

导数双变量问题

1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln(1-x)$, a 为常数 .

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 , x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证 : $f(x_2) - x_1 > -\frac{3 + \ln 4}{8}$.

2 已知函数 $f(x) = \ln x + 2x - ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 求 a 的值.

(2) 设 $g(x) = f(x) + (a - 4)x$, 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性.

(3) 当 $a = -2$ 时, 若存在正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + 3x_1x_2 = x_1 + x_2$, 求证:

$$x_1 + x_2 > \frac{1}{2}.$$

3 已知函数 $f(x) = x - 2 - \ln^2 x - a \ln x$. ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) 令 $g(x) = xf'(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性并求极值 .

(2) 令 $h(x) = f(x) + 2 + \ln^2 x$, 若 $h(x)$ 有两个零点 .

① 求 a 的取值范围 .

② 若方程 $xe^x - a(\ln x + x) = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 证明 : $e^{x_1+x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$.

4 已知 $f(x) = x(\ln x - k - 1) (k \in \mathbf{R})$.

(1) 若对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立 , 求 k 的取值范围 .

(2) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 : $x_1 x_2 < e^{2k}$.

5 设函数 $f(x) = \ln x + ae^x$, $g(x) = axe^x$ $\left(0 < a < \frac{1}{e}\right)$.

- (1) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行于直线 $y = 2x$, 求实数 a 的值.
- (2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 判断 $y = h(x)$ 的零点的个数.
- (3) 设 x_1 是 $h(x)$ 的极值点, x_2 是 $h(x)$ 的一个零点, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $3x_1 - x_2 > 2$.

6 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \ln x$, $g(x) = -bx$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 设 $h(x) = f(x) - g(x)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值, 且 $f'(1) = g(-1) - 2$. 求函数 $h(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $a = 0$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

① 求证: $\frac{x_1 x_2}{e^2} > 1$.

② 求 b 的取值范围.

7 已知函数 $f(x) = x - ae^x$ ($a \in \mathbf{R}$) , $x \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求 a 的取值范围 ;
- (2) 证明 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大 ;
- (3) 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大 .

8 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数求 a 的取值范围.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$ 恰有两个不等的极值点 x_1 、 x_2 , 证明: $x_1 + x_2 < 2 \ln 2a$

9 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} - 2 \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,
 - ① 求 a 的取值范围.
 - ② 证明: $f(x_2) < x_2 - 1$.

10 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$) .

(1) 求实数 a 的值 .

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, 都有 $f(x) < \frac{m}{2x - x^2}$ 成立 , 求实数 m 的取值范围 .

(3) 若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明 : $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

11 已知函数 $f(x) = a(2 - x)e^x$, $g(x) = (x - 1)^2$.

(1) 若曲线 $y = g(x)$ 的一条切线经过点 $M(0, -3)$, 求这条切线的方程 .

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1 , x_2 .

① 求实数 a 的取值范围 .

② 证明 : $x_1 + x_2 < 2$.

12 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切的切线方程 .

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

① 求实数 a 的范围 .

② 证明 : $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

13 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 单调性 .

(2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.

① 证明 : $f(x)$ 恰有两个零点 .

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点 , x_1 为 $f(x)$ 的零点 , 且 $x_1 > x_0$, 证明 : $3x_0 - x_1 > 2$.

14 已知函数 $f(x) = (x + b)(e^x - a)$, $(b > 0)$ 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e - 1)x + ey + e - 1 = 0$.

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 : $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1 - 2e)}{1 - e}$.

15 已知函数 $f(x) = \ln x - x^2 + x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间 .
- (2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq \left(\frac{a}{2} - 1\right)x^2 + ax - 1$ 恒成立 , 求整数 a 的最小值 .
- (3) 若正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 = 0$, 证明 $x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

16 设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若函数有两个零点 , 求满足条件的最小正整数 a 的值 .
- (3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求证 : $f' \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) > 0$.

17 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值 ;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

18 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

- (1) 若 $k = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .
- (2) $f(x)$ 无零点 , 求实数 k 的取值范围 .
- (3) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1 , x_2 , 求证 : $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

19 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 , 求 a 的取值范围 .
- (3) 设若函数 $f(x)$ 有两个零点为 m, n , 求证 : $mn > e^2$.

20 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - ax^2 + x (a > 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 : $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$.

