

导数的分类讨论

一、一元一次不等式型

1 (5分) 判断函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 在 $(3, 4)$ 上的单调性.

答案 答案见解析.

解析 $f'(x) = 2x + a, x = -\frac{a}{2}$

当 $-\frac{a}{2} \leq 3, a \geq -6$ 时, $(3, 4)$ 单增

当 $3 < -\frac{a}{2} < 4, -8 < a < -6$, $(3, -\frac{a}{2})$ 单减, $(-\frac{a}{2}, 4)$ 单增

当 $-\frac{a}{2} \geq 4, a \leq -8$, $(3, 4)$ 单减.

2 (5分) 设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

答案 见解析.

解析 由 $f'(x) = (1 + kx)e^{kx} = 0$ 得 $x = -\frac{1}{k} (k \neq 0)$

若 $k > 0$, 则当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{k})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\frac{1}{k}, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $k < 0$, 则当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{k})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-\frac{1}{k}, +\infty)$ 时,

$f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

3 (10分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$.

(1) (5分) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) (5分) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

答案 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(a, +\infty)$,

单调减区间为 $(0, a)$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{a}{e}$.

解析

$$(1) f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > a$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(a, +\infty)$,

单调减区间为 $(0, a)$.

(2) 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

在 (a, e) 上单调递增,

$f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减,

$f(x)$ 的最小值为 $f(e) = \frac{a}{e}$.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{a}{e}$.

二、一元二次不等式型

4 (5分) 已知函数 $f(x) = a^2 x^2 + ax - \ln x$.

当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

答案 单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2a}, +\infty\right)$; 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{2a}\right)$

解析 $f(x) = a^2x^2 + ax - \ln x$
 $f'(x) = 2a^2x + a - \frac{1}{x} = \frac{2a^2x^2 + ax - 1}{x}$
 $= \frac{(ax+1)(2ax-1)}{x} \quad (x > 0)$

所以, $a > 0$ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$\left(0, \frac{1}{2a}\right)$	$\frac{1}{2a}$	$\left(\frac{1}{2a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

因此, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2a}, +\infty\right)$; 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{2a}\right)$

5 (5分) 已知函数 $f(x) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\ln x + \frac{1}{x} - x$ ($a > 1$), 试讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性.

答案 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递增.

解析 由已知 $x > 0$, $f'(x) = \frac{a + \frac{1}{a}}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 = -\frac{x^2 - (a + \frac{1}{a})x + 1}{x^2} = -\frac{(x-a)(x-\frac{1}{a})}{x^2}$.
 由 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = a$.
 因为 $a > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 且 $a > \frac{1}{a}$.
 所以在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上, $f'(x) < 0$; 在区间 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上, $f'(x) > 0$.
 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递增.

6 (10分) 已知函数 $f(x) = a(x-2)^2 + 2\ln x$.

(1) (5分) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) (5分) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围;

答案 (1) 单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

(2) $-\frac{1}{8} \leq a \leq 1$

解析 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = (x-2)^2 + 2\ln x$, 定义域 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x - 4 + \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)^2}{x},$$

因为 $x > 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

$$(2) f'(x) = 2ax - 4a + \frac{2}{x} = \frac{2ax^2 - 4ax + 2}{x} (a \neq 0), x \in [1, 4].$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上是增函数,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在区间 $[1, 4]$ 上恒成立, 即 $2ax^2 - 4ax + 2 \geq 0$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立.

(i) 当 $a = 0$ 满足题意

(ii) 令 $h(x) = 2ax^2 - 4ax + 2$, 则 $h(x) = 2a(x-1)^2 - 2a + 2$, 对称轴 $x = 1$.

① 当 $a > 0$ 时, 只需 $h(1) \geq 0$, 即 $-2a + 2 \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$.

② 当 $a < 0$ 时, 只需 $h(4) \geq 0$, 即 $16a + 2 \geq 0$, 解得 $-\frac{1}{8} \leq a < 0$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $-\frac{1}{8} \leq a \leq 1$

7

(5分) 设函数 $f(x) = x^3 - 3ax + b (a \neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

答案

答案见解析

解析

$$f'(x) = 3(x^2 - a) (a \neq 0)$$

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 没有极值点.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{a}$

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{a})$ 时, $f'(x) > 0$ 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\sqrt{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

此时, $x = -\sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $x = \sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

8

(5分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1 (a > 0)$, 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间和极值.

答案

答案见解析

解析

函数的定义域为 $(-1, +\infty)$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } \frac{x(x-a+1)}{x+1} = 0 \text{ 解得: } x = 0, x = a-1$$

当 $a > 1$ 时,

列表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, a-1)$	$a-1$	$(a-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, a-1)$, 增区间是 $(-1, 0)$ 和 $(a-1, +\infty)$;

极大值为 $f(0) = 1$, 极小值为 $f(a-1) = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}$.

当 $0 < a < 1$ 时,

列表:

x	$(-1, a-1)$	$a-1$	$(a-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(a-1, 0)$, 增区间是 $(-1, a-1)$ 和 $(0, +\infty)$;

极大值为 $f(a-1) = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}$, 极小值为 $f(0) = 1$.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 可知函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单增, 无极值.

三、指对数不等式型

9 (5分) 已知函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

答案 答案见解析

解析 $f'(x) = (x^2)' e^{ax} + x^2 (e^{ax})' = 2x e^{ax} + ax^2 e^{ax} = x(ax+2)e^{ax}$

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 2x$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

单调增区间为 $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$

当 $a \neq 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = -\frac{2}{a}$

(2) 当 $a > 0$ 时, $0 > -\frac{2}{a}$,

当 $x < -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-\frac{2}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$, $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$

(3) 当 $a < 0$ 时, $0 < -\frac{2}{a}$, 当 $x > -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $0 < x < -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$, 单调减区间是 $(-\infty, 0)$, $(-\frac{2}{a}, +\infty)$

综上: 当 $a = 0$ 时, 单调增区间为 $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$

当 $a > 0$ 时, 单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$, $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$, 单调减区间是 $(-\infty, 0)$, $(-\frac{2}{a}, +\infty)$.

10 (5分) 已知函数 $f(x) = e^{ax} \cdot (\frac{a}{x} + a + 1)$, 其中 $a \geq -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

答案 答案见解析

解析 $f'(x) = ae^{ax} \frac{(x+1)[(a+1)x-1]}{x^2}$, $x \neq 0$.

当 $a = -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$.

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$; 单调递增区间为 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

当 $a \neq -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{a+1}$.

当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$;

单调递增区间为 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{a+1})$.

当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 为常值函数, 不存在单调区间.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{a+1})$;

单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$.

11 (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^{x+1}}{ax^2 + 4x + 4}$, 其中 $a > 1$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间.

答案 答案见解析

解析 因为 $a > 1$, 所以 $ax^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 + (a-1)x^2 > 0$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 R ,

求得 $f'(x) = \frac{e^{x+1}(ax^2 + 4x + 4) - e^{x+1}(2ax + 4)}{(ax^2 + 4x + 4)^2} = \frac{e^{x+1}x(ax + 4 - 2a)}{(ax^2 + 4x + 4)^2}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2 - \frac{4}{a}$, 当 $1 < a < 2$ 时, $x_2 < x_1$,

当 x 变化时, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, 2 - \frac{4}{a})$	$2 - \frac{4}{a}$	$(2 - \frac{4}{a}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

故函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(2 - \frac{4}{a}, 0)$ ，单调增区间为 $(-\infty, 2 - \frac{4}{a})$ ， $(0, +\infty)$ 。

当 $a = 2$ 时， $x_2 = x_1 = 0$ ，

因为 $f'(x) = \frac{2e^{x+1}x^2}{(2x^2 + 4x + 4)^2} \geq 0$ ，（当且仅当 $x = 0$ 时， $f'(x) = 0$ ）

所以函数 $f(x)$ 在 R 单调递增。

当 $a > 2$ 时， $x_2 > x_1$ ，

当 x 变化时， $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2 - \frac{4}{a})$	$2 - \frac{4}{a}$	$(2 - \frac{4}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

故函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 2 - \frac{4}{a})$ ，单调增区间为 $(-\infty, 0)$ ， $(2 - \frac{4}{a}, +\infty)$ 。

综上：当 $1 < a < 2$ 时， $f(x)$ 的单调减区间为 $(2 - \frac{4}{a}, 0)$ ，单调增区间为 $(-\infty, 2 - \frac{4}{a})$ ， $(0, +\infty)$ ；

当 $a = 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 单调递增；

当 $a > 2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 2 - \frac{4}{a})$ ，单调增区间为 $(-\infty, 0)$ ， $(2 - \frac{4}{a}, +\infty)$ 。