

导数双变量问题

1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln(1-x)$, a 为常数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) - x_1 > -\frac{3 + \ln 4}{8}$.

答案

(1) 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 上单调递减,
 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递增;

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减, $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 上单调递增.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 函数的定义域为 $(-\infty, 1)$,

由题意, $f'(x) = x - \frac{a}{1-x} = \frac{-x^2 + x - a}{1-x}$,

(i) 若 $a \geq \frac{1}{4}$, 则 $-x^2 + x - a \leq 0$, 于是 $f'(x) \leq 0$,

当且仅当 $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减.

(ii) 若 $0 < a < \frac{1}{4}$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$ 或 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$,

当 $x \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}) \cup (\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 单调递减,

$(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 单调递增.

(iii) 若 $a \leq 0$, 则 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \geq 1$,

当 $x \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 时, $f'(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 单调递减, $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, 1)$ 单调递增.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1)$ 上单调递减,
 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递增;

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减, $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 1)$ 上单调递增.

(2) 由(1)知, $f(x)$ 有两个极值点, 当且仅当 $0 < a < \frac{1}{4}$,

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $-x^2 + x - a = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = a$, 则 $0 < x_1 < \frac{1}{2}$,

由于 $f(x_2) - x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + a \ln(1-x_2) - x_1$
 $= \frac{1}{2}(1-x_1)^2 + x_1 x_2 \ln x_1 - x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1 + x_1(1-x_1) \ln x_1$,

设 $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + x(1-x) \ln x, (0 < x < \frac{1}{2})$,

$g'(x) = x - 2 + (1-2x) \ln x + x(1-x) \cdot \frac{1}{x} = (1-2x) \ln x - 1$,

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $(1-2x) \ln x < 0$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

又 $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = -\frac{3+\ln 4}{8}$,

所以 $g(x) > g(\frac{1}{2}) = -\frac{3+\ln 4}{8}$,

即 $f(x_2) - x_1 > -\frac{3+\ln 4}{8}$.

2 已知函数 $f(x) = \ln x + 2x - ax^2, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值.

(2) 设 $g(x) = f(x) + (a-4)x$, 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性.

(3) 当 $a = -2$ 时, 若存在正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + 3x_1 x_2 = x_1 + x_2$, 求证:

$$x_1 + x_2 > \frac{1}{2}.$$

答案

(1) $a = \frac{3}{2}$.

(2) 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增,

当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a < -2$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a = -2$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

在 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 因为 $f(x) = \ln x + 2x - ax^2$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2 - 2ax$,

因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值,

所以 $f'(1) = 1 + 2 - 2a = 0$, 解得 $a = \frac{3}{2}$,

验证: 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值.

(2) 因为 $g(x) = f(x) + (a - 4)x = \ln x - ax^2 + (a - 2)x$,

所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a - 2) = -\frac{(ax + 1)(2x - 1)}{x} (x > 0)$,

①若 $a \geq 0$, 则当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

②若 $a < -2$ 时, $g'(x) = -\frac{a(x + \frac{1}{a})(2x - 1)}{x} (x > 0)$,

当 $a < -2$ 时, 易得函数 $g(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

在 $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

当 $a = -2$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

在 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

(3) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = \ln x + 2x - ax^2$,

因为 $f(x_1) + f(x_2) + 3x_1x_2 = x_1 + x_2$,

所以 $\ln x_1 + x_1 + 2x_1^2 + \ln x_2 + x_2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$,

即 $\ln x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) + 3x_1x_2 = 0$,

所以 $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = x_1x_2 - \ln x_1x_2$,

令 $t = x_1x_2$, $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$,

则 $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t - 1}{t} (t > 0)$,

当 $t \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(t) < 0$,

所以函数 $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 所以函数 $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$ 在 $t = 1$ 时, 取得最小值, 最小值为 1,

所以 $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) \geq 1$,

即 $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) - 1 \geq 0$, 所以 $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}$ 或 $x_1 + x_2 \leq -1$,

因为 x_1, x_2 为正实数, 所以 $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}$,

当 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 x_2 = 1$, 此时不存在 x_1, x_2 满足条件,

所以 $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$.

3 已知函数 $f(x) = x - 2 - \ln^2 x - a \ln x$. ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 令 $g(x) = x f'(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性并求极值.

(2) 令 $h(x) = f(x) + 2 + \ln^2 x$, 若 $h(x)$ 有两个零点.

① 求 a 的取值范围.

② 若方程 $x e^x - a(\ln x + x) = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 证明: $e^{x_1 + x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$.

答案

(1) $g(x)$ 单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$,

极小值为 $g(2) = 2 - 2 \ln 2 - a$, 无极大值.

(2) ① $a > e$.

② 证明见解析.

解析

(1) 因为 $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{a}{x}$,

所以 $g(x) = x f'(x) = x - 2 \ln x - a, x \in (0, +\infty), g'(x) = \frac{x-2}{x}$,

$x, g'(x), g(x)$ 的变化如下:

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	负	0	正
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)$ 单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$,

极小值为 $g(2) = 2 - 2 \ln 2 - a$, 无极大值.

(2) ① 方法一: $h(x) = x - a \ln x$,

$$h'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x},$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 不可能有两个零点,

②当 $a > 0$ 时, 令 $h'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$, $h(x)$ 单调递减,

令 $h'(x) > 0$, 得 $x > a$, $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(a) = a - a \ln a$,

要使 $h(x)$ 有两个零点, 即使 $h(a) < 0$, 得 $a > e$,

又因为 $h(1) = 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 存在唯一——一个零点,

且 $a > e$, $h(e^a) = e^a - a^2 > 0$,

所以 $h(x)$ 在 (e, e^a) 上存在唯一——一个零点, 符合题意;

综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个零点.

方法二: $h(x) = x - a \ln x$ 有两个零点,

等价于 $x \neq 1$ 时, $a = \frac{x}{\ln x}$ 有两个实根(1),

令 $F(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $F'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $F(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, 且 $F(x) < 0$,

当 $x \in (1, e)$ 时, $F(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $F(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

$F(e) = e$, $x \rightarrow 1^+$, $F(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $F(x) \rightarrow +\infty$,

要使(1)有两个实数根, 即使 $a > F(e) = e$,

综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个零点.

② $xe^x - a(\ln x + x) = xe^x - a \ln(xe^x)$ ($x > 0$) 有两个实根,

令 $t = xe^x$, $g(t) = t - a \ln t$ 有两个零点 t_1, t_2 , $t_1 = x_1 e^{x_1}$, $t_2 = x_2 e^{x_2}$,

所以 $\begin{cases} t_1 - a \ln t_1 = 0 \\ t_2 - a \ln t_2 = 0 \end{cases}$,

所以 $a(\ln t_2 - \ln t_1) = t_2 - t_1$ (1),

$a(\ln t_2 + \ln t_1) = t_2 + t_1$ (2),

要证 $e^{x_1+x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$, 只需证 $(x_1 e^{x_1}) \cdot (x_2 e^{x_2}) > e^2$,

即证 $\ln(x_1 e^{x_1}) + \ln(x_2 e^{x_2}) > 2$, 所以只需证 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$,

由(1)(2)可得 $\ln t_2 + \ln t_1 = \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1}(\ln t_2 - \ln t_1) = \frac{\left(\frac{t_2}{t_1} + 1\right) \ln \frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1} - 1}$,

只需证 $\frac{\left(\frac{t_2}{t_1} + 1\right) \ln \frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1} - 1} > 2$, 设 $0 < t_1 < t_2$, 令 $t = \frac{t_2}{t_1}$, 则 $t > 1$,

所以只需证 $\ln t > 2 \frac{t-1}{t+1}$, 即证 $\ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 0$,

$$\begin{aligned} \text{令 } h(t) &= \ln t + \frac{4}{t+1} - 2, t > 1, \text{ 则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \\ h(t) &> h(1) = 0, \text{ 即当 } t > 1 \text{ 时, } \ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 0 \text{ 成立,} \\ \text{所以 } \ln t_1 + \ln t_2 &> 2, \text{ 即 } (x_1 e^{x_1}) \cdot (x_2 e^{x_2}) > e^2, \\ \text{即 } x_1 x_2 &> \frac{e^2}{e^{x_1+x_2}}. \end{aligned}$$

4 已知 $f(x) = x(\ln x - k - 1) (k \in \mathbf{R})$.

- (1) 若对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求 k 的取值范围.
 (2) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 x_2 < e^{2k}$.

答案

- (1) $k > 1 - \frac{8}{e^2}$.
 (2) 证明见解析.

解析

(1) $f(x) < 4 \ln x$ 等价于 $k + 1 > \frac{(x-4) \ln x}{x}$ 对 $x \in [e, e^2]$ 恒成立,

$$\text{令 } g(x) = \frac{(x-4) \ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{4 \ln x + x - 4}{x^2},$$

$$\text{令 } h(x) = 4 \ln x + x - 4, h'(x) = \frac{4}{x} + 1 > 0,$$

则 $h(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上递增,

$$\therefore h(x)_{\min} = h(e) = e > 0,$$

$$\therefore g'(x) > 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上递增,

$$\therefore g(x)_{\max} = g(e^2) = 2 - \frac{8}{e^2},$$

$$\therefore k + 1 > 2 - \frac{8}{e^2},$$

$$\therefore k > 1 - \frac{8}{e^2}.$$

(2) $f'(x) = \ln x - k$, $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在增函数,

$$\text{又 } f(x_1) = f(x_2),$$

$$\therefore k > 0,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = e^k,$$

$f(x)$ 在 $(0, e^k)$ 上单调递减, 在 $(e^k, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(e^{k+1}) = 0$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 则有 $0 < x_1 < e^k < x_2 < e^{k+1}$,

要证 $x_1 x_2 < e^{2k}$, 即证 $x_2 < \frac{e^{2k}}{x_1}$, 即 $e^k < x_2 < \frac{e^{2k}}{x_1}$,

$$\begin{aligned} \therefore f(x_2) &< f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right), \\ \text{又 } f(x_1) &= f(x_2), \\ \text{即证 } f(x_1) &< f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right), \\ \text{令 } h(x) &= f(x) - f\left(\frac{e^{2k}}{x}\right) = x(\ln x - k - 1) - \frac{e^{2k}}{x}\left(\ln \frac{e^{2k}}{x} - k - 1\right), \quad x \in (0, e^k), \\ \therefore h(x) &= x \ln x - (k+1)x + e^{2k}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{k-1}{x}\right), \\ \therefore h'(x) &= \ln x + 1 - (k+1) + e^{2k}\left(\frac{1 - \ln x}{x} + \frac{k-1}{x^2}\right) = (\ln x - k) \frac{x^2 - e^{2k}}{x^2}, \\ \therefore x &\in (0, e^k), \\ \therefore \ln x - k &< 0, \quad x^2 - e^{2k} < 0, \\ \therefore h'(x) &> 0, \\ \therefore h(x) &\text{在 } (0, e^k) \text{ 上单调递增}, \\ \therefore h(x) &< h(e^k), \\ \text{又 } h(e^k) &= f(e^k) - f\left(\frac{e^{2k}}{e^k}\right) = 0, \\ \therefore h(x) &< 0, \\ \therefore f(x_1) &< f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right), \text{ 即 } f(x_2) = f(x_1) < f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right), \\ \therefore x_1 x_2 &< e^{2k}. \end{aligned}$$

5 设函数 $f(x) = \ln x + ae^x$, $g(x) = axe^x$ $\left(0 < a < \frac{1}{e}\right)$.

- (1) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行于直线 $y = 2x$, 求实数 a 的值.
- (2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 判断 $y = h(x)$ 的零点的个数.
- (3) 设 x_1 是 $h(x)$ 的极值点, x_2 是 $h(x)$ 的一个零点, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $3x_1 - x_2 > 2$.

答案

(1) $a = \frac{1}{e}$.

(2) $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点, $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由函数 $f(x) = \ln x + ae^x$ 可知, $f'(x) = \frac{1}{x} + ae^x$, $x > 0$,

$\therefore y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线平行于直线 $y = 2x$,

则有 $f'(1) = 1 + ae = 2$,

解得 $a = \frac{1}{e}$.

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x + ae^x - axe^x, x > 0$,

$$\therefore h'(x) = \frac{1}{x} + ae^x - a(1+x)e^x = \frac{1 - ax^2e^x}{x},$$

令 $m(x) = 1 - ax^2e^x$, 则 $m'(x) = -a(2xe^x + x^2e^x)$,

由 $0 < a < \frac{1}{e}$, 且 $x > 1$ 可知, $m'(x) < 0$ 恒成立,

即 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } m(1) = 1 - ae > 0 \text{ 且 } m\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0,$$

$\therefore m(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

从而 $h'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 不妨设为 x_0 ,

则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 内递减,

$\therefore h(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极大值,

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$,

即 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内递减,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, 即 $\ln x < x - 1$,

$$\begin{aligned} \therefore h\left(\ln \frac{1}{a}\right) &= \ln\left(\ln \frac{1}{a}\right) + a\left(1 - \ln \frac{1}{a}\right)e^{\ln \frac{1}{a}} \\ &= \ln\left(\ln \frac{1}{a}\right) - \ln \frac{1}{a} + 1 \\ &= \varphi\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0. \end{aligned}$$

又 $\therefore h(x_0) > h(1) = 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点,

又 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

(3) 由(2)及题意, $\begin{cases} h'(x_1) = 0 \\ h(x_2) = 0 \end{cases}$,

$$\text{则 } \begin{cases} ax_1^2e^{x_1} = 1 \\ \ln x_2 = a(x_2 - 1)e^{x_2} \end{cases}$$

$$\text{从而 } \ln x_2 = \frac{x_2 - 1}{x_1^2}e^{x_2 - x_1},$$

$$\text{即 } e^{x_2 - x_1} = \frac{x_1^2 \ln x_2}{x_2 - 1},$$

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$, 又 $x_2 > x_1 > 1$,

$$\therefore e^{x_2-x_1} < \frac{x_1^2(x_2-1)}{x_2-1} = x_1^2,$$

两边取对数, 得 $\ln e^{x_2-x_1} < \ln x_1^2$,

即 $x_2 - x_1 < 2 \ln x_1 < 2(x_1 - 1)$,

整理得 $3x_1 - x_2 > 2$.

6 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \ln x$, $g(x) = -bx$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 设 $h(x) = f(x) - g(x)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值, 且 $f'(1) = g(-1) - 2$. 求函数 $h(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $a = 0$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

① 求证: $\frac{x_1 x_2}{e^2} > 1$.

② 求 b 的取值范围.

答案

(1) $h(x)$ 的减区间为 $(1, +\infty)$, 增区间为 $(0, 1)$.

(2) ① 证明见解析.

② $b \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ 时, $h(x)$ 有两个零点.

解析

(1) 由已知得 $f'(x) = ax + \frac{1}{x}$, ($x > 0$),

所以 $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \sqrt{2} = 0$, 所以 $a = -2$.

由 $f'(1) = g(-1) - 2$,

得 $a + 1 = b - 2$,

所以 $b = 1$.

所以 $h(x) = -x^2 + \ln x + x$, ($x > 0$).

则 $h'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)}{-x}$, ($x > 0$),

由 $h'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$, $h'(x) < 0$ 得 $x > 1$.

所以 $h(x)$ 的减区间为 $(1, +\infty)$, 增区间为 $(0, 1)$.

(2) ① 由题意得 $\ln x_1 + bx_1 = 0$, $\ln x_2 + bx_2 = 0$,

$\therefore \ln x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) = 0$, $\ln x_2 - \ln x_1 + b(x_2 - x_1) = 0$,

$\therefore \frac{\ln x_1 x_2}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1}$, 不妨设 $x_1 < x_2$,

要证 $x_1 x_2 > e^2$,

只需要证 $\ln x_1 x_2 > \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1}(\ln x_2 - \ln x_1) > 2$,

$$\text{即证 } \ln x_2 - \ln x_1 > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1},$$

$$\text{设 } t = \frac{x_2}{x_1}, t > 1,$$

$$\text{则 } F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2,$$

$$\therefore F'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{(t+1)^2} > 0,$$

$\therefore$ 函数 $F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 而 $F(1) = 0$,

$$\therefore F(t) > 0, \text{ 即 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore x_1 x_2 > e^2,$$

$$\therefore \frac{x_1 x_2}{e^2} > 1.$$

② 由已知 $h(x) = \ln x + bx, (x > 0)$.

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{1}{x} + b, (x > 0),$$

当 $b \geq 0$ 时, 显然 $h'(x) > 0$ 恒成立, 此时函数 $h(x)$ 的定义域内递增, $h(x)$ 至多有一个零点, 不合题意.

当 $b < 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$ 得 $x = -\frac{1}{b} > 0$, 令 $h'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{b}$; 令 $h'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{b}$.

$$\text{所以 } h(x)_{\text{极小}} = h\left(-\frac{1}{b}\right) = -\ln(-b) - 1 > 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{e} < b < 0.$$

且 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln x < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln x > 0$.

所以当 $b \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ 时, $h(x)$ 有两个零点.

7 已知函数 $f(x) = x - ae^x (a \in \mathbf{R}), x \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求 a 的取值范围;
- (2) 证明 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;
- (3) 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

答案

(1) a 的取值范围是 $(0, e^{-1})$.

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由 $f(x) = x - ae^x$, 可得 $f'(x) = 1 - ae^x$.

下面分两种情况讨论:

(1) $a \leq 0$ 时 $f'(x) > 0$ 在 R 上恒成立, 可得 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 不合题意.

(2) $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\ln a$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$-\ln a - 1$	↘

这时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\ln a)$; 单调递减区间是 $(-\ln a, +\infty)$.

于是, “函数 $y = f(x)$ 有两个零点”等价于如下条件同时成立:

1° $f(-\ln a) > 0$; 2° 存在 $s_1 \in (-\infty, -\ln a)$, 满足 $f(s_1) < 0$;

3° 存在 $s_2 \in (-\ln a, +\infty)$, 满足 $f(s_2) < 0$.

由 $f(-\ln a) > 0$, 即 $-\ln a - 1 > 0$, 解得 $0 < a < e^{-1}$, 而此时, 取 $s_1 = 0$, 满足

$s_1 \in (-\infty, -\ln a)$, 且 $f(s_1) = -a < 0$; 取 $s_2 = \frac{2}{a} + \ln \frac{2}{a}$, 满足 $s_2 \in (-\ln a, +\infty)$, 且 $f(s_2) = \left(\frac{2}{a} - e^{\frac{2}{a}}\right) + \left(\ln \frac{2}{a} - e^{\frac{2}{a}}\right) < 0$.

所以, a 的取值范围是 $(0, e^{-1})$.

(2) 证明: 由 $f(x) = x - ae^x = 0$, 有 $a = \frac{x}{e^x}$.

设 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 由 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 并且, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $g(x) \leq 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$.

由已知, x_1, x_2 满足 $a = g(x_1)$, $a = g(x_2)$. 由 $a \in (0, e^{-1})$, 及 $g(x)$ 的单调性, 可得

$x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$. 对于任意的 $a_1, a_2 \in (0, e^{-1})$, 设 $a_1 > a_2$,

$g(\xi_1) = g(\xi_2) = a_1$, 其中 $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$; $g(\eta_1) = g(\eta_2) = a_2$, 其中 $0 < \eta_1 < 1 < \eta_2$.

因为 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 故由 $a_1 > a_2$, 即 $g(\xi_1) > g(\eta_1)$, 可得 $\xi_1 > \eta_1$; 类似可得

$\xi_2 < \eta_2$.

又由 $\xi_1, \eta_1 > 0$, 得 $\frac{\xi_2}{\xi_1} < \frac{\eta_2}{\xi_1} < \frac{\eta_2}{\eta_1}$.

所以, $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大.

(3) 证明: 由 $x_1 = ae^{x_1}$, $x_2 = ae^{x_2}$, 可得 $\ln x_1 = \ln a + x_1$, $\ln x_2 = \ln a + x_2$.

故 $x_2 - x_1 = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$.

设 $\frac{x_2}{x_1} = t$, 则 $t > 1$, 且 $\begin{cases} x_2 = tx_1, \\ x_2 - x_1 = \ln t, \end{cases}$ 解得 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$, $x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$. 所以,

$$x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}. \quad ①$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty), \text{ 则 } h'(x) = \frac{-2\ln x + x - \frac{1}{x}}{(x-1)^2}.$$

$$\text{令 } u(x) = -2\ln x + x - \frac{1}{x}, \text{ 得 } u'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $u'(x) > 0$. 因此, $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故对于任意的 $x \in (1, +\infty)$, $u(x) > u(1) = 0$, 由此可得 $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因此, 由①可得 $x_1 + x_2$ 随着 t 的增大而增大.

而由 (II), t 随着 a 的减小而增大, 所以 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

8 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数求 a 的取值范围.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$ 恰有两个不等的极值点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 < 2\ln 2a$.

答案

(1) $a \leq 1$.

(2) 证明见解析.

解析

$$(1) \because f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax,$$

$$\therefore f'(x) = e^x - x - a,$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

$$\therefore f'(x) > 0 \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上恒成立},$$

$$\text{即 } e^x - x - a > 0 \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上恒成立},$$

$$\therefore a < e^x - x \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上恒成立},$$

$$\text{令 } h(x) = e^x - x,$$

$$\text{则 } h'(x) = e^x - 1 = 0, \text{ 得 } x = 0,$$

列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	减函数	极小值	增函数

$$\therefore h(x)_{\min} = h(0) = 1,$$

$$\therefore a \leq 1,$$

故实数 a 的取值范围 $a \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \because g(x) = f(x) - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2, \\
 & \therefore g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - ax^2 + \frac{1}{2}x^2 = e^x - ax^2 - ax, \\
 & \therefore g'(x) = e^x - 2ax - a, \\
 & \because x_1, x_2 \text{ 是函数 } g(x) \text{ 的两个不同极值点 (不妨设 } x_1 < x_2 \text{)}, \\
 & \text{当 } a \leq 0 \text{ 时, } g'(x) > 0, \\
 & \text{即 } g(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的增函数, 与已知矛盾,} \\
 & \therefore a > 0, \text{ 且 } g'(x_1) = 0, g'(x_2) = 0, \\
 & \therefore e^{x_1} - 2ax_1 - a = 0, \text{ 且 } e^{x_2} - 2ax_2 - a = 0, \\
 & \text{两式相减, 可得 } 2a = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2}, \\
 & \therefore \text{要证明 } \frac{x_1 + x_2}{2} < \ln 2a, \\
 & \text{即证明 } e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2}, \\
 & \therefore \text{两边同除以 } e^{x_2}, \text{ 即证 } e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} < \frac{e^{x_1 - x_2} - 1}{x_1 - x_2}, \\
 & \text{即证 } (x_1 - x_2)e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} > e^{x_1 - x_2} - 1, \\
 & \text{即证 } (x_1 - x_2)e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} - e^{x_1 - x_2} + 1 > 0 \\
 & \text{令 } x_1 - x_2 = t, \text{ 则 } t < 0, \\
 & \text{即证不等式 } te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 > 0, \text{ 在 } t < 0 \text{ 时恒成立,} \\
 & \text{令 } \phi(t) = te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1, \\
 & \therefore \phi(t) = e^{\frac{t}{2}} + t \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - e^t = \left(\frac{t}{2} + 1\right)e^{\frac{t}{2}} - e^t = -e^{\frac{t}{2}} \left[e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{t}{2} + 1\right)\right], \\
 & \text{由 (2) 可知, } e^{\frac{t}{2}} > \frac{t}{2} + 1, \\
 & \text{即 } e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{t}{2} + 1\right) > 0, \\
 & \therefore \phi'(t) < 0, \\
 & \therefore \phi(t) \text{ 在 } t < 0 \text{ 时是减函数,} \\
 & \therefore \phi(t) \text{ 在 } t = 0 \text{ 时取得极小值 } \phi(0) = 0, \\
 & \therefore \phi(t) > 0, \\
 & \therefore te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 > 0 \text{ 在 } t < 0 \text{ 时恒成立,} \\
 & \therefore \frac{x_1 + x_2}{2} < \ln 2a.
 \end{aligned}$$

9 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} - 2\ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

① 求 a 的取值范围.

② 证明: $f(x_2) < x_2 - 1$.

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1 + \sqrt{1-a})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$ 上单调递增;
当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1 - \sqrt{1-a})$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{1-a}, 1 + \sqrt{1-a})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$ 上单调递增;
当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) ① $0 < a < 1$.

② 证明见解析.

解析

(1) 函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} - 2 \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2}$,
令 $f'(x) = 0$, 得 $x^2 - 2x + a = 0$, 其判别式 $\Delta = 4 - 4a$,

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $x^2 - 2x + a \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, 此时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $\Delta > 0$, 即 $a < 1$ 时, 方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的两根为 $x_1 = 1 - \sqrt{1-a}$,
 $x_2 = 1 + \sqrt{1-a} > 1$,

若 $a \leq 0$, 则 $x_1 \leq 0$, 则 $x \in (0, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

此时, $f(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增;

若 $a > 0$, 则 $x_1 > 0$, 则 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$,

$x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

此时, $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1 + \sqrt{1-a})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1 - \sqrt{1-a})$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{1-a}, 1 + \sqrt{1-a})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) ① 可知, 函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 等价于方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两不等实根, 故 $0 < a < 1$.

② 由上述过程得 $0 < a < 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$, 且 $1 < x_2 < 2$, $a = -x_2^2 + 2x_2$.

$$f(x_2) - x_2 + 1 = x_2 - \frac{-x_2^2 + 2x_2}{x_2} - 2\ln x_2 - x_2 + 1 = x_2 - 2\ln x_2 - 1,$$

$$\text{令 } g(t) = t - 2\ln t - 1, 1 < t < 2,$$

$$\text{则 } g'(t) = 1 - \frac{2}{t} = \frac{t-2}{t},$$

由于 $1 < t < 2$, 则 $g'(t) < 0$, 故 $g(t)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减.

$$\text{故 } g(t) < g(1) = 1 - 2\ln 1 - 1 = 0.$$

$$\therefore f(x_2) - x_2 + 1 = g(x_2) < 0.$$

$$\therefore f(x_2) < x_2 - 1.$$

10 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$).

(1) 求实数 a 的值.

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, 都有 $f(x) < \frac{m}{2x - x^2}$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

(3) 若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明: $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

答案

(1) $a = 1$.

(2) $m > \frac{1}{e}$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由题意得 $f'(x) = \frac{a(1-x)}{e^x}$, 设切点 $\left(x_0, \frac{1}{e}\right)$,

$$\text{所以 } f'(x_0) = 0, \text{ 得 } x_0 = 1. \text{ 则 } \frac{1}{e} = \frac{a}{e},$$

$$\therefore a = 1.$$

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \frac{x}{e^x} < \frac{m}{2x - x^2}$ 对任意 $x \in (0, 2)$ 都成立,

$$\therefore 2x - x^2 > 0, \text{ 即 } m > \frac{2x^2 - x^3}{e^x} \text{ 对任意 } x \in (0, 2) \text{ 都成立,}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{2x^2 - x^3}{e^x}, h'(x) = \frac{x(x-1)(x-4)}{e^x} = 0, x = 1,$$

$$\therefore x \in (0, 1), h'(x) > 0;$$

$$\therefore x \in (1, 2), h'(x) < 0,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单增, } (1, 2) \text{ 上单减,}$$

$$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore h(x) \leq h(1) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore m > \frac{1}{e}.$$

(3) 由题意知函数 $g(x) = \ln x - x - b$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

因为 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + b = \ln x_1 \\ x_2 + b = \ln x_2 \end{cases}, \text{相减得 } x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1},$$

不妨令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 则 $x_2 = tx_1$, 则 $tx_1 - x_1 = \ln t$,

$$\text{所以 } x_1 = \frac{1}{t-1} \ln t, x_2 = \frac{t}{t-1} \ln t,$$

$$\text{要证 } g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

$$\text{只要证 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2} + 1,$$

$$\text{只要证 } \frac{t-1}{\ln t} + \frac{t-1}{t \ln t} > \frac{2(t-1)}{(1+t) \ln t} + 1,$$

$$\text{即证 } t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t > 0,$$

$$\text{令 } \varphi(t) = t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t,$$

$$\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1}{t^2(1+t)^2},$$

$$\text{令 } m(t) = t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1, m'(t) = 4t^3 + 3t^2 - 8t + 1,$$

$$m''(t) = 12t^2 + 6t - 8 > 0 \text{ 对 } t > 1 \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m'(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增},$$

$$\therefore m'(t) > m'(1) = 0,$$

$$\therefore m(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增},$$

$$\therefore m(t) > m(1) = 0,$$

$$\text{即 } \varphi'(t) > 0,$$

$$\therefore \varphi(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增},$$

$$\therefore \varphi(t) > \varphi(1) = 0, \text{ 即原不等式成立}.$$

11 已知函数 $f(x) = a(2-x)e^x$, $g(x) = (x-1)^2$.

(1) 若曲线 $y = g(x)$ 的一条切线经过点 $M(0, -3)$, 求这条切线的方程.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

① 求实数 a 的取值范围.

② 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

答案

- (1) $2x - y - 3 = 0$ 或 $6x + y + 3 = 0$.
 (2) ① $(0, +\infty)$.
 ② 证明见解析 .

解析

- (1) 方法一：设经过点 $M(0, -3)$ 的切线与曲线 $y = g(x)$ 相切于点 $Q(t, (t-1)^2)$,

$$\text{由 } g(x) = (x-1)^2 \text{ 得 } g'(x) = 2(x-1) ,$$

$$\text{所以该切线方程为 } y - (t-1)^2 = 2(t-1)(x-t) ,$$

$$\text{因为该切线经过 } M(0, -3) ,$$

$$\text{所以 } -3 - (t-1)^2 = 2(t-1)(-t) , \text{ 解得 } t = \pm 2 ,$$

$$\text{所以切线方程为 } 2x - y - 3 = 0 \text{ 或 } 6x + y + 3 = 0 .$$

方法二：由题意得曲线 $y = g(x)$ 的切线的斜率一定存在 ,

$$\text{设所求的切线方程为 } y = kx - 3 ,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 3 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \text{ 得 } x^2 - (2+k)x + 4 = 0 ,$$

因为切线与抛物线相切 ,

$$\text{所以 } \Delta = (2+k)^2 - 16 = 0 , \text{ 解得 } k = 2 , -6 ,$$

$$\text{所以所求的切线方程为 } 2x - y - 3 = 0 \text{ 或 } 6x + y + 3 = 0 .$$

- (2) ① 由 $f(x) = g(x)$, 得 $g(x) - f(x) = 0$,

$$\text{设 } h(x) = g(x) - f(x) = a(x-2)e^x + (x-1)^2 ,$$

$$\text{则 } h'(x) = a(x-1)e^x + 2(x-1) = (x-1)(ae^x + 2) ,$$

由题意得函数 $h(x)$ 恰好有两个零点 .

(i) 当 $a = 0$, 则 $h(x) = (x-1)^2$, $h(x)$ 只有一个零点 1 ;

(ii) 当 $a > 0$ 时 , 由 $h'(x) < 0$ 得 $x < 1$,

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$,

即 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数 , 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数 ,

$$\text{而 } h(1) = -ae < 0 , h(2) = 1 ,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有唯一零点 , 且该零点在 $(1, 2)$ 上 ,

$$\text{取 } b < 0 , \text{ 且 } b < \ln \frac{1}{2a} ,$$

$$\text{则 } h(b) > \frac{1}{2}(b-2) + (b-1)^2 = b \left(b - \frac{3}{2} \right) > 0 ,$$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有唯一零点 , 且该零点在 $(b, 1)$ 上 ,

所以 $a > 0$, $h(x)$ 恰好有两个零点 ;

(iii) 当 $a < 0$ 时, 由 $h'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\ln\left(-\frac{2}{a}\right)$,

$$\text{若 } a = -\frac{2}{e}, h'(x) = -\frac{2}{e}(x-1)(e^x - e) \leq 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上至多有一个零点,

$$\text{若 } a < -\frac{2}{e}, \text{ 则 } \ln\left(-\frac{2}{a}\right) < 1,$$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } h(1) = -ae > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上至多有一个零点,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $h(x)$ 在 $\left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right), 1\right)$ 上单调递增,

在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上为减函数,

$$\text{又 } h\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right] = -2\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right] + \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 1\right]^2$$

$$= \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right]^2 + 1 > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上无零点,

$$\text{若 } a > -\frac{2}{e}, \text{ 则 } \ln\left(-\frac{2}{a}\right) > 1,$$

$$\text{又当 } x \leq 1 \text{ 时, } h(x) \geq h(1) = -ae > 0,$$

所以 $h(x)$ 不存在零点,

$h(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上无零点,

故当 $x \in \left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 时, $h'(x) > 0$;

当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right), +\infty\right)$ 时, $h'(x) > 0$,

因此 $f(x)$ 在 $\left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上单调递增, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } h\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right] = -2\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right] + \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 1\right]^2$$

$$= \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right]^2 + 1 > 0,$$

随意 $h(x)$ 在 $\left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 无零点, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上至多有一个零点,

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

② 不妨设 $x_1 < x_2$,

由①知 $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, $2 - x_2 \in (-\infty, 1)$, 且 $a > 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减,

所以 $x_1 + x_2 < 2$ 等价于 $h(x_1) > h(2 - x_1)$, 即 $h(2 - x_2) < 0$,

$$\text{由 } h(2 - x_2) = -ax_2e^{2-x_2} + (x_2 - 1)^2, \text{ 且 } h(x_2) = a(x_2 - 2)e^{x_2} + (x_2 - 1)^2 = 0,$$

$$\text{所以 } h(2-x_2) = a[-x_2 e^{2-x_2} - (x_2-2)e^{x_2}]$$

$$= -a[x_2 e^{2-x_2} + (x_2-2)e^{x_2}],$$

$$\text{设 } \varphi(x) = x e^{2-x} + (x-2)e^x, \text{ 其中 } x > 1,$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = (x-1)(e^x - 2^{2-x}),$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } e^x > e, e^{2-x} < e,$$

$$\text{所以 } \varphi'(x) > 0,$$

$$\text{而 } \varphi(1) = 0, \text{ 故当 } x > 1 \text{ 时, } \varphi(x) > 0,$$

$$\text{从而 } f(2-x_2) = -a(x_2) < 0, \text{ 故 } x_1 + x_2 < 2.$$

12 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切的切线方程.

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

① 求实数 a 的范围.

② 证明: $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

答案

(1) $2x - y - 3 = 0$.

(2) ① $0 < a < \frac{1}{2}$.

② 证明见解析.

解析

(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 2 \ln x$, $f'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x}$,

$$\text{则 } f(1) = -1, f'(1) = 2,$$

$$\text{所以切线方程为 } 2x - y - 3 = 0.$$

(2) ① $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} (x > 0)$,

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } 2x^2 - 2x + a = 0.$$

函数 $f(x)$ 有两个极值点等价于方程 $2x^2 - 2x + a = 0$ 有两个不同的正根,

$$\text{设 } \mu(x) = 2x^2 - 2x + a, \text{ 则 } \begin{cases} \mu(0) = a > 0 \\ \Delta = 4 - 8a > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 有两个极值点 } x_1, x_2, \text{ 则 } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

② $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$.

由 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 1$,

所以 $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)}{x_2} &= \frac{x_1^2 - 2x_1 + a \ln x_1}{1 - x_1} \\ &= \frac{(x_1 - 1)^2 - 1 + 2x_1(1 - x_1) \ln x_1}{1 - x_1}\end{aligned}$$

$$= 1 - x_1 + \frac{1}{x_1 - 1} + 2x_1 \ln x_1,$$

$$\text{令 } h(t) = 1 - t + \frac{1}{t - 1} + 2t \ln t, t \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } h'(t) = -1 - \frac{1}{(t - 1)^2} + 2(1 + \ln t)$$

$$= \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2} + 2 \ln t < 0.$$

$$h(t) \text{ 在区间 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上递减, } h(t) > h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln 2,$$

$$\text{所以 } \frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2.$$

13 设函数 $f(x) = \ln x - a(x - 1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 单调性.

(2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.

① 证明: $f(x)$ 恰有两个零点.

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

答案

(1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(2) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

解析

(1) 由已知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{且 } f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x - 1)e^x] = \frac{1 - ax^2e^x}{x},$$

因此当 $a \leq 0$ 时, $1 - ax^2e^x > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(2) ① 由 (1) 知 $f'(x) = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$.

$$\text{令 } g(x) = 1 - ax^2e^x, \text{ 由 } 0 < a < \frac{1}{e},$$

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

又 $g(1) = 1 - ae > 0$,

$$\text{且 } g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0.$$

故 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

从而 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

不妨设为 x_0 , 则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$.

$$\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增.

$$\text{当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减, 因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x + 1,$$

$$\text{则当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

$$\text{从而当 } x > 1 \text{ 时, } h(x) < h(1) = 0,$$

$$\text{所以 } \ln x < x - 1.$$

$$\text{从而 } f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a\left(\ln \frac{1}{a} - 1\right)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0$$

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一零点.

又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1,

从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

$$\textcircled{2} \text{ 由题意, } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases},$$

$$\text{从而 } \ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}, \text{ 即 } e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}.$$

因为当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$,

$$\text{又 } x_1 > x_0 > 1, \text{ 故 } e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2,$$

两边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$,

$$\text{于是 } x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1),$$

$$\text{整理得 } 3x_0 - x_1 > 2.$$

已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$) 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e - 1 = 0$.

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

答案

(1) 见解析

(2) 见解析

解析

(1) 解: 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e - 1 = 0$, 可得

$$f(-1) = 0, \text{ 即 } f(-1) = (-1+b)(e^{-1} - a) = 0,$$

$$\text{又函数 } f(x) = (x+b)(e^x - a), (b > 0),$$

$$\text{可得导数为 } f'(x) = (x+b+1)e^x - a, \text{ 所以 } f'(-1) = \frac{b}{e} - a = -1 + \frac{1}{e},$$

$$\text{若 } a = \frac{1}{e}, \text{ 则 } b = 2 - e < 0, \text{ 与 } b > 0 \text{ 矛盾},$$

$$\text{故 } a = b = 1.$$

(2) 证明: 由(1)可知 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$, $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$,

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } (-1, 0) \text{ 处的切线方程为 } h(x) = k(x+1),$$

$$\text{易得 } k = f'(-1) = \frac{1}{e} - 1, \text{ 则 } h(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1),$$

$$\text{令 } F(x) = f(x) - h(x),$$

$$\text{即 } F(x) = (x+1)(e^x - 1) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1), F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e},$$

$$\text{当 } x \leq -2 \text{ 时}, F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e} \leq -\frac{1}{e} < 0,$$

$$\text{当 } x > -2 \text{ 时},$$

$$\text{设 } G(x) = F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}, G'(x) = (x+3)e^x > 0,$$

$$\text{故函数 } F'(x) \text{ 在 } (-2, +\infty) \text{ 上单调递增, 又 } F'(-1) = 0,$$

$$\text{所以当 } x \in (-\infty, -1) \text{ 时}, F'(x) < 0, \text{ 当 } x \in (-1, +\infty) \text{ 时}, F'(x) > 0,$$

$$\text{所以函数 } F(x) \text{ 在区间 } (-\infty, -1) \text{ 上单调递减, 在区间 } (-1, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$\text{故 } F(x) \geq F(-1) = 0,$$

$$f(x_1) \geq h(x_1),$$

$$\text{设 } h(x) = m \text{ 的根为 } x_1', \text{ 则 } x_1' = -1 + \frac{me}{1-e},$$

$$\text{又函数 } h(x) \text{ 单调递减, 故 } h(x_1') = f(x_1) \geq h(x_1), \text{ 故 } x_1' \leq x_1,$$

$$\text{设 } y = f(x) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处的切线方程为 } y = t(x), \text{ 易得 } t(x) = x,$$

$$\text{令 } T(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - x, T'(x) = (x+2)e^x - 2,$$

当 $x \leq -2$ 时, $T'(x) = (x+2)e^x - 2 \leq -2 < 0$,

当 $x > -2$ 时,

设 $H(x) = T'(x) = (x+2)e^x - 2$, $H'(x) = (x+3)e^x > 0$,

故函数 $T'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $T'(x) > 0$,

所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$T(x) \geq T(0) = 0$,

$f(x_2) \geq t(x_2)$,

设 $t(x) = m$ 的根为 x_2' , 则 $x_2' = m$,

又函数 $t(x)$ 单调递增, 故 $t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$, 故 $x_2' \geq x_2$,

又 $x_1' \leq x_1$,

则 $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = m - \left(-1 + \frac{me}{1-e}\right) = 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

15 已知函数 $f(x) = \ln x - x^2 + x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq \left(\frac{a}{2} - 1\right)x^2 + ax - 1$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

(3) 若正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 = 0$, 证明 $x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

答案

(1) $[1, +\infty)$.

(2) 2.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $f'(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \quad (x > 0)$.

$\therefore x \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$.

$\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $[1, +\infty)$.

(2) 令 $g(x) = f(x) - \left[\left(\frac{a}{2} - 1\right)x^2 + ax - 1\right] = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + (1-a)x + 1$.

所以 $g'(x) = \frac{-ax^2 + (1-a)x + 1}{x} = \frac{(-ax+1)(x+1)}{x}$.

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 因为 $x > 0$, 所以 $g'(x) > 0$.

$\therefore$ 此时 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是递增函数.

$$\text{又 } g(1) = -\frac{3}{2}a + 2 > 0.$$

$\therefore g(x) \leq 0$ 不能恒成立, 即关于 x 的不等式 $f(x) \leq \left(\frac{a}{2} - 1\right)x^2 + ax - 1$ 不能恒成立.

$\therefore$ 这种情况不存在.

$$(2) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } g'(x) = -\frac{a(x - \frac{1}{a})(x + 1)}{x}.$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $g'(x) > 0$. 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$.

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的最大值为 } g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + (1-a) \cdot \frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{2a} - \ln a.$$

$$\text{令 } h(a) = \frac{1}{2a} - \ln a.$$

$$\therefore h(1) = \frac{1}{2} > 0, h(2) = \frac{1}{4} - \ln 2 < 0, \text{ 又 } h(a) \text{ 在 } a \in (0, +\infty) \text{ 上是减函数.}$$

$$\therefore \text{当 } a \geq 2 \text{ 时, } h(a) < 0.$$

所以整数 a 的最小值为 2.

$$(3) \text{ 由 } f(x_1) + f(x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 = 0.$$

$$\text{即 } \ln x_1 + x_1^2 + x_1 + \ln x_2 + x_2^2 + x_2 + x_1x_2 = 0.$$

$$\text{从而 } (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = x_1x_2 - \ln(x_1x_2).$$

$$\text{令 } t = x_1x_2, \text{ 则由 } h(t) = t - \ln t \text{ 得, } h'(t) = \frac{t-1}{t}.$$

可知, $h(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore h(t) \geq h(1) = 1.$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) \geq 1, \text{ 又 } x_1 + x_2 > 0.$$

$$\text{因此 } x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 成立.}$$

16 设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数有两个零点, 求满足条件的最小正整数 a 的值.

(3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求证: $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$.

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

(2) 3

(3) 证明见解析.

解析

(1) $x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x - (a-2) - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x} = \frac{(2x-a)(x+1)}{x}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{a}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{a}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{a}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{a}{2})$.

(2) 由(1)可得, 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 则 $a > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(\frac{a}{2}) < 0$, 即

$$-a^2 + 4a - 4a \ln \frac{a}{2} < 0.$$

$$\because a > 0, \therefore a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4 > 0.$$

令 $h(a) = a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4$, 可知 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(2) = -2$,

所以存在零点 $h(a_0) = 0$, $a_0 \in (2, 3)$,

当 $a > a_0$ 时, $h(a) > 0$; 当 $0 < a < a_0$ 时, $h(a) < 0$.

所以满足条件的最小正整数 $a = 3$.

又当 $a = 3$ 时, $f(3) = 3(2 - \ln 3) > 0$, $f(1) = 0$, $\therefore a = 3$ 时, $f(x)$ 由两个零点.

综上所述, 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

(3) $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = c$ 得两个不等实数根, 由(1)可知: $a > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$. 则 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = c$, $x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2 = c$.

两式相减得 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 - x_2^2 + (a-2)x_2 + a \ln x_2 = 0$,

$$\text{化为 } a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}.$$

$\because f'(\frac{a}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故只要证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可,

即证明 $x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$, 即证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2}$,

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 令 } g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$$

$\because 1 > t > 0, \therefore g'(t) > 0$.

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数, 又在 $t = 1$ 处连续且 $g(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时, $g(t) < 0$ 总成立. 故命题得证.

17 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

答案

- (1) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;
 当 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;
 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.
 (2) 证明见解析.

解析

- (1) 因为 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{a} - e^x$,
 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{1}{a}$,
 当 $x < \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,
 故函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$; 减区间为 $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$.
 当 $\ln \frac{1}{a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 则
 $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;
 当 $1 < \ln \frac{1}{a} < 2$ 时, 即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $\left[1, \ln \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在区间
 $\left(\ln \frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;
 当 $\ln \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.
 (2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 由 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} > 0$, 可得 $\ln \frac{1}{a} > 1$,
 则 $\frac{1}{a} > e$, 此时 $f(1) = \frac{1}{a} - e > 0$, 由此可得 $x_1 < 1 < \ln \frac{1}{a} < x_2$,
 故 $x_2 - x_1 > \ln \frac{1}{a} - 1$, 即 $x_1 - x_2 < 1 - \ln \frac{1}{a}$,
 又因为 $f(x_1) = \frac{x_1}{a} - e^{x_1} = 0$, $f(x_2) = \frac{x_2}{a} - e^{x_2} = 0$,
 所以 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2} < e^{1 - \ln \frac{1}{a}} = e^{\ln ae} = ae$,
 所以 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

18 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

- (1) 若 $k = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.
 (2) $f(x)$ 无零点, 求实数 k 的取值范围.
 (3) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

答案

- (1) $x + y + 1 = 0$.
 (2) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
 (3) 证明见解析 .

解析

- (1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1-kx}{x}$,
 当 $k=2$ 时 , $f'(1) = 1-2 = -1$, 则切线方程为 $y - (-2) = -(x-1)$, 即 $x + y + 1 = 0$.

- (2) ①若 $k < 0$ 时 , 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数 ,

$$\because f(1) = -k > 0 , f(e^k) = k - ke^k = k(1 - e^k) < 0 ,$$

$\therefore f(1) \cdot f(e^k) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有唯一零点 ;

① 若 $k=0$ $f(x) = \ln x$ 有唯一零点 $x=1$;

② 若 $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{k}$,

在区间 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上 , $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数 ;

在区间 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上 , $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数 ;

故在区间 $(0, +\infty)$ 上 , $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1$,

由于 $f(x)$ 无零点 , 须使 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1 < 0$, 解得 $k > \frac{1}{e}$,

故所求实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

- (3) 设 $f(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 , 设 $x_1 > x_2 > 0$,

$$\because f(x_1) = 0 , f(x_2) = 0 , \therefore \ln x_1 - kx_1 = 0 , \ln x_2 - kx_2 = 0 ,$$

$$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2) , \ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2) ,$$

$$\because x_1 x_2 > e^2 , \text{ 故 } \ln x_1 + \ln x_2 > 2 , \text{ 故 } k(x_1 + x_2) > 2 ,$$

$$\text{即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2} , \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} ,$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1 , \text{ 上式转化为 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1) ,$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} ,$$

$$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0 ,$$

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 ,

$$\therefore g(t) > g(1) = 0 , \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} ,$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2 .$$

19 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围 .
- (3) 设若函数 $f(x)$ 有两个零点为 m, n , 求证: $mn > e^2$.

答案

- (1) 单调递增区间为 $(0, e)$, 单调递减区间为 $(e, +\infty)$.
- (2) $0 < a < \frac{1}{e}$.
- (3) 证明见解析 .

解析

- (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a$, 所以 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

所以, 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减 .

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, e)$, 单调递减区间为 $(e, +\infty)$.

- (2) 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则函数 $f(x)$ 有两个零点, 等价于方程 $g(x) = a$ 有两个根, 等价于函数 $y = g(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个交点 .

因为 $g'(x) = f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 所以, 由 (1) 知 $g(x)$ 在 $x = e$ 时取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{e}$,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 所以 $0 < a < \frac{1}{e}$.

- (3) 不妨设 $m > n$, 由题意得 $\ln m = am$, $\ln n = an$,

两式相减得 $\ln m - \ln n = a(m - n)$, 所以 $a = \frac{\ln m - \ln n}{m - n}$,

两式相加得 $\ln m + \ln n = a(m + n)$, 所以 $a = \frac{\ln m + \ln n}{m + n}$,

所以 $(m - n) \left(a - \frac{2}{m + n} \right) = (m - n) \left(\frac{\ln m - \ln n}{m - n} - \frac{2}{m + n} \right) = \ln \frac{m}{n} - \frac{2 \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{\frac{m}{n} + 1}$,

令 $h(x) = \ln x - \frac{2(x - 1)}{x + 1}$, 当 $x > 1$ 时,

则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2}{x(x + 1)^2} > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$h(x) > h(1) = 0$,

所以 $(m - n) \left(a - \frac{2}{m + n} \right) > 0$, 因为 $m > n$,

所以 $a > \frac{2}{m + n}$, 即 $\frac{\ln m + \ln n}{m + n} > \frac{2}{m + n}$,

整理为 $\ln m + \ln n > 2$, 故 $mn > e^2$.

20 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - ax^2 + x$ ($a > 0$) .

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
 (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 : $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$.

答案

- (1) ①当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时 ,
 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 .
 ②当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时 ,
 $f(x)$ 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}, +\infty\right)$,
 单调递增区间为 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$.
 (2) 证明见解析 .

解析

- (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x} - 2ax + 1 = \frac{-2ax^2 + x - 1}{x} .$$

$a > 0$ 时 , 设 $g(x) = -2ax^2 + x - 1$, $\Delta = 1 - 8a$.

①当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时 , $\Delta \leq 0$, $g(x) \leq 0$, $\therefore f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 .

②当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时 , $\Delta > 0$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}$.

$x, f(x), f'(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2
$f(x)$	—	0	+	0
$f'(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值

所以函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}, +\infty\right)$,

单调递增区间为 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$.

- (2) 由 (1) 知 , 当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时 , 函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2a}$,

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2a} .$$

$$f(x_1) + f(x_2) = -\ln x_1 - ax_1^2 + x_1 - \ln x_2 - ax_2^2 + x_2$$

$$= -\ln(x_1 x_2) - a(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)$$

$$= -\ln(x_1 x_2) - a(x_1 + x_2)^2 + 2ax_1 x_2 + (x_1 + x_2)$$

$$= -\ln \frac{1}{2a} - a \times \frac{1}{4a^2} + 2a \times \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$$

$$= \ln(2a) + \frac{1}{4a} + 1 = \ln a + \frac{1}{4a} + \ln 2 + 1 .$$

$$\text{设 } h(a) = \ln a + \frac{1}{4a} + \ln 2 + 1, \quad h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} = \frac{4a-1}{4a^2} < 0 \left(0 < a < \frac{1}{8} \right),$$

所以 $h(a)$ 在 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } h(a) > h\left(\frac{1}{8}\right) = \ln \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} + \ln 2 + 1 = 3 - 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2 .$$