$$

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

(3) 令 $m(x) = 2x \ln x$,

$$m'(x) = 2(1 + \ln x),$$

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 递减;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 递增;

$$\therefore m(x) \text{ 的最小值为 } m\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e},$$

$$\text{则 } 2x \ln x \geq -\frac{2}{e},$$

$$\therefore \ln x \geq -\frac{1}{ex},$$

$$F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = 0 \text{ ①}$$

$$\text{则 } F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^x} \right),$$

$$\text{令 } G(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}, \text{ 则 } G'(x) = \frac{x-1}{e^x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$, $G(x)$ 递增;

$$\therefore G(x) \geq G(1) = 0 \text{ ②}$$

$$\therefore F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right) \geq 0,$$

$\therefore$ ①②中取等号的条件不同,

$\therefore F(x) > 0$, 故函数 $F(x)$ 没有零点.

题型通解

①由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, 则可转化 $F(x) \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right)$, 由单调性判断 $F(x) > 0$, 可得不存在零点.

②由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, 将函数转化成 $x \ln x = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, 设 $h(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$,

$h(x)_{\max} = h(1) = -\frac{1}{e}$, 但两个函数在不同位置取到最值, 故可得无零点.

二、利用导数证明不等式

你先试试看

10 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

答案

(1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,
 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由已知, 有 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

因此, 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,

有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,

有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 证明: 记 $h(x) = f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

依题意及 (1), 有 $g(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

$$\text{故 } h'(x) = f'(x) + g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + g(x)(-1) = g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) < 0 ,$$

因此 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递减 ,

$$\text{进而 } h(x) \geq h \left(\frac{\pi}{2} \right) = f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 ,$$

所以 , 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时 ,

$$f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \geq 0 .$$

(3) 证明 : 依题意 , $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$,

$$\text{即 } e^{x_n} \cos x_n = 1 , \text{ 记 } y_n = x_n - 2n\pi ,$$

$$\text{则 } y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) ,$$

$$\text{且 } f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in \mathbf{N}) ,$$

$$\text{由 } f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0) \text{ 及 (1) ,}$$

得 $y_n \geq y_0$, 由 (2) 知 ,

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 时 , } g'(x) < 0 ,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上为减函数 ,

$$\text{因此 } g(y_n) \leq g(y_0) < g \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0 ,$$

$$\text{又由 (2) 知 , } f(y_n) + g(y_n) \left(\frac{\pi}{2} - y_n \right) \geq 0 ,$$

$$\text{故 } \frac{\pi}{2} - y_n \leq - \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = - \frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq \frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}$$

$$= \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0} (\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0} ,$$

$$\text{所以 , } 2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0} .$$

解析 :

$$(1) \text{ 由已知 , 有 } f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) ,$$

$$\text{因此 , 当 } x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right) (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时 ,}$$

$$\text{有 } \sin x > \cos x , \text{ 得 } f'(x) < 0 ,$$

则 $f(x)$ 单调递减 ;

$$\text{当 } x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right) (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时 ,}$$

$$\text{有 } \sin x < \cos x , \text{ 得 } f'(x) > 0 ,$$

则 $f(x)$ 单调递增 ,

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z}) ,$$

$$f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z}) .$$

-----4分

(2)证明：记 $h(x) = f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$,

依题意及 (1) , 有 $g(x) = e^x (\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ 时 , $g'(x) < 0$,

故 $h'(x) = f'(x) + g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + g(x)(-1) = g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) < 0$,

因此 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递减 ,

-----6分

进而 $h(x) \geq h \left(\frac{\pi}{2} \right) = f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$,

所以 , 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时 ,

$f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \geq 0$.

-----9分

(3)证明：依题意 , $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$,

即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$, 记 $y_n = x_n - 2n\pi$,

则 $y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$,

且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in \mathbf{N})$,

由 $f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$ 及 (1) ,

得 $y_n \geq y_0$, 由 (2) 知 ,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ 时 , $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上为减函数 ,

-----12分

因此 $g(y_n) \leq g(y_0) < g \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$,

又由 (2) 知 , $f(y_n) + g(y_n) \left(\frac{\pi}{2} - y_n \right) \geq 0$,

故 $\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq \frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}$

$= \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0} (\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$,

所以 , $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

-----14分

听我慢慢讲

11 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, 其中 $a > 2$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 求 a 的取值范围 .

(3) 设 $a \in (3, 4)$, $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证 : $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \frac{1}{x_n}$.

答案

(1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$, 单调减区间为 $(1, a-1)$.

(2) $(2, 5]$.

(3) 证明见解析 .

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \in (0, +\infty)$,

$$f'(x) = x - a + \frac{a-1}{x} = \frac{x^2 - ax + a-1}{x} ,$$

令 $f'(x) = 0$, 则 $x^2 - ax + a-1 = 0$, 即 $(x-1)[x-(a-1)] = 0$,

解得 $x = 1$ 或 $x = a-1$,

$\because a > 2$,

$\therefore a-1 > 1$,

由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$ 或 $x > a-1$,

由 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < a-1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$,

单调减区间为 $(1, a-1)$.

(2) 设 $x_1 > x_2$, 则不等式 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ 等价于 $f(x_1) - f(x_2) > x_2 - x_1$,

整理得 , $f(x_1) + x_1 > f(x_2) + x_2$,

$$\text{令 } g(x) = f(x) + x = \frac{1}{2}x^2 - (a-1)x + (a-1)\ln x ,$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数 ,

$$\because g'(x) = x - (a-1) + \frac{a-1}{x} ,$$

$$\therefore x - (a-1) + \frac{a-1}{x} \geq 0 \text{ 恒成立 ,}$$

$$\text{而 } x + \frac{a-1}{x} \geq 2\sqrt{a-1} ,$$

$$\therefore 2\sqrt{a-1} \geq a-1 ,$$

$\because a > 2$,

$$\therefore \sqrt{a-1} \leq 2,$$

$\therefore 2 < a \leq 5$, 即 a 的取值范围是 $(2, 5]$.

(3) $\because a \in (3, 4)$ 由 (1) 可知当 $x \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数,

$$\text{而 } x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \in (1, a-1), x_1 = 2 \in (1, a-1),$$

那么 $x_{n+1} < x_1, f(x_{n+1}) < f(x_1)$,

$$\therefore |f(x_{n+1}) - f(x_1)| = f(x_{n+1}) - f(x_1),$$

$$\text{由 (2) 知 } \frac{f(x_{n+1}) - f(x_1)}{x_{n+1} - x_1} > -1,$$

$$\therefore f(x_{n+1}) - f(x_1) < x_{n+1} - x_1 = 2 - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{x_n},$$

$$\text{即 } |f(x_{n+1}) - f(x_1)| < \frac{1}{x_n}.$$

题型通解

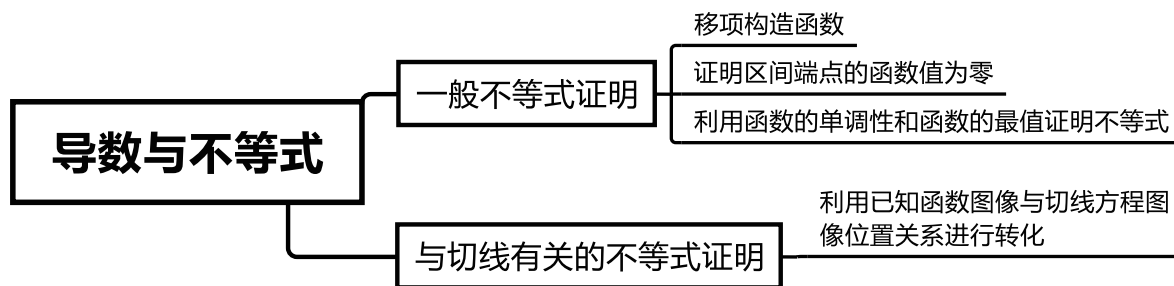
① 由 (1) 知当 $x \in (1, a-1) \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数, 令 $x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}, x_1 = 2$;

② 判断 $x_n < x_1, f(x_{n+1}) < f(x_1)$, 直接去绝对值, 利用 (2) 结论, 整理得结论;

③ 一般 (3) 的证明过程, 要用到前两问的结论, 要注意应用.

注意: 遇到绝对值不等式或方程时, 通常要判断式子的正负去绝对值, 如果判断不了需要分情况讨论.

导图总结



你再试试看

12 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$).

(1) 求实数 a 的值.

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, 都有 $f(x) < \frac{m}{2x - x^2}$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

(3) 若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明: $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

答案

(1) $a = 1$.

(2) $m > \frac{1}{e}$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由题意得 $f'(x) = \frac{a(1-x)}{e^x}$, 设切点 $(x_0, \frac{1}{e})$,

所以 $f'(x_0) = 0$, 得 $x_0 = 1$. 则 $\frac{1}{e} = \frac{a}{e}$,

$\therefore a = 1$.

(2) 由(1)知 $f(x) = \frac{x}{e^x} < \frac{m}{2x-x^2}$ 对任意 $x \in (0, 2)$ 都成立,

$\therefore 2x-x^2 > 0$, 即 $m > \frac{2x^2-x^3}{e^x}$ 对任意 $x \in (0, 2)$ 都成立,

令 $h(x) = \frac{2x^2-x^3}{e^x}$, $h'(x) = \frac{x(x-1)(x-4)}{e^x} = 0$, $x = 1$,

$\therefore x \in (0, 1)$, $h'(x) > 0$;

$\therefore x \in (1, 2)$, $h'(x) < 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单增, $(1, 2)$ 上单减,

$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}$,

$\therefore h(x) \leq h(1) = \frac{1}{e}$,

$\therefore m > \frac{1}{e}$.

(3) 由题意知函数 $g(x) = \ln x - x - b$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

因为 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点,

所以 $\begin{cases} x_1 + b = \ln x_1 \\ x_2 + b = \ln x_2 \end{cases}$, 相减得 $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$,

不妨令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 则 $x_2 = tx_1$, 则 $tx_1 - x_1 = \ln t$,

所以 $x_1 = \frac{1}{t-1} \ln t$, $x_2 = \frac{t}{t-1} \ln t$,

要证 $g'(x_1) + g'(x_2) > g'(\frac{x_1+x_2}{2})$,

只要证 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{x_1+x_2} + 1$,

只要证 $\frac{t-1}{\ln t} + \frac{t-1}{t \ln t} > \frac{2(t-1)}{(1+t) \ln t} + 1$,

即证 $t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t > 0$,

令 $\varphi(t) = t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t$,

$\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1}{t^2(1+t)^2}$,

令 $m(t) = t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1$, $m'(t) = 4t^3 + 3t^2 - 8t + 1$,

$m''(t) = 12t^2 + 6t - 8 > 0$ 对 $t > 1$ 恒成立,

$\therefore m'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增 ,
 $\therefore m'(t) > m'(1) = 0$,
 $\therefore m(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增 ,
 $\therefore m(t) > m(1) = 0$,
 即 $\varphi'(t) > 0$,
 $\therefore \varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增 ,
 $\therefore \varphi(t) > \varphi(1) = 0$, 即原不等式成立 .

题型通解

① 因为 x_1, x_2 为零点, 所以满足 $g(x) = 0$, 这样可以得出来两个等式, $x_1 + b = \ln x_1$,

$x_2 + b = \ln x_2$ 一般这种类型含有 $x, \ln x$ 式子整理的方式是: 两式相加、两式相减;

② 得出来的式子是: $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$;

③ 将要证明的式子进行整理, 会发现需要把 x_1, x_2 表示出来, 那么后面做的一步是换元, 目的是将含有两个未知量的不等式转化成含有一个未知量的不等式;

④ 换元, 令 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 转化成不等式 $\ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0$, 令 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 利用导数求最值来证明假设成立.

登峰造极

13 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x - 1)e^x + f'(0)$.

(1) 求 $f'(0)$ 的值 .

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(3) 若 $g(x) = e^{-x} f(x) + \ln x$, $h(x) = e^x$, 过点 $O(0, 0)$ 分别作曲线 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的切线 l_1 、

l_2 , 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 求证: $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

答案 (1) 0.

(2) 答案见解析.

(3) 证明见解析.

解析 (1) $f'(x) = x(ax + 2a + 1)e^x$, 所以 $f'(0) = 0$.

(2) ① $a > 0$ 时, 当 $x > 0$ 或 $x < -\frac{2a+1}{a}$ 时,

$$f'(x) > 0, \text{ 当 } -\frac{2a+1}{a} < x < 0 \text{ 时}, f'(x) < 0,$$

故 $f(x)$ 单增区间为 $\left(-\infty, -\frac{2a+1}{a}\right), (0, +\infty)$,

$f(x)$ 单减区间为 $\left(-\frac{2a+1}{a}, 0\right)$.

② $a = 0$ 时, $f'(x) = xe^n$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, 0)$.

③ $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 当 $0 < x < -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x < 0$ 或 $x > -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $\left(0, -\frac{2a+1}{2a}\right)$,

$f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, 0), \left(-\frac{2a+1}{a}, +\infty\right)$.

④ $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2e^x \leq 0$,

所以 $f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, +\infty)$.

⑤ $a < -\frac{1}{2}$ 时, 当 $-\frac{2a+1}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x > 0$ 或 $x < -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $\left(-\frac{2a+1}{a}, 0\right)$,

$f(x)$ 单减区间为 $\left(-\infty, -\frac{(2a+1)}{a}\right), (0, +\infty)$.

(3) $h'(x) = e^x$, 设 l_2 与 $y = h(x)$ 的切点为 (x_2, y_2) ,

所以 l_2 的方程为 $y - y_2 = e^{x_2}(x - x_2)$, 过点 $O(0, 0)$,

得 $y_2 = e^{x_2} \cdot x_2$, 又点 (x_2, y_2) 在 $y = h(x)$ 上, 所以 $y_2 = e^{x_2}$,

解得 $x_2 = 1, y_2 = e, k_2 = e$,

$$g(x) = ax^2 + x - 1 + \ln x, g'(x) = 2ax + 1 + \frac{1}{x},$$

因为 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 所以 $k_1 = 2ax_1 + 1 + \frac{1}{x_1} = e$,

$$\text{即 } a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2},$$

设 l_1 与 $y = g(x)$ 的切点为 (x_1, y_1) ,

所以 l_1 的方程为 $y - y_1 = -e(x - x_1)$,

过点 $O(0, 0)$ 得 $y_1 = -ex$, 又 $y_1 = ax_1^2 + x_1 - 1 + \ln x_1$,

所以 $ax_1^2 + x_1 - 1 + \ln x_1 = -ex_1$,

整理得 $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$,

设 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}$, $u'(x) = \frac{e+1}{2} + \frac{1}{x}$,

$u'(x)$ 在定义域内恒大于 0, 所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

又 $u(1) = \frac{e}{2} - 1 > 0$, $u\left(\frac{e}{e+1}\right) = \frac{e}{2} + \ln \frac{e}{e+1} - \frac{3}{2} < 0$,

所以 $u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$, 即 $\frac{e}{e+1} < x_1 < 1$,

令 $t = \frac{1}{x_1}$, 则 $1 < t < \frac{e+1}{e}$,

$a(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{e+1}{2}t = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{e+1}{2}\right)^2 + \frac{(e+1)^2}{8}$,

所以 $a(t) \in \left(a\left(\frac{e+1}{e}\right), a(1)\right)$ 即 $a(t) \in \left(-\frac{(e+1)^3}{2e^2}, -\frac{e+2}{2}\right)$,

所以 $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

题型通解

① 题干说 l_1 、 l_2 关于 x 轴对称, 所以可得出直线斜率互为相反数, 可以得出来 $a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$;

② 在切线方程与过点问题联系时, 需要设切点. 本题中 l_2 容易求出, 而 l_1 可以先设切点 (x_1, y_1) ,

根据三个条件: 切点在曲线上, 切点在切线上, $(0, 0)$ 在切线上, 得出等式: $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$;

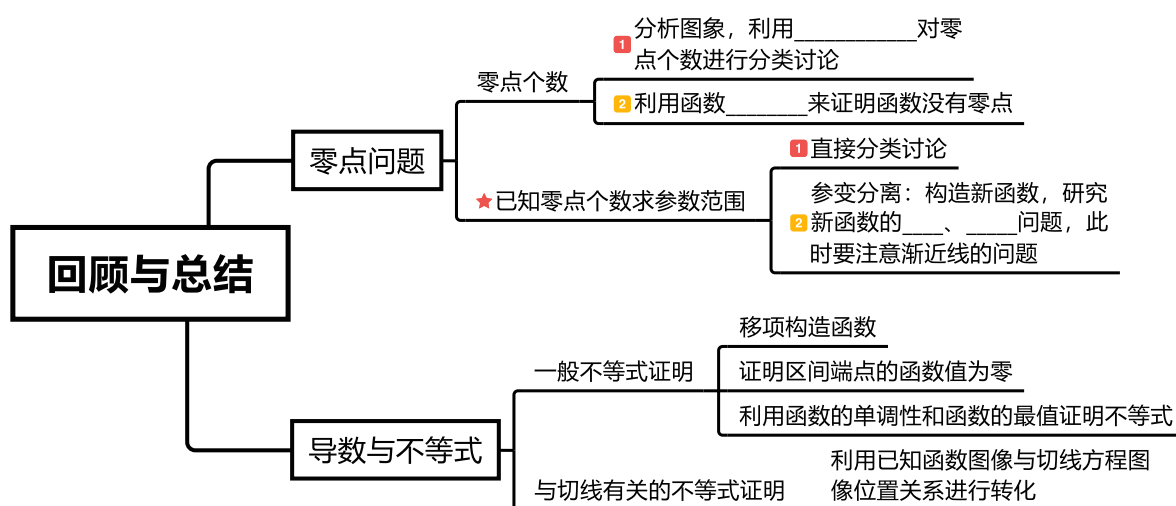
③ 令 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}$, 得出在定义域内函数的单调性为递增区间, 根据

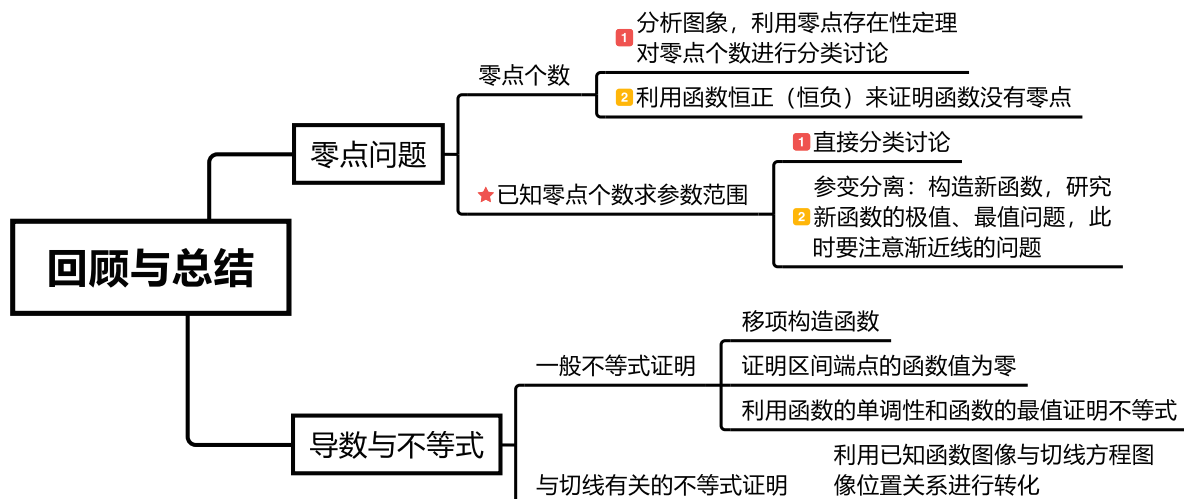
$u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$, 可以得出 x_1 的取值范围, 即 $x_1 \in \left(\frac{e}{e+1}, 1\right)$, 最后求出关系式

$a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$ 中 a 的范围.

注意: 不等式两边的值一般都是特殊 x 取得, 比如极值点处, 边界处.

思维大导图





易错总结

- ①渐近线影响零点存在
- ②极值最值与零点的关系

小憩一下

无限个房间的旅馆

曾经，上帝制造出来了一个有无限个房间的旅馆，现在已经住满了。但又来了一个客人，这可怎么办呢？上帝很机智，让原先住在1号房的客人搬进了2号房，原先住在2号房的客人住进3号房，以此类推，让原先住在 k 号房的客人住进 $k+1$ 号房，这样就空出了1号房给新来的客人。这就是无限的神奇之处，从有限到无限，不可能的也成了可能。