

圆锥曲线高考模拟70题

1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 点 $T(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程.

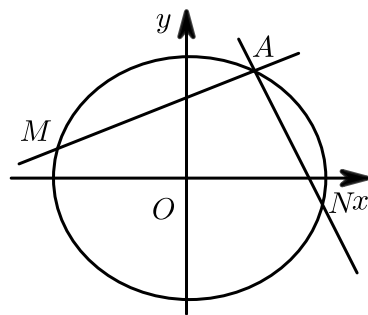
(2) 已知直线 $y = \sqrt{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$, 求实数 m 的值.

2 已知点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$, 三角形 ABM 的两条边 AM, BM 所在直线的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求点 M 的轨迹方程.

(2) 设直线 AM 方程为 $x = my - 2$ ($m \neq 0$), 直线 l 方程为 $x = 2$, 直线 AM 交 l 于 P , 点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 MQ 与 x 轴相交于点 D . 若 $\triangle APD$ 面积为 $2\sqrt{6}$, 求 m 的值.

3 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 过点 A 作两条直线 l_1, l_2 , 它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点, 其分别交圆于点 M, N .



(1) 若 $A(-2, 0)$, 求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 解答下列各题

① 求证: 对于圆上的任意点 A , 都有 $l_1 \perp l_2$.

② 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

4 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B, D 两点, 且 A, B, D 三点不重合.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 求证: 直线 AB, AD 的斜率之和为定值.
- (3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?

5 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M, N , 且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\vec{OM} \cdot \vec{ON}}$ (O 为坐标原点), 求直线 m 的方程.

6 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.
 - ① 求实数 m 的取值范围.
 - ② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

7 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$, 使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$. 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

8 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$ ，离心率为 $\frac{1}{3}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，左、右顶点分别为 A, B ，点 M, N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点，且 $F_1M \parallel F_2N$ ，记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，若 $3k_1 + 2k_2 = 0$ ，求直线 F_1M 的方程。

9 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， $|F_1F_2| = 2$ ，直线 l 过 F_1 且垂直于 x 轴，交椭圆 C 于 A, B 两点，连接 A, B, F_2 ，所组成的三角形为等边三角形。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 过右焦点 F_2 的直线 m 与椭圆 C 相交于 M, N 两点，试问，椭圆 C 上是否存在点 P ，使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ 成立？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由。

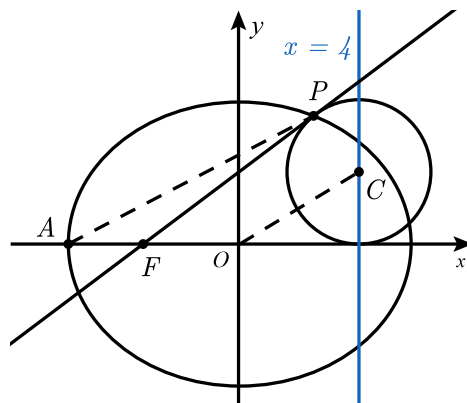
10 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，直线 $y = x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点（ A, B 不是椭圆 C 的顶点）。点 D 在椭圆 C 上，且 $AD \perp AB$ ，直线 BD 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点。
 - (i) 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 ，证明存在常数 λ 使得 $k_1 = \lambda k_2$ ，并求出 λ 的值；
 - (ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值。

11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ 过点 $P(2, 1)$ 。

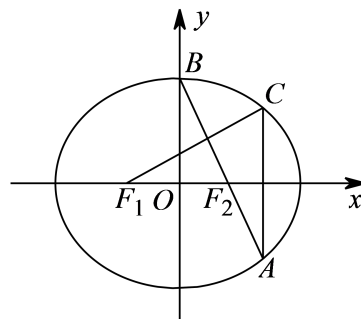
- (1) 求椭圆 C 的方程，并求其离心率。
- (2) 过点 P 作 x 轴的垂线 l ，设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上），点 A 关于 l 的对称点为 A' ，直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B 。设 O 为原点，判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系，并说明理由。

- 12 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，左顶点为 A ，上顶点为 B 。已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点)。



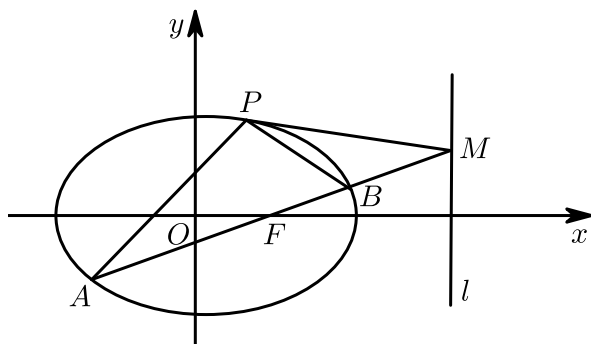
- (1) 求椭圆的离心率。
- (2) 设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P ，圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切，圆心 C 在直线 $x = 4$ 上，且 $OC \parallel AP$ ，求椭圆的方程。

- 13 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，顶点 B 的坐标为 $(0, b)$ ，连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A ，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C ，连接 F_1C 。



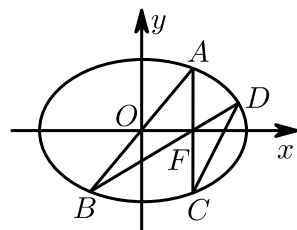
- (1) 若点 C 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ ，且 $BF_2 = \sqrt{2}$ ，求椭圆的方程。
- (2) 若 $F_1C \perp AB$ ，求椭圆离心率 e 的值。

- 14 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

- 15 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. F 为椭圆的右焦点, A, B 为椭圆关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.



- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值;
- (3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m , 使得 $k_2 = mk_1$, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

16 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ．已知椭圆的短轴长为4，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ．

- (1) 求椭圆的方程．
- (2) 设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上．若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点)，且 $OP \perp MN$ ，求直线 PB 的斜率．

17 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$ ，右焦点为 F ，且 $|OA| = |OF|$ ，其中 O 为原点．

- (1) 求椭圆的方程．
- (2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ ，点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点)，直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P ，且 P 为线段 AB 的中点．求直线 AB 的方程．

18 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，直线 l 过点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$ ，且与椭圆 C 相切于点 P ．

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 是否存在过点 $A(4, 0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M 、 N ，使得 $36|AP|^2 = 35|AM| \cdot |AN|$ ？若存在，试求出直线 m 的方程；若不存在，请说明理由．

19 平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A 、 B 两点， P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ．

- (1) 求 M 的方程．
- (2) C 、 D 为 M 上两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$ ，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值．

20 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

- (1) 求椭圆 C 的方程．
- (2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P 、 Q 两点，且在直线 $l_2: x - y + 2\sqrt{6} = 0$ 上存在点 M ，使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形，求直线 l_1 的方程．

21 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

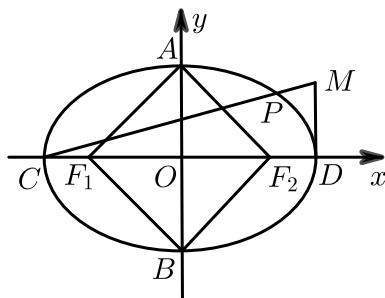
(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P ，证明：当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时，点 P 在以 AB 为直径的圆上。

22 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，直线 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 过点 $N(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点，线段 A, B 的中垂线为 l' ，若 l' 在 y 轴上的截距为 $\frac{4}{13}$ ，求直线 l 的方程。

23 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，短轴的两端点为 A, B ，且四边形 F_1AF_2B 是边长为 2 的正方形。



(1) 求椭圆的方程。

(2) 若 C, D 分别是椭圆长轴的左、右端点，动点 M 满足 $MD \perp CD$ ，连结 CM ，交椭圆于点 P ，证明： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值。

(3) 在 (2) 的条件下，试问 x 轴上是否存在异于点 C 的定点 Q ，使得以 MP 为直径的圆恒过直线 DP, MQ 的交点，若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

24 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，以原点 O 为圆心，椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + 2 = 0$ 相切。

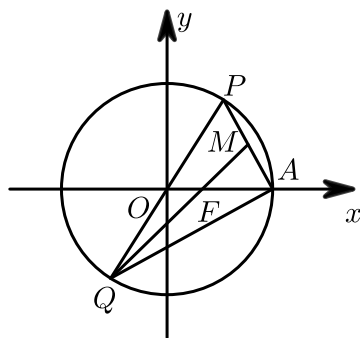
(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 设 Q 为椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点，过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆 C 于 M, N 两个不同的点，记 $\triangle QF_2M$ 的面积为 S_1 ， $\triangle OF_2N$ 的面积为 S_2 ，令 $S = S_1 + S_2$ ，求 S 的最大值。

25 如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是椭圆上的一点.

- (1) 求椭圆的标准方程.
- (2) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.
 - ① 求证: $OM \perp MN$.
 - ② 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

26 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F , A , 过原点的直线与椭圆 C 交于点 P , Q (点 P 在第一象限内), 连接 AP , FQ , 若 $AF = 2$, $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积的3倍.

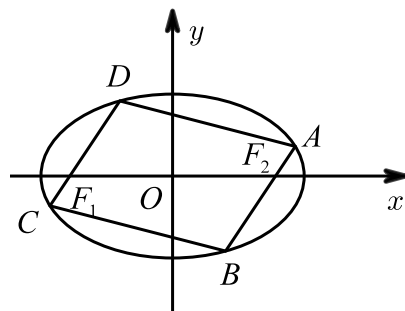


- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 已知 M 为线段 PA 的中点, 连结 QA , QM .
 - ① 求证: Q, F, M 三点共线.
 - ② 记直线 QP , QM , QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$, 求 $\triangle PQM$ 的面积.

27 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

- 28 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴的一个顶点与两个焦点构成正三角形，且该三角形的面积为 $\sqrt{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的方程 .
- (2) 设 F_1, F_2 是椭圆 C 的左右焦点，若椭圆 C 的一个内接平行四边形的一组对边过点 F_1 和 F_2 ，求这个平行四边形的面积最大值 .

- 29 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程 .
- (2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点)，求 $|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值 .

- 30 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，且 $F_1(-1, 0)$ ，椭圆经过点 $(1, \frac{3}{2})$.

- (1) 求椭圆的方程 .
- (2) 直线 l 过椭圆右顶点 B ，交椭圆于另一点 A ，点 G 在直线 l 上，且 $\angle GOB = \angle GBO$. 若 $GF_1 \perp AF_2$ ，求直线 l 的斜率 .

31 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(-2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 经过椭圆左焦点 F 的直线 (不经过点 P 且不与 x 轴重合) 与椭圆交于 A 、 B 两点, 与直线 $l: x = -3$ 交于点 M , 记直线 PA 、 PB 、 PM 的斜率分别为 k_1 、 k_2 、 $k_3 (k_3 \neq 0)$. 则是否存在常数 λ , 使得向量 $\vec{m} = (k_1 + k_2, \lambda)$, $\vec{n} = (k_3, 1)$ 共线? 若存在求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

32 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且短轴长为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 过点 P 作 x 轴的垂线 l , 设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上 (点 A 不在直线 l 上), 点 A 关于 l 的对称点为 A' , 直线 $A'P$ 与椭圆 C 交于另一点 B . 设 O 为坐标原点, 判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系, 并说明理由.

33 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A 、 B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1 、 k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

34 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点重合, F_1 、 F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 过椭圆 C_1 右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A 、 B 两点.

- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
- (2) 是否存在直线 l , 使得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.
- (3) 设点 $M(t, 0)$ 是一个动点, 若直线 l 的斜率存在, 且 N 为 AB 中点, $MN \perp AB$, 求实数 t 的取值范围.

35 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设点 P 、 Q 为椭圆上位于第一象限的两个动点，满足 $PF \perp QF$ ， C 为 PQ 的中点，线段 PQ 的垂直平分线分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点。
 - ① 求证： A 为 BC 的中点。
 - ② 若 $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{3}{5}$ (S 为三角形的面积)，求直线 PQ 的方程。

36 设椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，左顶点为 A ，左焦点到左顶点的距离为 1，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

- (1) 求椭圆 M 的方程。
- (2) 过点 A 作斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于另一点 B ，连接 BF_2 并延长交椭圆 M 于点 C ，若 $F_1C \perp AB$ ，求 k 的值。

37 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ，左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，椭圆的四个顶点围成的菱形面积为 $4\sqrt{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 设 Q 是椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点， O 为坐标原点，过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。

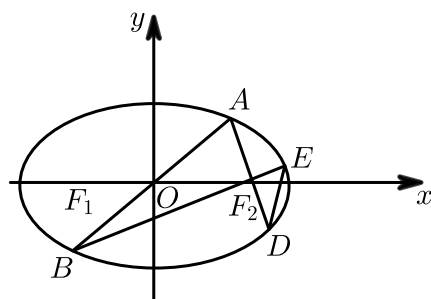
38 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点，且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点)，求 $|AB|$ 的取值范围。

39 已知点 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，过点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点，当直线 l 过 C 的下顶点时， l 的斜率为 $\sqrt{3}$ 。当直线 l 垂直于 C 的长轴时， $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ，

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 当 $|MF| = 2|FN|$ 时，求直线 l 的方程。
- (3) 若直线 l 上存在点 P 满足 $|PM|, |PF|, |PN|$ 成等比数列，且点 P 在椭圆外，证明：点 P 在定直线上。

40 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， M 在椭圆上， $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$ ，面积的最大值为 2。



- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 直线 $y = kx (k > 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B ，连接 AF_2, BF_2 并延长交椭圆 C 于 D, E ，连接 DE 。探索 AB 与 DE 的斜率之比是否为定值并说明理由。

41 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1, F_2 是其左右焦点， A_1, A_2 为其左右顶点， B_1, B_2 为其上下顶点，若 $\angle B_1F_2O = \frac{\pi}{6}$ ， $|F_1A_1| = 2 - \sqrt{3}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 过 A_1, A_2 分别作 x 轴的垂线 l_1, l_2 ，椭圆 C 的一条切线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ ， l 与 l_1, l_2 交于 M, N 二点，求证： $\angle MF_1N = \angle MF_2N$ 。

42 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，且满足离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$ ，过原点 O 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 设点 $A(2, 1)$ ，求 $\triangle AMN$ 面积的最大值。

43 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $P(2, 0)$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 设 F 为 C 的左焦点, 点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点, 过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B
 - ① 证明: OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点).
 - ② 当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时, 求点 M 的坐标.

44 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $A(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过点 A 且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆交于点 D , 与 y 轴交于点 E .

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 设点 P 为 AD 的中点.
 - ① 若 x 轴上存在点 Q , 对于任意的 $k (k \neq 0)$, 都有 $OP \perp EQ$ (O 为原点), 求出点 Q 的坐标.
 - ② 射线 PO (O 为原点) 与椭圆 C 交于点 M , 满足 $\sqrt{1+4k^2} \tan \angle AMD = \frac{6}{\vec{MA} \cdot \vec{MD}}$, 求正数 k 的值.

45 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为 6, 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.

- (1) 求 C 的方程.
- (2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点, 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线, 分别交 C 于 P, Q 两点. 已知直线 OP, OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1, k_2 .
 - ① 求证: $k_1 k_2$ 为定值.
 - ② 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由.

46 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，点 A 为椭圆的右顶点，点 B 为椭圆的上顶点，点 F 为椭圆的左焦点，且 $\triangle FAB$ 的面积是 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 设直线 $x = my + 1$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1 (P_1 与 Q 不重合)，则直线 P_1Q 与 x 轴交于点 H ，求 $\triangle PQH$ 面积的取值范围。

47 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，点 M 是椭圆上的动点。 $\triangle MF_1F_2$ 的最大面积是 $\sqrt{3}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 圆 E 经过椭圆的左右焦点，且与椭圆 C 在第一象限的交点为 A ，且 F_1, E, A 三点共线。直线 l 交椭圆 C 于两点 P, Q ，且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{OA} (\lambda \neq 0)$ 。
 - ① 求直线 OA 的斜率。
 - ② 当 $\triangle APQ$ 的面积取到最大值时，求直线 l 的方程。

48 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 2，若点 A, B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t), (t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

- (1) 求椭圆 E 的方程。
- (2)
 - ① 求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。
 - ② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。

49 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ， F 为其右焦点， $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$ ，且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

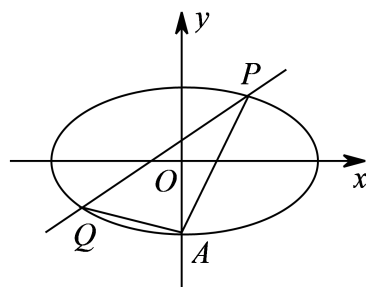
- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P ，交直线 $x = 4$ 于点 D ，直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G ，直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H 。若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$ ，求 λ 取值范围。

50 已知抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的焦点为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, C 的准线与 E 交于 P, Q 两点, 且 $|PQ| = 2$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 过 E 的左顶点 A 作直线 l 交 E 于另一点 B , 且 BO (O 为坐标原点) 的延长线交 E 于点 M . 若直线 AM 的斜率为 1, 求 l 的方程.

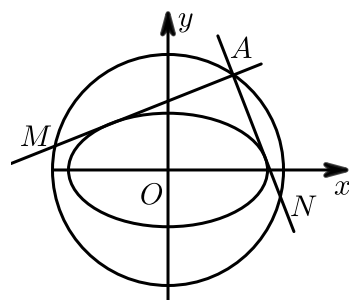
51 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 经过点 $(1, 1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P, Q (均异于点 A), 问直线 AP 与 AQ 的斜率之和是否为定值, 若是, 求出这个定值; 若不是, 请说明理由.

52 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 过点 A 作两条直线 l_1, l_2 , 它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点, 且分别交圆于点 M, N .



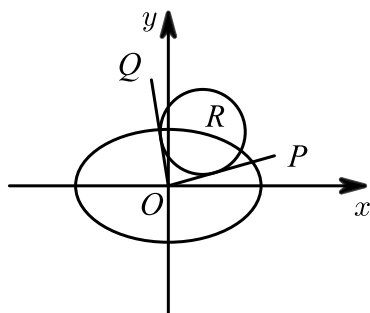
(1) 若 $A(-2, 0)$, 求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 请回答下列各题:

① 求证: 对于圆上的任意点 A , 都有 $l_1 \perp l_2$ 成立.

② 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

- 53 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $R(x_0, y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$ 上的一点，从原点 O 向圆 $R: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 8$ 作两条切线，分别交椭圆于点 P, Q .



- (1) 若 R 点在第一象限，且直线 OP, OQ 互相垂直，求圆 R 的方程 .
 - (2) 若直线 OP, OQ 的斜率存在，并记为 k_1, k_2 ，求 $k_1 \cdot k_2$ 的值 .
 - (3) 试问 $OP^2 + OQ^2$ 是否为定值？若是，求出该值；若不是，说明理由 .
- 54 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，右焦点为 $F(c, 0)$ ，直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 与 x 轴相交于点 T ，且 F 是 AT 的中点 .
- (1) 求椭圆的离心率 .
 - (2) 过点 T 的直线与椭圆相交于 M, N 两点， M, N 都在 x 轴上方，并且 M 在 N, T 之间，且 N 到直线 l 的距离是 M 到直线 l 距离的 2 倍 .
 - ① 记 $\triangle NFM, \triangle NFA$ 的面积分别是 S_1, S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$.
 - ② 若原点 O 到直线 TN 的距离为 $\frac{20\sqrt{41}}{41}$ ，求椭圆方程 .

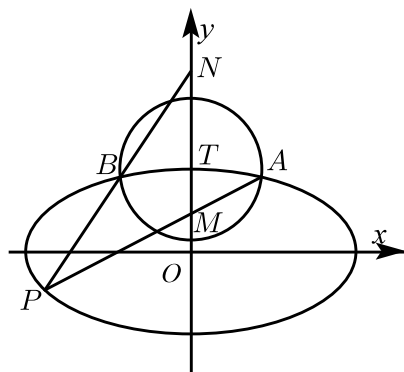
- 55 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F ，右顶点为 A ，已知 $|OA| - |OF| = 1$ ，其中 O 为原点， e 为椭圆的离心率 .
- (1) 求椭圆的方程及离心率 e 的值 .
 - (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H ，若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线 l 的斜率的取值范围 .

- 56 在平面 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程 .
 - (2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值 .

57 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，上顶点为 B ，右焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{2} + 1$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 若 M, N 为 y 轴上的两个动点，且 $MF \perp NF$ ，直线 AM 和 AN 分别与椭圆 C 交于 D, E 两点。
 - ① 求 $\triangle MFN$ 的面积的最小值。
 - ② 证明： E, O, D 三点共线。

58 如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，以椭圆 C 的上顶点 T 为圆心作圆 $T: x^2 + (y - 1)^2 = r^2 (r > 0)$ ，圆 T 与椭圆 C 在第一象限交于点 A ，在第二象限交于点 B 。

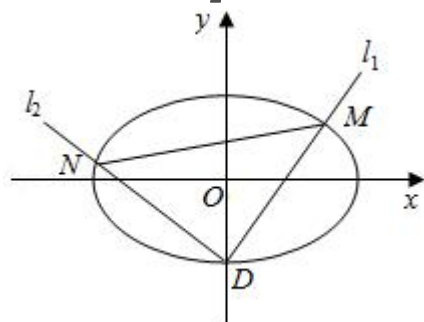


- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 求 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$ 的最小值，并求出此时圆 T 的方程。
- (3) 设点 P 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点，且直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N ， O 为坐标原点，求证： $|OM| \cdot |ON|$ 为定值。

59 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点， O 为坐标原点，过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M, N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。

- 60 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，短轴长是 2.



- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设椭圆 C 的下顶点为 D ，过点 D 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，这两条直线与椭圆 C 的另一个交点分别为 M, N 。设 l_1 的斜率为 $k (k \neq 0)$ ， $\triangle DMN$ 的面积为 S ，当 $\frac{S}{|k|} > \frac{16}{9}$ 时，求 k 的取值范围。

- 61 已知中心在坐标原点 O ，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 椭圆过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于 P, Q 两点，满足直线 OP, PQ, OQ 的斜率依次成等比数列，若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求直线 l 与 y 轴交点的坐标。

- 62 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短半轴长为 1，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

- (1) 求 C 的方程。
- (2) 设 C 的上、下顶点分别为 B, D ，动点 P (横坐标不为 0) 在直线 $y = 2$ 上，直线 PB 交 C 于点 M ，记直线 DM, DP 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求 $k_1 \cdot k_2$ 的值。

- 63 已知 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点， F_1, F_2 为椭圆 C 的左、右焦点，点 P 为椭圆 C 上一点 (P 点在第一象限)，线段 PF_2 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切于点 Q ，且点 Q 为线段 PF_2 的中点。

- (1) 求线段 PF_1 的长。
- (2) 求椭圆 C 的离心率。
- (3) 设直线 OQ 交椭圆于 M, N 两点 (其中点 M 在第一象限)，过点 A 作 OQ 的平行线 l 交椭圆 C 于点 D ， BD 交 OQ 于点 H ，求 $S_{\triangle DMH} : S_{\triangle BNH}$ 。

64 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$ ，且左顶点到右焦点的距离为 5.

- (1) 求椭圆方程.
- (2) 椭圆上有两点 A, B , O 为坐标原点, 且 $AO \perp BO$, 证明存在定点 M , 使得 M 到直线 AB 的距离为定值, 并求出定值.

65 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且点 $(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆上.

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 设点 A 是椭圆的左顶点, 点 B 在 x 轴上, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 求点 B 的横坐标的取值范围.

66 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$, 上顶点为 B_1 , 原点 O 到直线 B_1F_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 若点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上, 点 A 为椭圆的右顶点, 是否存在过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于点 B (异于点 A), 使得 $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

67 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的准线上, 且椭圆的短轴长为 2, F_1, F_2 分别为椭圆的左, 右焦点, A, B 分别为椭圆的左, 右顶点, 设点 P 在第一象限, 且 $PB \perp x$ 轴, 连接 PA 交椭圆于点 C , 直线 PA 的斜率为 k .

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 若三角形 ABC 的面积等于四边形 $OBPC$ 的面积, 求 k 的值.
- (3) 设点 N 为 AC 的中点, 射线 NO (O 为原点) 与椭圆交于点 M , 满足

$$\sqrt{1 + 4k^2} \tan \angle AMC = \frac{6}{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}}, \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

68 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，右顶点为点 A ，点 E 的坐标为 $(0, \frac{b}{4})$ ，延长线段 F_1E 交椭圆于点 M ， $MF_2 \perp x$ 轴。

(1) 求椭圆的离心率。

(2) 设抛物线 $y^2 = \frac{24}{5}bx$ 的焦点为 F ， B 为抛物线上一点， $|BF| = \frac{36}{5}b$ ，直线 BF 交椭圆于 P, Q 两点，若 $|AP|^2 + |AQ|^2 = \frac{42}{5}$ ，求椭圆的标准方程。

69 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设椭圆 C 的左焦点为 F ，右顶点为 G ，过点 G 的直线与 y 轴正半轴交于点 S ，与椭圆交于点 H ，且 $HF \perp x$ 轴，过点 S 的另一直线与椭圆交于 M, N 两点，若 $S_{\triangle SMG} = 6S_{\triangle SHN}$ ，求直线 MN 的方程。

70 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $P(\sqrt{2}a, \sqrt{3})$ ， F_1, F_2 分别是椭圆 W 的左、右焦点， $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形。

(1) 求椭圆 W 的方程。

(2) 过左焦点 F_1 作直线 l_1 交椭圆于 A, B 两点，其中 $A(0, 1)$ ，另一条过 F_1 的直线 l_2 交椭圆于 C, D 两点（不与 A, B 重合），且 D 点不与点 $(0, -1)$ 重合。过 F_1 作 x 轴的垂线分别交直线 AD, BC 于 E, G 。

① 求 B 点坐标。

② 求证： $|EF_1| = |F_1G|$ 。

71 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设经过点 F 的直线 l 不与坐标轴垂直，直线 l 与椭圆 C 相交于点 A, B ，且线段 AB 的中点为 M ，经过坐标原点 O 作射线 OM 与椭圆 C 交于点 N ，若四边形 $OANB$ 为平行四边形，求直线 l 的方程。