

圆锥曲线1

考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，模拟题共 48 套试卷中出现频率 100%

知识模块	考点	天津卷	一模	二模
圆锥曲线	椭圆的定义、标准方程、性质	2014-19;2015-19; 2016-19;2017-19; 2018-19;2019-18	24次	24次
	椭圆与直线的位置关系	2014-19;2015-19; 2016-19;2017-19; 2018-19;2019-18	24次	24次

考点分析



高频考点

- ①椭圆的标准方程（如：2018年天津卷理第19题）
- ②抛物线的标准方程（如：2017年天津卷理第19题）
- ③直线与椭圆位置关系求斜率（如：2018年天津卷理第19题，2019年天津卷理第18题）
- ④直线与椭圆位置关系求直线（如：2017年天津卷理第19题）
- ⑤直线与椭圆位置关系求斜率的取值范围（如：2015年天津卷理第19题）
- ⑥椭圆的离心率（如：2014年天津卷理第18题）



考试难点

- ①由已知等式、面积等关系式，找直线与椭圆位置关系（如：2018年天津卷理第19题）
- ②由椭圆与抛物线的位置关系求标准方程（如：2017年天津卷理第19题）
- ③由平面几何角度关系找斜率的关系（如：2016年天津卷理第19题）
- ④由椭圆与圆的关系确定直线的性质（如：2014年天津卷理第18题）
- ⑤已知椭圆上点的向量关系确定斜率的值（如：2013年天津卷理第18题）



易错点

- ①忽视定义中隐含条件致误（如：2018年天津卷理第19题）
- ②忽视直线存在性的检验致误（如：2016年天津卷理第19题）
- ③忽视曲线的范围致误

一、弦长与面积

你先试试看

1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，

$$|AB| = \sqrt{13}.$$

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点， l 与直线 AB 交于点 M ，且点 P, M 均在第四象限，若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍，求 k 的值.

解析：

(1) $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 且 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$,

而且 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, 从而 $a = 3, b = 2$,

即椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

-----4分

(2) 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 M 的坐标为 (x_2, y_2) ,

由题意 , $x_2 > x_1 > 0$, 点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$,

由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍可得 $|PM| = 2|PQ|$,

从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$,

-----7分

由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_2 = \frac{6}{3k + 2}$,

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y 可得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2 + 4}}$.

-----10分

而且 $x_2 = 5x_1$, 带入两边平方 , 整理可得 $18k^2 + 25k + 8 = 0$,

解得 $k = -\frac{8}{9}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$.

-----12分

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时 , $x_2 = -9 < 0$ 不合题意 ,

当 $k = -\frac{1}{2}$ 时 , $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$ 满足 , 所以 $k = -\frac{1}{2}$.

-----14分

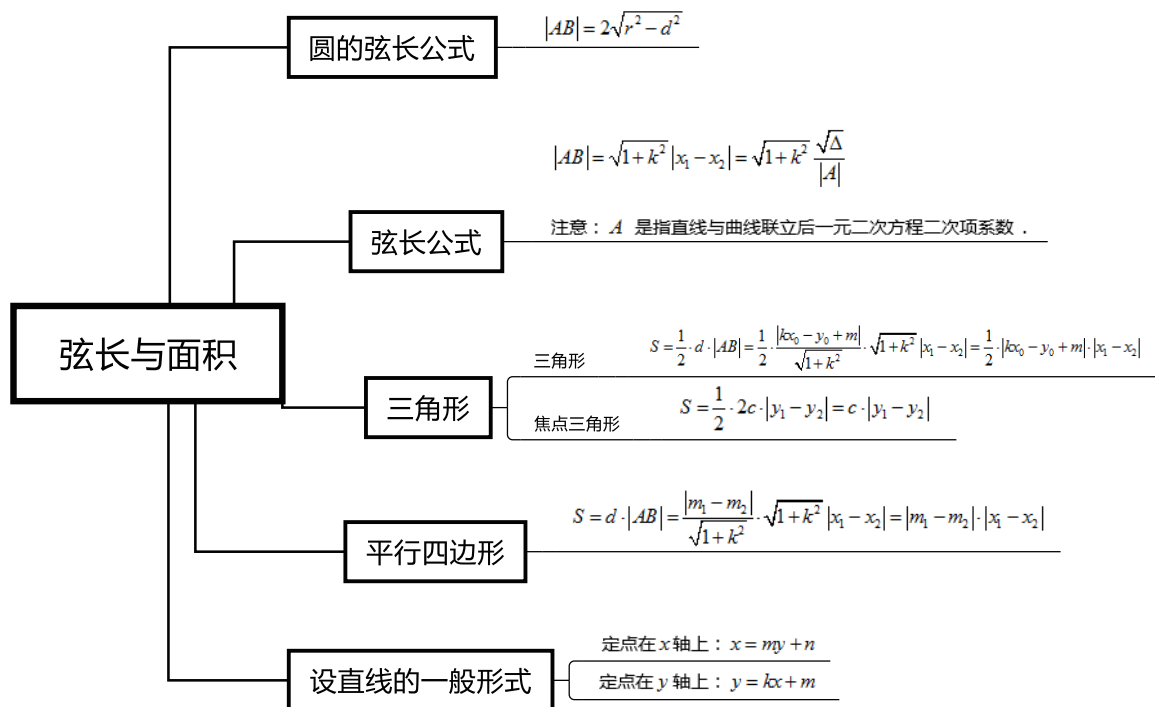
听我慢慢讲

2 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。已知 A 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点， F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程。

(2) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于点 A)，直线 BQ 与 x 轴相交于点 D 。若 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，求直线 AP 的方程。

导图总结



你再试试看

3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，右焦点为 $F(c, 0)$ ，直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 与 x 轴相交于点 T ，且 F 是 AT 的中点。

(1) 求椭圆的离心率。

(2) 过点 T 的直线与椭圆相交于 M, N 两点， M, N 都在 x 轴上方，并且 M 在 N, T 之间，且 N 到直线 l 的距离是 M 到直线 l 距离的 2 倍。

① 记 $\triangle NFM, \triangle NFA$ 的面积分别是 S_1, S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 。

② 若原点 O 到直线 TN 的距离为 $\frac{20\sqrt{41}}{41}$ ，求椭圆方程。



题型通解

(1) 根据 N 到直线与 M 到直线的距离之比，确定点 M 与 N, T 的位置关系，找出 $S_{\triangle NMF}$ 与 $S_{\triangle TNF}$ 的比值关系。

(2) 过定点的直线，设直线方程一般有两种形式： $x = my + n$ ； $y = kx + m$ 。

常见的设直线方法：

① 抛物线： $y^2 = 2px$ ，一般设_____； $x^2 = 2py$ ，一般设_____。

② 椭圆与双曲线：定点在 x 轴上，一般设_____；定点在 y 轴，一般设_____。

登堂入室

4 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，左右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ ，左右顶点为 $A_1(-2, 0)$ 、 $A_2(2, 0)$ ，上下顶点为 $B_1(0, \sqrt{3})$ 、 $B_2(0, -\sqrt{3})$

(1) 过 $F_2(1, 0)$ 点的直线交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ ，求 $\triangle B_1CD$ 面积的最大值

(2) 过 $F_2(1, 0)$ 点的两条互相垂直的直线 lm 分别交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ ，

$E(x_3, y_3)$ 、 $M(x_4, y_4)$ ，求四边形 $CEDM$ 面积的最小值

(3) 过点 F_1 的直线交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ 两点，线段 CD 的中点为 G ， CD 的中垂线与 x 轴和 y 轴分别交于 E 、 M 两点，记 $\triangle GF_1E$ 的面积为 S_1 ， $\triangle OEM$ (O 为原点) 的面积为 S_2 。试问：是否存在直线 CD ，使得 $S_1 = S_2$ ？若存在，求出直线的方程，若不存在，请说明理由。

二、最值问题

你先试试看

5 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，过 F 点的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ， $|AF| = 2|FB|$ 。

(1) 求椭圆 C 的离心率。

(2) 若 $|AF| = \frac{5}{2}$ ，求椭圆 C 的方程。

(3) 在 (2) 的条件下， D 为椭圆 C 上一点，当 $\triangle ABD$ 面积取得最大值时，求 D 点的坐标。

解析：

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $y_1 < 0$, $y_2 > 0$,

$$\therefore |AF| = 2|FB|.$$

$$-y_1 = 2y_2.$$

设直线 l 的方程为： $y = \sqrt{3}(x - c)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{3}(x - c) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{化为: } (3a^2 + b^2)y^2 + 2\sqrt{3}b^2cy - 3b^4 = 0,$$

-----2分

$$\text{解得 } y = \frac{-2\sqrt{3}b^2c \pm \sqrt{12b^4c^2 + 12b^4(3a^2 + b^2)}}{2(3a^2 + b^2)} = \frac{-\sqrt{3}b^2c \pm 2\sqrt{3}ab^2}{3a^2 + b^2},$$

$$y_1 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c + 2a)}{3a^2 + b^2}, y_2 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c - 2a)}{3a^2 + b^2},$$

$$\therefore \frac{-\sqrt{3}b^2(c + 2a)}{3a^2 + b^2} = 2 \times \frac{-\sqrt{3}b^2(c - 2a)}{3a^2 + b^2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}.$$

-----5分

$$(2) \therefore |AF| = \frac{5}{2}, |AF| = 2|FB|.$$

$$\therefore |AB| = |AF| + |FB| = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4},$$

-----6分

$$y_2 - y_1 = |AB| \sin \frac{\pi}{3} = \frac{15}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2 + b^2},$$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, b^2 = a^2 - c^2, \text{解得 } a = 3, b = \sqrt{5}, c = 2.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

-----9分

(3) 当 D 点在平行于直线 l 的椭圆的切线上的切点处时, $\triangle ABD$ 的面积最大,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \sqrt{3}x + t (t > 0) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}, \text{可得 } 32x^2 + 18\sqrt{3}tx + 9(t^2 - 5) = 0,$$

-----11分

$$\text{令 } \Delta = (18\sqrt{3}t)^2 - 4 \times 32 \times 9(t^2 - 5) = 0, \text{解得 } t = 4\sqrt{2}.$$

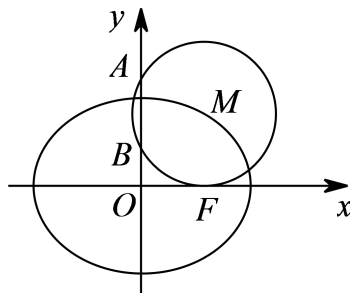
$$\text{解得 } x = -\frac{9\sqrt{6}}{8}, y = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

$$\therefore D\left(-\frac{9\sqrt{6}}{8}, \frac{5\sqrt{2}}{8}\right).$$

-----14分

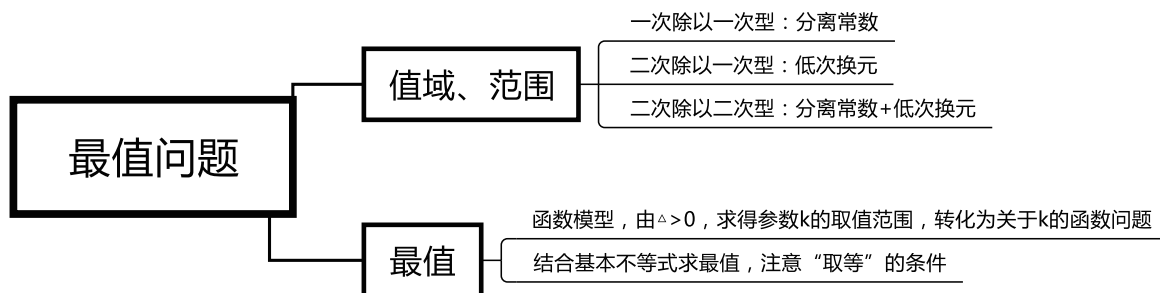
听我慢慢讲

- 6 已知点 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 点 M 在椭圆 E 上, 以 M 为圆心的圆与 x 轴切于点 F , 与 y 轴交于 A 、 B 两点, 且 $\triangle ABM$ 是边长为2的正三角形. 又椭圆 E 上的 P 、 Q 两点关于直线 $l: y = x + n$ 对称.



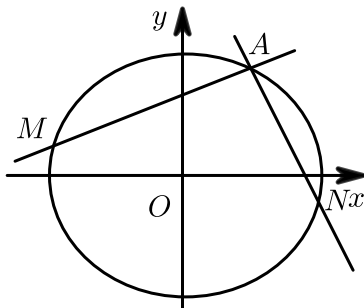
- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 当直线 l 过点 $(0, \frac{1}{5})$ 时, 求直线 PQ 的方程.
- (3) 若点 C 是直线 l 上一点, 且 $\angle PCQ = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle PCQ$ 面积的最大值.

导图总结



你再试试看

- 7 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点，过点 A 作两条直线 l_1, l_2 ，它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点，其分别交圆于点 M, N 。



- (1) 若 $A(-2, 0)$ ，求直线 l_1, l_2 的方程。
- (2) 解答下列各题
- ① 求证：对于圆上的任意点 A ，都有 $l_1 \perp l_2$ 。
 - ② 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围。



题型通解

求取值范围的题型一般有两个难点：一是写出题中要求的解析式，二是求解取值范围。

①写出解析式：一般利用弦长公式，点到直线的距离公式将题目所求表示出来。

②求取值范围：一般有以下3种模型。



一次除以一次

当 $x > 1$ 时, 求 $\frac{x+2}{x+1}$ 的值域.

$$\frac{x+2}{x+1} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$\therefore x > 1$, $\therefore$ 值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



二次除以一次

当 $x > -1$ 时, 求 $\frac{x^2+3x+3}{x+1}$ 的最小值.

令 $\underline{\hspace{2cm}}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$,

$$\text{原式} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}},$$

当且仅当 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时等号成立.



二次除以一次变式

求 $\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值.

令 $\underline{\hspace{2cm}}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$,

$$\text{原式} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}},$$

当且仅当 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $\underline{\hspace{2cm}}$ 等号成立.



二次除以二次

求 $\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ 的最大值.

$$\text{原式} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}},$$

当且仅当 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $\underline{\hspace{2cm}}$ 等号成立.

登堂入室

8 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2，一个顶点与两个焦点组成一个等边三角形．

(1) 求椭圆 C 的标准方程．

(2) 椭圆 C 的右焦点为 F ，过 F 点的两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点，直线 l_2 与直线 $x = 4$ 交于 T 点．

① 求证：线段 PQ 的中点在直线 OT 上．

② 求 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 的取值范围．

三、图像类问题

你先试试看

9 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点，且在直线 $l_2: x - y + 2\sqrt{6} = 0$ 上存在点 M ，使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形，求直线 l_1 的方程。

解析：

(1) $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

解得 $a = 2\sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

-----4分

(2) 显然，直线 l 的斜率 k 存在，设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $Q(-x_0, -y_0)$ ，

当 $k = 0$ ，直线 PQ 的垂直平分线为 y 轴， y 轴与 m 的交点为 $M(0, 2\sqrt{6})$ ，

由 $|PO| = 2\sqrt{2}$ ， $|MO| = 2\sqrt{6}$ ，

$\therefore \angle MPO = 60^\circ$ ，则 $\triangle MPQ$ 为等边三角形，

此时直线 l_1 的方程为 $y = 0$ ，

-----6分

当 $k \neq 0$ 时，设直线 l_1 的方程为 $y = kx$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得: } (1 + 4k^2)x^2 = 8,$$

$$\text{解得: } |x_0| = \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}},$$

$$\text{则 } |PO| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}},$$

-----8分

则 PQ 的垂直平分线为 $y = -\frac{1}{k}x$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{6}k}{k+1} \\ y = \frac{2\sqrt{6}}{k+1} \end{cases},$$

-----10分

$$\text{则 } M\left(-\frac{2\sqrt{6}k}{k+1}, \frac{2\sqrt{6}}{k+1}\right), \therefore |MO| = \sqrt{\frac{24(k^2 + 1)}{(k+1)^2}},$$

$\because \triangle MPQ$ 为等边三角形，则 $|MO| = \sqrt{3}|PO|$ ，

$$\therefore \sqrt{\frac{24(k^2 + 1)}{(k+1)^2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}}, \text{ 解得: } k = 0 \text{ (舍去)}, k = \frac{2}{3},$$

$\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $y = \frac{2}{3}x$ ，

-----13分

综上所述：直线 l_1 的方程为 $y = 0$ 或 $y = \frac{2}{3}x$ 。

-----14分

听我慢慢讲

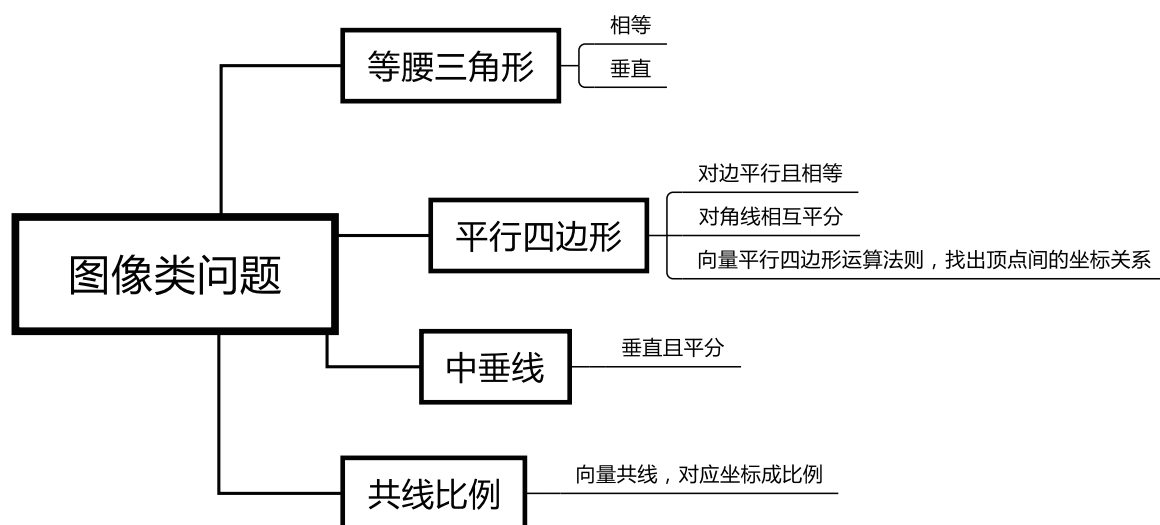
- 10 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点. C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$.
- (1) 求 C_2 的方程.
- (2) 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率.
- (3) 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M , 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若直线 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$ 与 x 轴交于点 P ，与椭圆 C 交于 A, B 两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 Q ，求 $\frac{|AB|}{|PQ|}$ 的取值范围。

导图总结



你再试试看

12 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 椭圆的方程。

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ ($|k| \leq \frac{1}{2}$) 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，以线段 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OAPB$ ，其中顶点 P 在椭圆 C 上， O 为坐标原点，求 $|OP|$ 的取值。



题型通解

双参数问题联立曲线方程，结合题设条件，找出两参数之间的关系，转化成单参数问题求解。

该题中，因为四边形 $OAPB$ 为平行四边形，

第一步：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$ ，所以 $x_0 = x_1 + x_2, y_0 = y_1 + y_2$ ，

第二步：由韦达定理可得点 $P(x_0, y_0)$ ，

第三步：由且点 P 位于椭圆上，代入椭圆方程找出参数 k, m 的关系，进行求解。

13 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q .

(i) 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

登堂入室

14 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，左右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ $F_2(1, 0)$ ，左右顶点为 $A_1(-2, 0)$ $A_2(2, 0)$ ，上下顶点为 $B_1(0, \sqrt{3})$ $B_2(0, -\sqrt{3})$.

(1) 过 F_2 的直线 l 交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ 两点， CD 的垂直平分线交 y 轴于 P 点，若 $\triangle PCD$ 为正三角形，求直线 l 的方程.

(2) O 为坐标原点，四边形 $ODEM$ 为平行四边形， DEM 三点都在椭圆上，那么四边形的面积是否为一个定值，如果是，求出此值；如果不是，请说明理由.

15 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，上顶点为 A ，在 x 轴负半轴上有一点 B ，满足 F_1 为线段 BF_2 的中点，且 $AB \perp AF_2$ 。

(1) 求椭圆 C 的离心率。

(2) 若过 A 、 B 、 F_2 三点的圆与直线 $l: x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ 相切，求椭圆 C 的方程。

(3) 在 (1) 的条件下，过右焦点 F_2 作斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于 M 、 N 两点，在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$ 使得以 PM 、 PN 为邻边的平行四边形是菱形，如果存在，求出 m 的取值范围，如果不存在，说明理由。

四、试炼之地

1. 弦长与面积

16 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{6}$ 相切。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若 A, B 为椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两点， P 点坐标为 $(4, 0)$ ，连接 PB 交椭圆 C 于另一点 D ，求证：直线 AD 恒过 x 轴上的定点。

(3) 在 (2) 的条件下，设 x 轴上的定点为 M ，若 AB 过椭圆 C 的左焦点，求 $\triangle ABM$ 的面积。

17 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$ ，右顶点为 A ，点 E 的坐标为 $(0, c)$ ， $\triangle EFA$ 的面积为 $\frac{b^2}{2}$ 。

(1) 求椭圆的离心率。

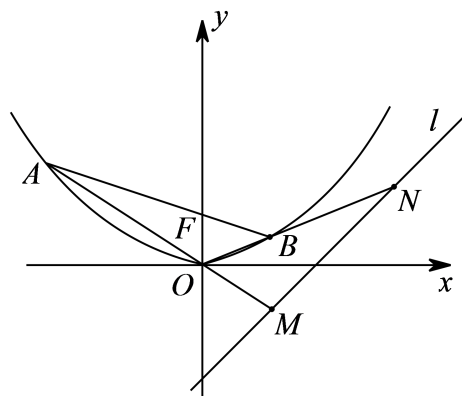
(2) 设点 Q 在线段 AE 上， $|FQ| = \frac{3}{2}c$ ，延长线段 FQ 与椭圆交于点 P ，点 M, N 在 x 轴上， $PM \parallel QN$ ，且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c ，四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$ 。

① 求直线 FP 的斜率。

② 求椭圆的方程。

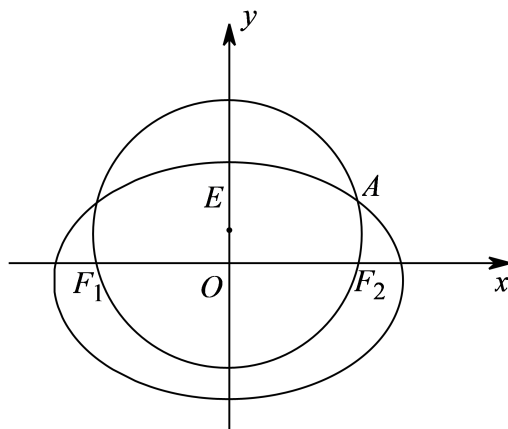
2. 最值问题

18 已知抛物线 C 的顶点为 $O(0,0)$ ，焦点 $F(0,1)$ 。



- (1) 求抛物线 C 的方程。
- (2) 过 F 作直线交抛物线于 A 、 B 两点。若直线 OA 、 OB 分别交直线 $l: y = x - 2$ 于 M 、 N 两点，求 $|MN|$ 的最小值。

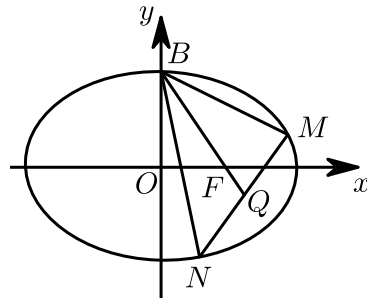
- 19 已知圆 $E: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点 F_1, F_2 , 且与椭圆 C 在第一象限的交点为 A , 且 F_1, E, A 三点共线, 直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{OA} (\lambda \neq 0)$.



- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 当三角形 AMN 的面积取得最大值时, 求直线 l 的方程.

3. 图像类问题

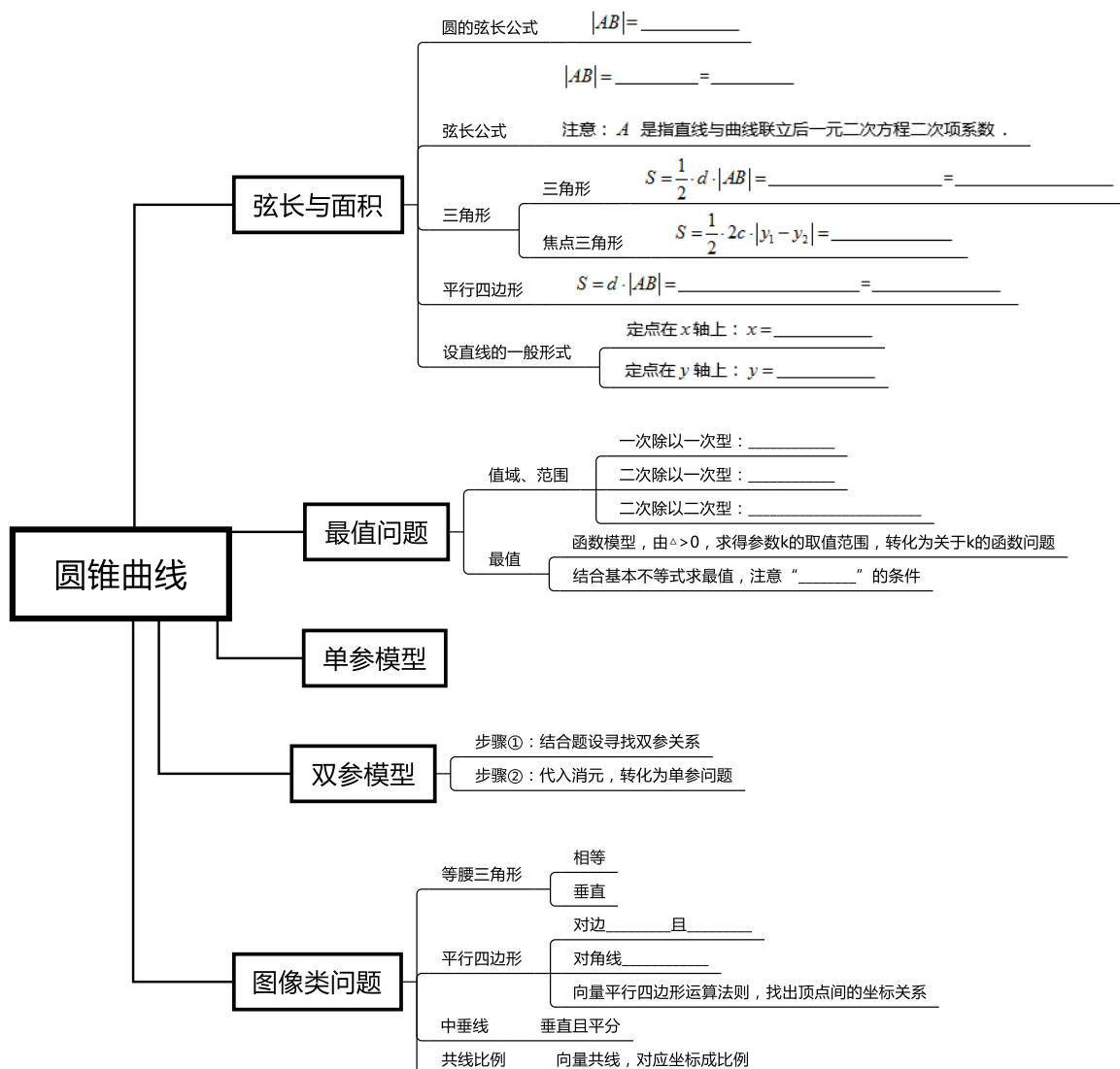
20 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $B(0, 4)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，直线 l 交椭圆于 M 、 N 两点。



(1) 若直线 l 的方程为 $y = x - 4$ ，求弦 MN 的长。

(2) 如果 $\triangle BMN$ 的重心恰好为椭圆的右焦点 F ，求直线 l 方程的一般式。

思维大导图



易错总结

- ① 设直线没有讨论斜率不存在的情况
- ② 直线与椭圆相交时没有考虑判别式
- ③ 求取值范围应用基本不等式时没有检验等号成立的条件

小憩一下

薛定谔把妹法

“薛定谔把妹法”的灵感来自于著名的物理学假设“薛定谔的猫”。它是建立在巴甫洛夫把妹法之上的升级版。

具体做法如下：每天早上，你拿出一个硬币抛掷，让伟大的随机性来决定今天是否给女生送早餐。这样，当女生每天打开抽屉之前，都不知道是否有早餐，而早餐的有无乃是一个独立随机事件，完全无法推测。每天的早餐对于女生都是一个未知的神秘存在，女生将逐渐为这一神秘的现象所吸引，最终将不可避免地对送餐人产生极大的兴趣，你在她的心中蒙上了神秘的面纱。

对“薛定谔把妹法”的总结是：这个谜一样的男子，这一刻薛定谔附体，带着量子论般深沉的哀愁，让她从此不能自拔。

另有网友提出，追女孩这种事情，不能少了海森堡，根据“测不准原理”，提出了“测不准把妹法加强补丁”。

具体实施起来：是在“薛定谔把妹法”的基础上计入更多折磨人的不确定因素，让女生心有牵挂，又吃不好饭：如果抛硬币的结果为当天不送早餐，那么就拍一张本来可能送出的早餐图，显示清楚各种食物、饮料、水果的搭配，包括原料表和营养成分表，放在女生的抽屉里。如果抛硬币的结果是当天送早餐，那么就将准备好的早餐放到搅拌机里，打碎搅拌均匀成糊状，并包好放在女生的抽屉里。这样一来，女生要么吃得到早餐，但不知道吃的是什么东西；要么很清楚今天早餐食谱，但是吃不到，进而对海森堡的测不准原理有了更深的体会。一颗扑通扑通乱跳的芳心就这样在物理学的强大引力场下被俘获了。

总结下来，海森堡加强补丁的目的就是让女生每天都被早餐折磨，情感上则更容易对送早餐的人产生依赖，最终心理崩溃，扑向科学家的怀中。