

天津数列高考

1 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

2 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 已知 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

3 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 公差为 d , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项.

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $a_1 = d$, $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$.

4 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列, 且公比大于0,

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_{2n} b_n\}$ 的前 n 项和($n \in \mathbf{N}^*$).

5 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

6 设 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ，令 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_2 = \frac{3}{4}$ ， $a_{n+2} = f(a_n) + f(a_{n+1})$ ， $n = 1, 2, \dots$.

求证：对任何正整数 n ，有 $f(3 \cdot 2^{n-1}) \leq a_{2n} \leq f(3 \cdot 2^{2n-2})$.

7 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_2 + b_3 = 2a_3$ ，

$$a_5 - 3b_2 = 7.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = a_n b_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数，且 $q \neq 1$)， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_2 + a_3$ ，

$a_3 + a_4$ ， $a_4 + a_5$ 成等差数列.

(1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

9 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$ ， $S_6 = 63$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项，求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和。

10 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。

① 求 T_n 。

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。

11 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。 $\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为

$$T_n$$
 ($n \in \mathbf{N}^*$)。已知 $b_1 = 1, b_3 = b_2 + 2, b_4 = a_3 + a_5, b_5 = a_4 + 2a_6$ 。

(1) 求 S_n 和 T_n 。

(2) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n$ ，求正整数 n 的值。