

函数零点模考题

1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有4个零点，则 k 的取值范围是()

A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

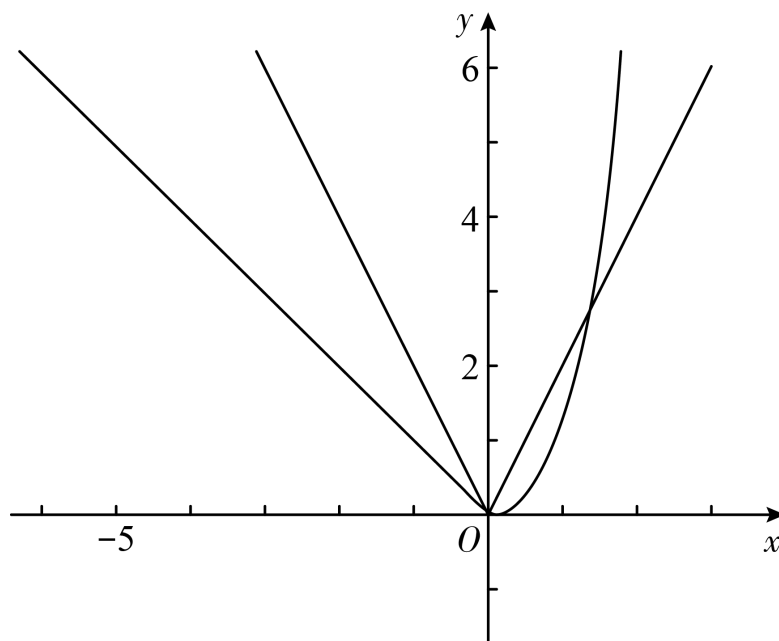
答案 D

解析 解：若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有4个零点，

则 $f(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个根，

即 $y = f(x)$ 与 $y = h(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个交点，

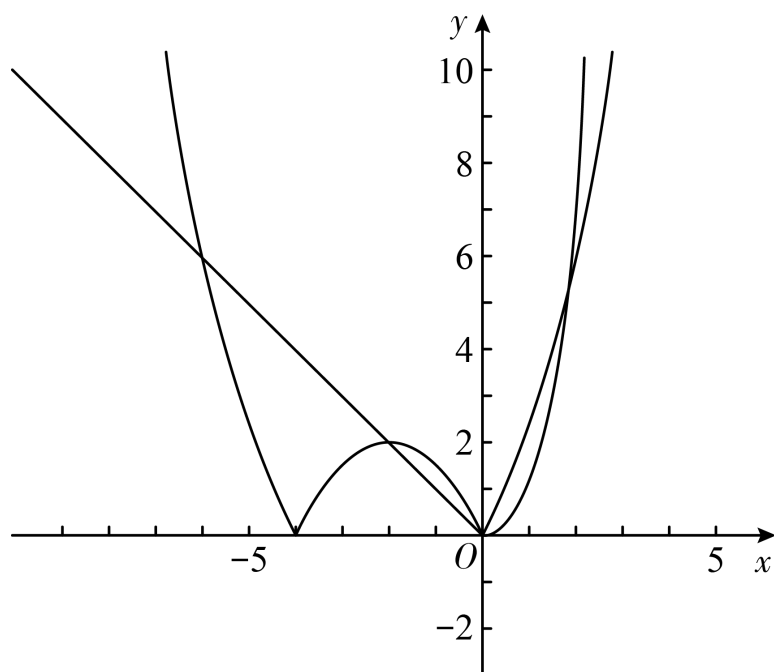
当 $k = 0$ 时， $y = f(x)$ 与 $y = |-2x| = 2|x|$ 图象如下：



两图象只有一个交点，不符合题意，

当 $k < 0$ 时， $y = |kx^2 - 2x|$ 与 x 轴交于两点 $x_1 = 0$ ， $x_2 = \frac{2}{k}$ ($x_2 < x_1$)，

图象如图所示，



两图象有4个交点，符合题意，

当 $k > 0$ 时，

$y = |kx^2 - 2x|$ 与 x 轴交于两点 $x_1 = 0$ ， $x_2 = \frac{2}{k}$ ($x_2 > x_1$)，

在 $\left[0, \frac{2}{k}\right)$ 内两函数图象有两个交点，

所以若有四个交点，

只需 $y = x^3$ 与 $y = kx^2 - 2x$ 在 $\left(\frac{2}{k}, +\infty\right)$ 上还有两个交点即可，

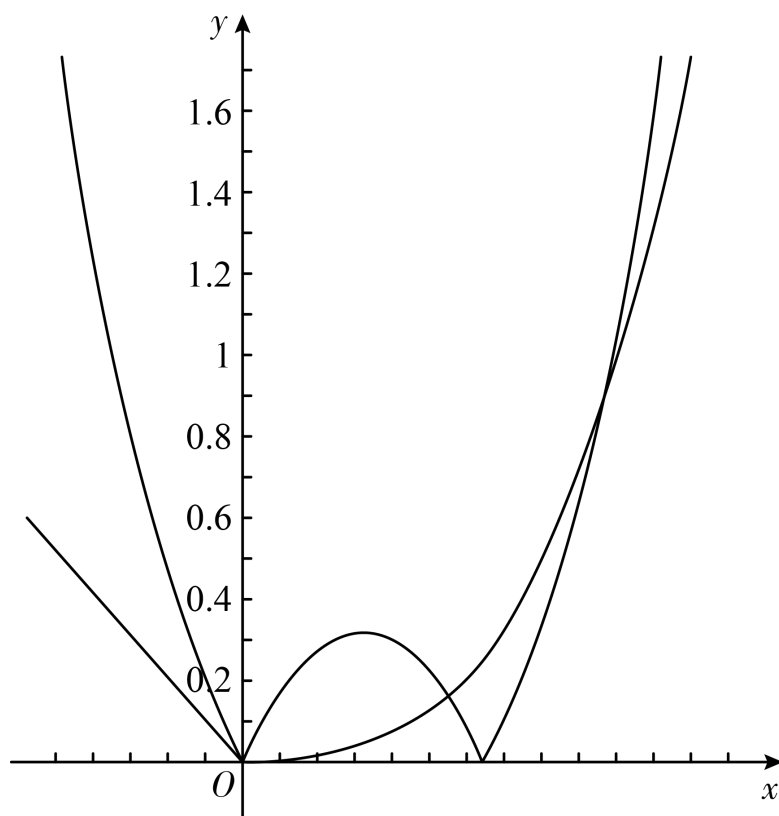
即 $x^3 = kx^2 - 2x$ 在 $\left(\frac{2}{k}, +\infty\right)$ 上有两个根，

即 $k = x + \frac{2}{x}$ 在 $\left(\frac{2}{k}, +\infty\right)$ 上有两个根，

函数 $y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时取等号，

所以 $0 < \frac{2}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $k > 2\sqrt{2}$ ，

所以 $k > 2\sqrt{2}$ ，



综上所述， k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ 。

故选：D。

2 已知函数 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = h(1-x) - mx + m - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零

点，则 m 的取值范围是 ()。

A. $[0, 2 - \sqrt{2}) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

B. $[0, 2 + \sqrt{2}) \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$

C. $(-2 - \sqrt{2}, 0] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$

D. $(-2 + \sqrt{2}, 0] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

答案 A

解析

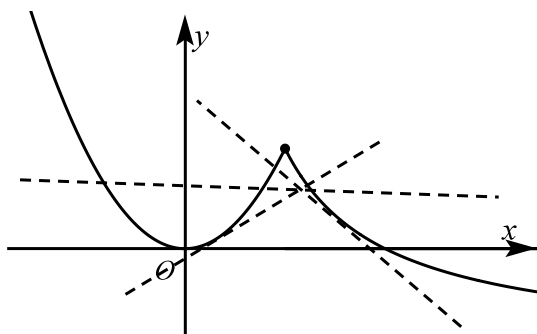
$$\because \text{函数 } h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$\therefore h(1-x) = \begin{cases} x^2, & (x < 1) \\ \frac{2}{x} - 1, & (x \geq 1) \end{cases},$$

数 $g(x) = h(1-x) - mx + m - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点，

即为 $h(1-x) = mx - m + \frac{1}{2}$ 有三个不同的实根，

作出 $y = h(1-x)$ 和 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 的图象，



直线 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = x^2 (x < 1)$ 相切时，设切点为 (m, n) ，

$x^2 - mx + m - \frac{1}{2} = 0$ ，由 $\Delta = 0$ ，可得 $m = 2 - \sqrt{2}$ ，

当 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 与 $y = \frac{2}{x} - 1$ 相切时，两图象恰有三个交点，此时 $m = -\frac{1}{2}$ ，

结合图象可得 $0 \leq m < 2 - \sqrt{2}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$ 。

故选 A。

3 已知实数 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \frac{a}{2}, & x < 0 \\ e^{x-1} + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程

$f[-f(x)] = e^{-a} + \frac{a}{2}$ 有三个不等的实根，则实数 a 的取值范围是 ()。

- A. $(1, 2 + \frac{2}{e})$ B. $(2, 2 + \frac{2}{e})$ C. $(1, 1 + \frac{1}{e})$ D. $(2, 2 + \frac{1}{e})$

答案 B

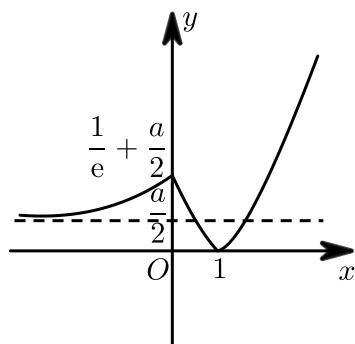
解析 当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 为增函数，

当 $x \geq 0$ 时， $f'(x) = e^{x-1} + ax - a - 1$ ， $f'(x)$ 为增函数，

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，

故函数在 $(0, 1)$ 上递减，在 $(1, +\infty)$ 上递增，最小值为 $f(1) = 0$ ，

由此画出函数图象如图所示，



令 $t = -f(x)$ ，

因为 $f(x) \geq 0$,

所以 $t \leq 0$,

$$\text{则有 } \begin{cases} f(t) = e^{-a} + \frac{a}{2} \\ f(t) = e^{t-1} + \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow -a = t - 1,$$

所以 $t = -a + 1 \leq 0$,

所以 $f(x) = a - 1$ 要有三个不同实数根,

$$\text{则需 } \frac{a}{2} < a - 1 < \frac{1}{e} + \frac{a}{2},$$

$$\text{解得 } 2 < a < \frac{2}{e} + 2.$$

故选 B.

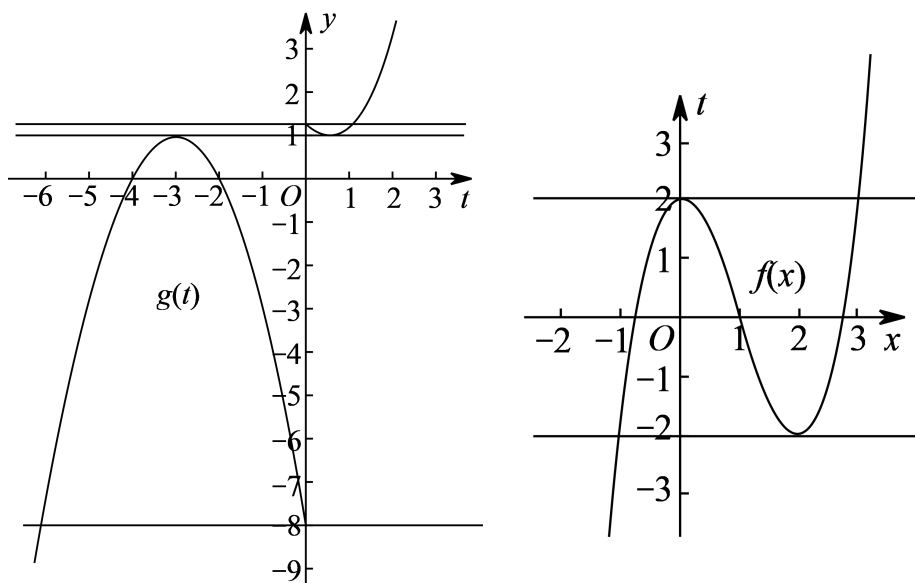
4 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, 函数 $g(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 1, & x < 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则关于 x 的方程

$g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 的实根个数取得最大值时, 实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(1, \frac{5}{4}]$ B. $(1, \frac{5}{4})$ C. $[1, \frac{5}{4}]$ D. $(0, \frac{5}{4}]$

答案 A

解析 作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图:



由 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 得 $g[f(x)] = a, (a > 0)$,

设 $t = f(x)$, 则 $g(t) = a, (a > 0)$,

由 $y = g(t)$ 的图象知，

①当 $0 < a < 1$ 时，方程 $g(t) = a$ 有两个根 $-4 < t_1 < -3$ ，或 $-4 < t_2 < -2$ ，

由 $t = f(x)$ 的图象知，当 $-4 < t_1 < -3$ 时， $t = f(x)$ 有0个根，

当 $-4 < t_2 < -2$ 时， $t = f(x)$ 有0个根，

此时方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 有0个根，

②当 $a = 1$ 时，方程 $g(t) = a$ 有两个根 $t_1 = -3$ ，或 $t_2 = \frac{1}{2}$ ，

由 $t = f(x)$ 的图象知，当 $t_1 = -3$ 时， $t = f(x)$ 有0个根，

当 $t_2 = \frac{1}{2}$ 时， $t = f(x)$ 有3个根，

此时方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 有3个根，

③当 $1 < a < \frac{5}{4}$ 时，方程 $g(t) = a$ 有两个根 $0 < t_1 < \frac{1}{2}$ ，或 $\frac{1}{2} < t_2 < 1$ ，

由 $t = f(x)$ 的图象知，当 $0 < t_1 < \frac{1}{2}$ 时， $t = f(x)$ 有3个根，

当 $\frac{1}{2} < t_2 < 1$ 时， $t = f(x)$ 有3个根，

此时方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 有 $3 + 3 = 6$ 个根，

④当 $a = \frac{5}{4}$ 时，方程 $g(t) = a$ 有两个根 $t_1 = 0$ ，或 $t_2 = 1$ ，

由 $t = f(x)$ 的图象知，当 $t_1 = 0$ 时， $t = f(x)$ 有3个根，

当 $t_2 = 1$ 时， $t = f(x)$ 有3个根，

此时方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 有 $3 + 3 = 6$ 个根

⑤当 $a > \frac{5}{4}$ 时，方程 $g(t) = a$ 有1个根 $t_1 > 1$ ，

由 $t = f(x)$ 的图象知，当 $t_1 > 1\frac{1}{2}$ 时， $t = f(x)$ 有3或2个或1个根，

此时方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 有3或2个或1个根，

綜上方程 $g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 的实根最多有6个根，

当方程的实根为6个时，对应的 $1 < a \leq \frac{5}{4}$ ，

即实数 a 的取值范围是 $\left(1, \frac{5}{4}\right]$ 。

故选A。

5 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$ ， $g(x) = kx$ ，若 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根，则实数 k 的取值范围是（ ）。

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

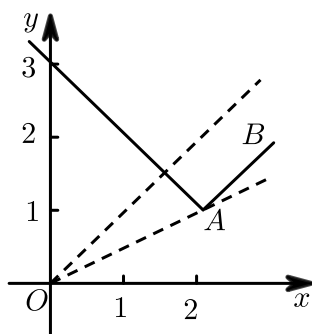
B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, +\infty)$

答案 B

解析



画出函数 $f(x) = |x-2| + 1$ 的图象，当过原点的直线 $g(x) = kx$ 由 OA 逆时针旋转到与射线 AB 平行的过程中，方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根，此时 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，故选 B。

- 6 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x \in (-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立。若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点，则实数 m 的取值范围是 _____。

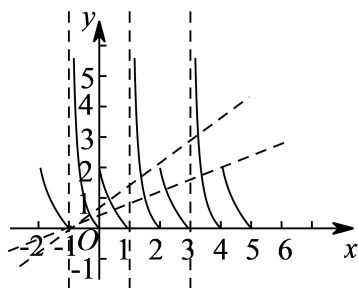
答案 $\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

解析 $\because f(x+2) = f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 2。

又 $\because$ 当 $x \in (-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：



令函数 $g(x) = f(x) - m(x+1) = 0$ ，

则 $f(x) = m(x+1)$ ，

若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1) = 0$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点，

则 $y = f(x)$ 与 $y = m(x+1)$ 的图象在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个交点。

$\because y = m(x+1)$ 恒过点 $(-1, 0)$,

过 $(-1, 0)$, $(4, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{5}$,

过 $(-1, 0)$, $(2, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{3}$,

根据图象可得: $m \in \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$,

故答案为: $\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$.

7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax - a$ 恰有 1 个实根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$

B. $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

C. $[-1, 1]$

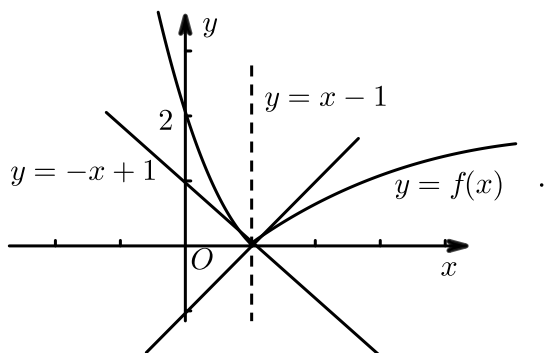
D. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

答案 A

解析 由 $y = x^2 - 3x + 2$ 得 $y' = 2x - 3$, $y'|_{x=1} = 2 - 3 = -1$,

由 $y = \ln x$ 得 $y' = \frac{1}{x}$, $y'|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$,

作出函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y = x - 1$, 直线 $y = -x + 1$ 的图象, 又直线 $y = a(x - 1)$ 恒过 $(1, 0)$ 点, 知 $a \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = ax - a$ 恰有 1 个实根,



故选 A.

8 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则 ().

A. $a < -1, b < 0$

B. $a < -1, b > 0$

C. $a > -1, b < 0$

D. $a > -1, b > 0$

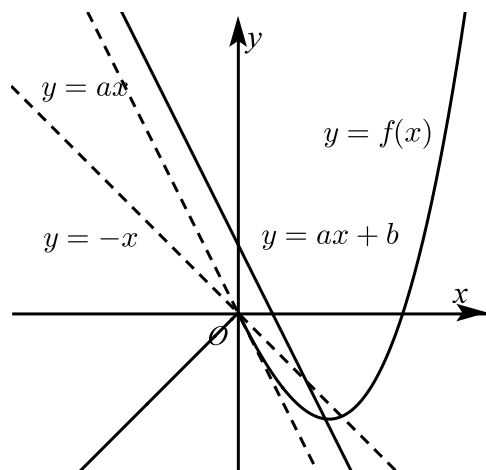
答案 C

解析 方法一：原题可转化为 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ ，有三个交点.

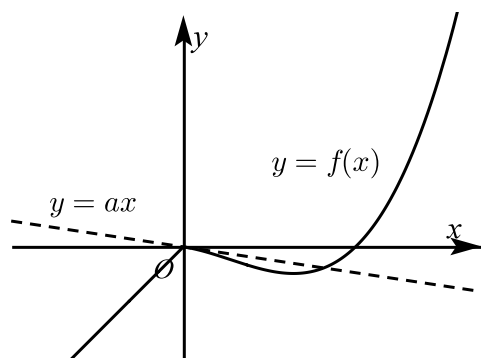
当 $x \geq 0$ 时， $f'(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-a)(x-1)$ ，且 $f(0) = 0, f'(0) = a$ ，则

(1) 当 $a \leq -1$ 时，如图 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 不可能有三个交点（实际上有一个），排除A，

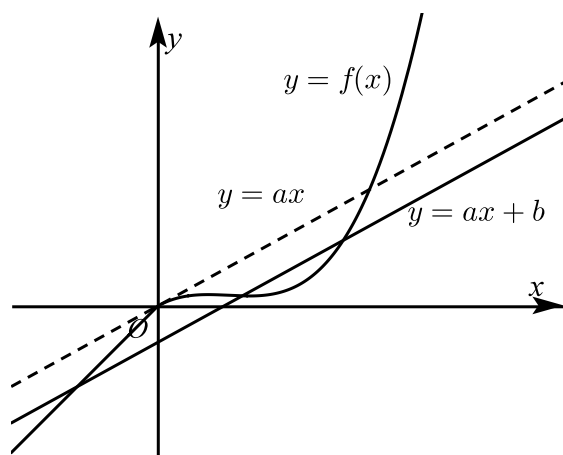
B.



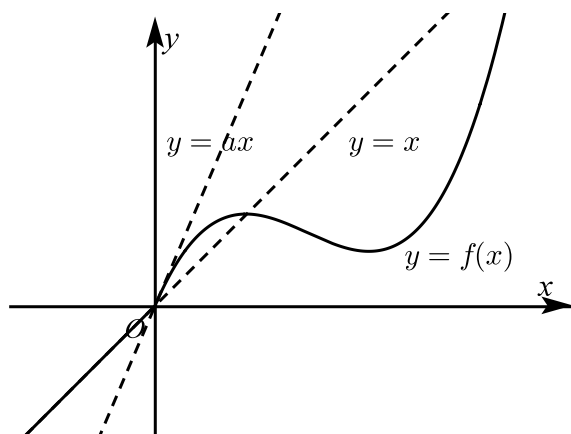
(2) 当 $-1 < a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $y = ax$ 的图象如下图所示．欲使两个函数由三个交点，则必有 $b < 0$ ．



(3) 当 $0 \leq a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示．欲使两个函数由三个交点，则必有 $b < 0$ ．



(4) 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示. 不可能有三个交点 (实际上有一个), 排除 D.



综上所述, 则 $-1 < a < 1, b < 0$.

方法二: 记 $g(x) = f(x) - ax - b$,

当 $x < 0$ 时, $g(x) = (1-a)x - b$, 最多有 1 个零点.

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$,

$g'(x) = x^2 - (a+1)x = x[x - (a+1)]$,

若 $a \leq -1$, 则 $a+1 \leq 0$, 即 $-a-1 \geq 0$,

$\therefore g'(x) \geq 0$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上最多有 1 个零点,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有 2 个零点, 不合题意,

故 $a > -1$,

当 $x \in [0, a+1)$ 时, $g'(x) \leq 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (a+1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,

故 $g(x)$ 有 3 个零点的条件为
$$\begin{cases} \frac{b}{1-a} < 0 \\ a > -1 \\ g(0) \geq 0 \\ g(a+1) < 0 \end{cases},$$

所以
$$\begin{cases} b < 0 \\ -1 < a < 1 \\ b > -\frac{1}{6}(a+1)^3 \end{cases}, \text{ 对照选项.}$$

故选 C.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有3个零点，则实数 k 的取值范围 () .

A. $(0, \frac{9}{16})$

B. $(\frac{9}{16}, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{2})$

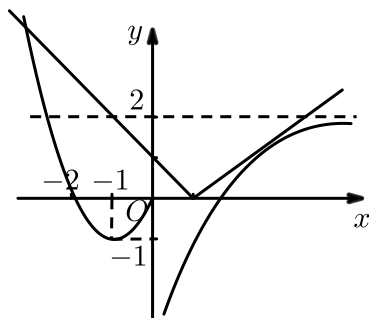
D. $(-\frac{1}{16}, 0) \cup (0, \frac{9}{16})$

答案 D

解析 由 $F(x) = f(x) - |kx - 1| = 0$ 得 $f(x) = |kx - 1|$ ，

函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有3个零点等价于 $y = f(x)$ 与 $y = g(x) = |kx - 1|$ 的图象有且只有3个交点，

作出函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图象，如图所示。



①当 $k = 0$ 时，显然不符合题意，舍去；

② $k > 0$ 时，如图所示，

当 $x > 0$ 时，需有2个交点，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ y = \frac{2x-4}{x} \end{cases}, \text{ 可得 } kx - 1 = \frac{2x-4}{x},$$

$$\text{即: } kx^2 - 3x + 4 = 0,$$

$$\text{可得 } \begin{cases} \Delta = 9 - 16k > 0 \\ \frac{3}{k} > 0 \\ \frac{4}{k} > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < k < \frac{9}{16};$$

$$\text{③当 } k < 0 \text{ 时, } \begin{cases} y = -kx - 1 \\ y = \frac{2x-4}{x} \end{cases},$$

$$\text{可得 } -kx - 1 = \frac{2x-4}{x},$$

$$\text{即: } kx^2 + x - 4 = 0,$$

$$\text{可得} \begin{cases} \Delta = 1 + 16k > 0 \\ -\frac{1}{k} > 0 \\ -\frac{4}{k} > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} -\frac{1}{16} < k < 0.$$

综上, 实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{16}, 0\right) \cup \left(0, \frac{9}{16}\right)$.

故选D.

10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, x \leq 0 \\ x^3 - (a+1)x^2 + 2ax, x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = ax$ 有4个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-1, 0)$

B. $(0, 1)$

C. $(0, 1]$

D. $(1, +\infty)$

答案 B

解析 若方程 $f(x) = ax$ 有4个不同实数根,

$$\because x = 0, f(0) = 0,$$

$\therefore x \neq 0$, 方程 $f(x) = ax$ 有3个不同实数根,

即 $\frac{f(x)}{x} = a$ 有3个不同实数根,

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x} - a$, 则 $g(x)$ 有3个非零根,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - a = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - a, x < 0 \\ x^2 - (a+1)x + a, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(1-a)x + a}{x-1}, x < 0 \\ (x-a)(x-1), x > 0 \end{cases},$$

① $a = 1$ 时, $g(x)$ 没有负根, 有唯一正根 $x = 1$, 矛盾;

② $a \neq 1$, 若 $g(x) = 0$, 则 $x = \frac{a}{a-1}$ 或 $x = a$ 或 $x = 1$,

若 $g(x)$ 恰有3个根, 则 $\begin{cases} \frac{a}{a-1} < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases},$

$$\text{即} \begin{cases} a(a-1) < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases},$$

即 $0 < a < 1$,

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1)$.

故选B.

11

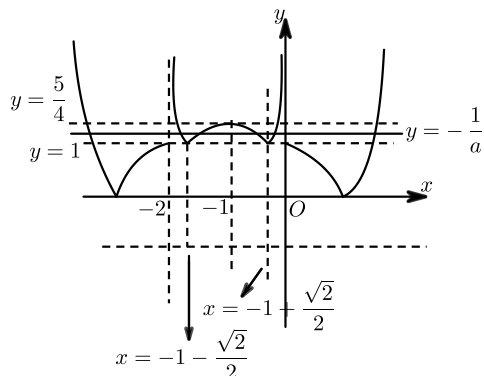
已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有6个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案

$$\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$$

解析

令 $t = x^2 + 2x$,



$$\because -2 < x < 0 ,$$

$$\therefore t \in [-1, 0) ,$$

$$\text{则 } x^2 + 2x + \frac{1}{4(x^2 + 2x)} = t + \frac{1}{4t} \in (-\infty, -1] ,$$

函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有6个零点 ,

即方程 $a|f(x)| + 1 = 0$ 有6个根 ,

也就是 $|f(x)| = -\frac{1}{a}$ 有6个根 ,

即 $y = |f(x)|$ 与 $y = -\frac{1}{a}$ 有6个不同交点 ,

如图 :

要使函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$

有6个零点 ,

$$\text{则 } 1 \leq -\frac{1}{a} < \frac{5}{4} , \text{ 即 } -1 \leq a < -\frac{4}{5} ,$$

则实数 a 的取值范围是 : $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$.

故答案为 : $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$.

12

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \\ a\left|x + \frac{1}{2}\right| - \frac{15}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = x^3$, 若方程 $g(x) = xf(x)$ 有4个不同实根 , 则实数 a 的取值范围为 () .

A. $\left(3, \frac{15}{2}\right]$

B. $\left(5, \frac{15}{2}\right]$

C. $(-3, 5)$

D. $(3, 5)$

答案 B

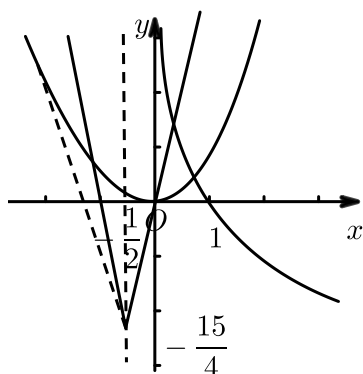
解析 方程 $g(x) = xf(x)$, 化为 $x^3 = xf(x)$,

即 $x = 0$ 或 $x^2 = f(x)$,

要使 $g(x) = xf(x)$ 有 4 个不同实根,

则需方程 $x^2 = f(x)$ 有 3 个不同根,

如图,



而当 $x > 0$, 方程 $g(x) = f(x)$ 有 1 个根,

则只需 $x < 0$, $y = a\left|x + \frac{1}{2}\right| - \frac{15}{4}$ 与 $g(x) = x^2$, 有两个交点即可,

过点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 作 $g(x) = x^2 (x < 0)$ 的切线, 设切点为 (m, m^2) ,

切线方程为 $y - m^2 = 2m(x - m)$,

过点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 代入上式得:

$$m = -\frac{5}{2},$$

$\therefore$ 切线斜率为 $2m = 5$,

由 $a \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} \leq 0$, 计算得出 $a \leq \frac{15}{2}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left(5, \frac{15}{2}\right]$.

- 13 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数 $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} + 1)^2 - a - 1, & x > 0, \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

答案

1: $[0, 2]$

2: $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

解析

由 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 得 $f(x+1) \geq -1$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(-1) = -1$, 则 $f(1) = -1$,

$\therefore f(x-1) \geq -1$ 等价于 $f(x+1) \geq f(-1)$, 等价于 $f(|x-1|) \geq f(1)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

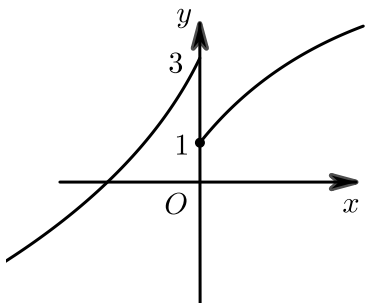
$\therefore |x-1| \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 2$,

故若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 $[0, 2]$,

若 $f(g(x)) + 1 = 0$, 则 $g(x) = -1$ 或 $g(x) = 1$,

$$\text{令 } h(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} + 1)^2 \\ 2^x + x + 2 \end{cases},$$

则 $g(x) = -1$ 等价于 $h(x) = a$, $g(x) = 1$ 等价于 $h(x) = a + 2$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数根, 则函数 $y = h(x)$ 与直线 $y = a$ 和直线 $y = a + 2$ 共有两个不同的交点, 作出函数 $y = h(x)$ 的大致图像, 如下图所示.



由图像知, $\begin{cases} a \leq 1 \\ a + 2 \leq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 3 \\ a + 2 > 3 \end{cases}$.

解得 $a \leq -1$ 或 $a > 3$.

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$.

- 14 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

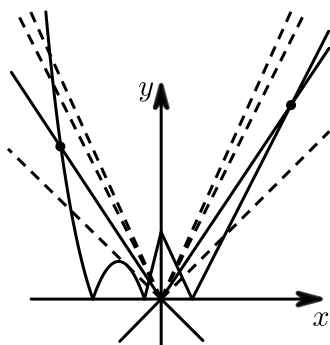
答案

$(1, 2)$

解析

由 $y = f(x) - a|x| = 0$ 得 $f(x) = a|x|$,

作出函数 $y = f(x)$, $y = a|x|$ 的图象,



当 $a \leq 0$, 不满足条件,

$\therefore a > 0$,

当 $a > 0$,

当 $a \geq 2$ 时, 此时 $y = a|x|$ 与 $f(x)$ 有三个交点,

当 $a = 1$ 时,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 5x - 4$,

由 $f(x) = -x^2 - 5x - 4 = -x$,

得 $x^2 + 4x + 4 = 0$,

则判别式 $\Delta = 16 - 4 \times 4 = 0$,

即此时直线 $y = -x$ 与 $f(x)$ 相切,

此时 $y = a|x|$ 与 $f(x)$ 有五个交点,

$\therefore$ 要使函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有 4 个零点,

则 $1 < a < 2$.

故答案为: $(1, 2)$.

15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \end{cases}$, 函数 $g(x) = kx$, 若关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 有

3 个互异的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{5}{6}\right)$

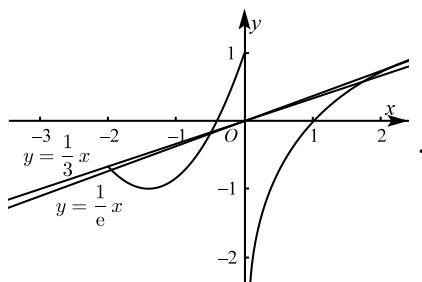
B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$

C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$

D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

答案 B

解析 画出 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \end{cases}$ 的图象如图所示,



$f(x) - g(x) = 0$ 有 3 个互异的实数根，即为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

当 $x = -2$ 时， $f(x) = (-2)^2 + \frac{17}{6} \times (-2) + 1 = -\frac{2}{3}$ ，

把 $(-2, -\frac{2}{3})$ 代入 $g(x) = kx$ 得： $k = \frac{1}{3}$ ，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

当 $x = e$ 时， $f(x) = \ln e = 1$ ，

把 $(e, 1)$ 代入 $g(x) = kx$ 得： $k = \frac{1}{e}$ ，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

结合图象分析可知： $k \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{e}]$ ，故选：B。

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & x > 1 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - k|x+2|$ 有三个零点，则实数 k 的取值范围是 _____。

答案

$$(0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup (1, \frac{e^2}{3}]$$

解析

画出 $f(x)$ 的图象如图所示，函数 $g(x) = f(x) - k|x+2|$ 有三个零点，

等价于令 $h(x) = k|x+2|$ ， $h(x)$ 与 $f(x)$ 有三个交点，

当 $k \leq 0$ 时，显然不符合题意。

当 $x < -2$ 时， $h(x)$ 与 $f(x)$ 必有一个交点，

当 $x > -2$ 时，若 $h(x)$ 与 $y = e^{x+1}$ 相切，

$$\text{即 } \begin{cases} e^{x+1} = k(x+2) \\ e^{x+1} = k \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -1 \\ k = 1 \end{cases},$$

此时， $h(x)$ 与 $f(x)$ 有两个交点，

当 $k = 1$ 时， $f(1) = e^2$ ，

把 $(1, e^2)$ 代入 $h(x) = k(x+2)$ ，得： $k = \frac{e^2}{3}$ ，

此时， $h(x)$ 与 $f(x)$ 有三个交点，

故当 $k \in (1, \frac{e^2}{3}]$ 时， $h(x)$ 与 $f(x)$ 有三个交点。

当 $h(x)$ 与 $y = -x^2 + 3x - 2$ 相切时，

$$-x^2 + 3x - 2 = kx + 2k,$$

$$x^2 + (k-3)x + 2k+2 = 0,$$

$$\Delta = (k-3)^2 - 4(2k+2) = 0,$$

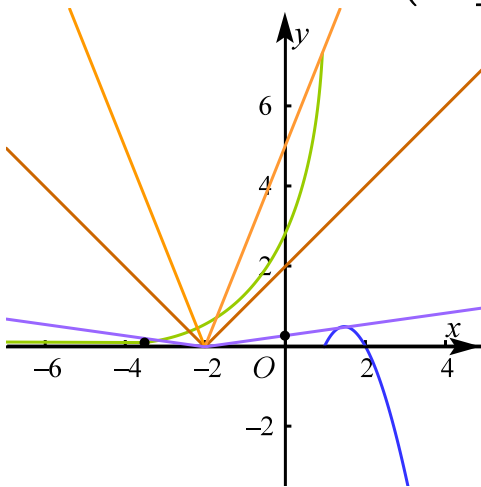
$$k^2 - 14k + 1 = 0,$$

$$k_1 = 7 - 4\sqrt{3}, k_2 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (舍去)}.$$

此时, $h(x)$ 与 $f(x)$ 有两个交点,

故当 $k \in (0, 7 - 4\sqrt{3})$ 时, $h(x)$ 与 $f(x)$ 有三个交点.

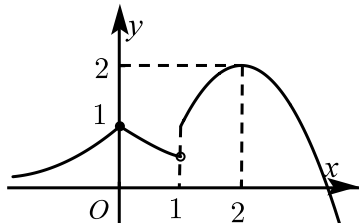
综上所述: 当 $k \in (0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup \left(1, \frac{e^2}{3}\right]$ 时, 函数 $g(x) = f(x) - k|x+2|$ 有三个零点.



- 17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

答案 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$

解析 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 图象如图所示:



若要使 $f(x) = a$ 恰有两个相异实数解, 则 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

故答案为: $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (t+1)x + 2t^2, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \leq t$ 的解集为 $[a, b] \cup [c, d]$ ，且

$b < c$ ， $ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32}$ ，则实数 t 的取值范围为 ()。

- A. $(\frac{5}{16}, \frac{4}{7})$ B. $(\frac{5}{16}, \frac{5}{8})$ C. $(\frac{5}{16}, 1)$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$

答案 B

解析 $\because f(x) = \begin{cases} x^2 + (t+1)x + 2t^2, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$ ，

$\therefore t$ 是未知数，故首先可以得到 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的图象，如图1，

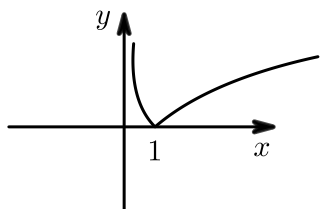


图1

$\therefore$ 关于不等式 $f(x) \leq t$ 的解集为 $[a, b] \cup [c, d]$ ，且 $b < c$ ，

① $b < 0$ 时，

$\therefore f(x) = t$ 有四个不等实根， a, b, c, d ，

观察图1，可知当 $x > 0$ 时， $f(x) = t$ 最多有两个不等实根，

而当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^2 + (t+1)x + 2t^2$ ，此时 $f(x) = t$ 也最多有两个不等实根，

$\therefore$ 可知 $|\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d ，

$x^2 + (t+1)x + 2t^2 = t$ 有两不等实根 a, b ，

$\therefore$ 可知 $f(x)$ 大概图象，如图2，

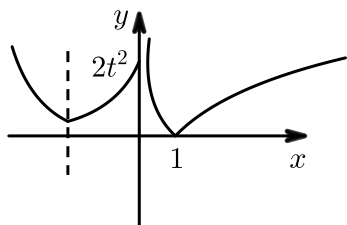


图2

$$f(0) = 0^2 + (t+1) \times 0 + 2t^2 = 2t^2,$$

$\therefore f(x) = t$ 有四个不等实根，且 $|\ln x| \geq 0$ 恒成立，

$\therefore t > 0$ 且 $2t^2 \geq t$ 解之得 $t \geq \frac{1}{2}$ ，

$\therefore x^2 + (t+1)x + 2t^2 = t$, 即 $x^2 + (t+1)x + 2t^2 - t = 0$, 有两不等实根 a, b ,

$$\therefore a+b = -\frac{t+1}{1} = -t-1, a \cdot b = \frac{2t^2-t}{1} = 2t^2-t,$$

$\therefore |\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d ,

$\therefore \ln c = -\ln d$, 故得 $\ln c + \ln d = \ln(c \cdot d) = 0$, 故 $c \cdot d = 1$,

$$\text{此时有 } ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$2t^2 - t + 1 - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$2t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{32} < 0,$$

$$t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{5}{64} < 0,$$

$$\left(t - \frac{1}{8}\right)\left(t - \frac{5}{8}\right) < 0,$$

$$\therefore \frac{1}{8} < t < \frac{5}{8}, \text{ 又 } t \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right),$$

② $b = 0$ 时,

$$\therefore \text{可知 } f(0) = 0^2 + (t+1) \times 0 + 2t^2 = 2t^2 \leq t,$$

$\therefore |\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d , 故得 $t > 0$,

$$\therefore 2t^2 \leq t, \text{ 解之得 } t \leq \frac{1}{2},$$

$\therefore |\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d ,

$\therefore \ln c = -\ln d$, 即 $\ln c + \ln d = \ln(c \cdot d) = 0$, 可得 $c \cdot d = 1$,

$$\therefore ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$0 + 1 - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$\frac{t}{2} > \frac{5}{32},$$

$$t > \frac{5}{16},$$

$$\therefore t \leq \frac{1}{2}, t > \frac{5}{16}, t > 0, \text{ 综合 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\text{综上所述, } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \text{ 或 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{2}\right], \text{ 故得 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{8}\right).$$

- 19 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若存在 $x \in \mathbf{R}$ 使得关于 x 的不等式 $f(x) \leq ax - 1$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $(-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$

解析

因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$,

当 $x < 0$ 时, $f(x) \leq ax - 1 \Rightarrow x^2 - x \leq ax - 1 \Rightarrow ax \geq x^2 - x + 1 \Rightarrow a \leq x + \frac{1}{x} - 1$,

因为 $x + \frac{1}{x} = -\left[(-x) + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = -2$,

$\therefore a \leq -3$;

当 $x = 0$ 时, $0 \leq -1$ 不成立;

当 $x > 0$ 时,

$f(x) \leq ax - 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} \leq ax - 1 \Rightarrow a \geq \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2 - 1$,

$\therefore x > 0$, 所以: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2 - 1 > 0$,

故 $a > 0$;

综上所述: 实数 a 的取值范围是: $(-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$.

故答案为: $(-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$.

20

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{a}{x} + 1, & x < 0 \\ 2\ln x - 6x, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 恰有四个不同的解, 则

实数 a 的取值范围是 _____.

答案

$(-2, 0)$

解析

设 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是偶函数,

当 $x > 0$ 时, $g(x) = 2\ln x - 6x + 3x^2 - \frac{a}{x} + 1$,

由 $g(x) = 0$ 得 $a = 2x\ln x - 6x^2 + 3x^3 + x$,

记 $h(x) = 2x\ln x - 6x^2 + 3x^3 + x$,

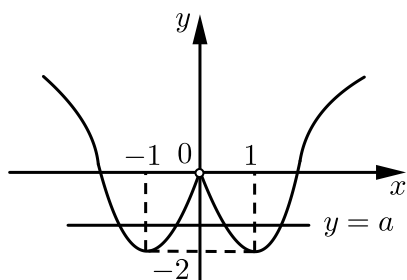
$h'(x) = 2\ln x - 12x + 9x^2 + 3$, $h''(x) = \frac{2}{x} + 18x - 12 \geq 0$,

故函数 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 增, 而 $h'(1) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 减, 在 $(1, +\infty)$ 增, $h(1) = -2$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow 0^-$,

因此 $g(x)$ 图象为



因此实数 a 的取值范围是 $(-2, 0)$.

- 21 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上, 则实数 k 的取值范围是 () .
- A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0)$ D. $(-1, 0)$

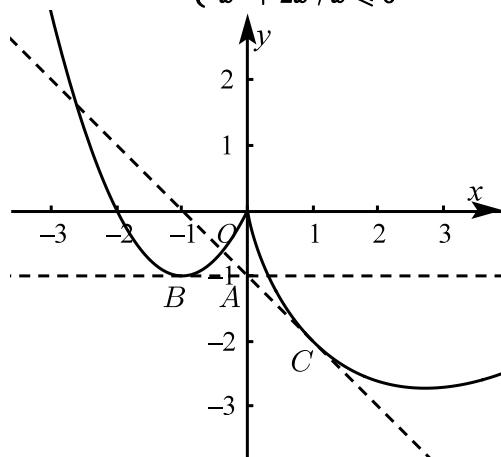
答案 B

解析 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上,

而函数 $y = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 的对称图像为 $y = -kx - 1$,

$\therefore f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像有且只有四个不同的交点,

作函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像如下,



易知直线 $y = -kx - 1$ 恒过点 $A(0, -1)$,

设直线 AC 与 $y = x \ln x - 2x$ 相切于点 $C(x, x \ln x - 2x)$, $y' = \ln x - 1$,

故 $\ln x - 1 = \frac{x \ln x - 2x + 1}{x}$,

解得, $x = 1$, 故 $k_{AC} = -1$,

易得直线 AB 与 $y = x^2 + 2x$ 相切于点 $B(-1, -1)$,

故 $k_{AB} = 0$,

故 $-1 < -k < 0$,

故 $0 < k < 1$.

故选B.

22

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1, & x \leq 0 \\ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 恰有5个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围是().

A. (1, 2)

B. (1, 5)

C. (2, 3)

D. (2, 5)

答案 A

解析

方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 即为 $f(x) = 1$, $f(x) = m$,

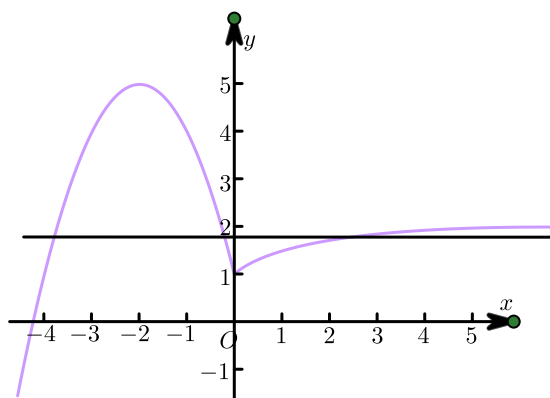
当 $f(x) = 1$ 时, 即 $-x^2 - 4x + 1 = 1$,

解得 $x = 0$, $x = -4$, 或 $2 - 2^{-x} = 1$, 解得 $x = 0$ (舍),

若关于 x 的方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 恰有5个不同的实根,

则 $f(x) = m$ 有3个根, 即函数 $f(x)$ 图象与 $y = m$ 有3个交点,

作出图象:



由图可知, $m \in (1, 2)$.

故选A.

23

已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ 恰有两个互异的实数解，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $(-\infty, 0]$

B. $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{8}, +\infty\right)$

C. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{8}, +\infty\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{5-2\sqrt{6}}{8}\right) \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$ 。

答案

D

解析

$$\ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a \quad (x > 1),$$

$$\ln x + \frac{1}{4}x + 1 - a = 0,$$

$$\therefore \ln x + \frac{1}{4}x \text{ 为增函数,}$$

$$\therefore \text{当该方程在 } x > 1 \text{ 时无实数根时, } \frac{1}{4} + 1 - a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq \frac{5}{4}.$$

$$\textcircled{1} a > \frac{5}{4} \text{ 时, } x > 1 \text{ 时有一个解,}$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 时, } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a \text{ 有 1 个解,}$$

$$\text{当 } x \leq 1 \text{ 时, } x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2a\right)x + a \text{ 是递减的,}$$

$$1 + \frac{1}{4} - 2a + a = \frac{5}{4} - a < 0,$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 时有 1 个解,}$$

$$\therefore a > \frac{5}{4} \text{ 成立.}$$

$$\textcircled{2} a = \frac{5}{4} \text{ 时, } \ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x > 1 \text{ 时无解,}$$

$$\text{但 } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x \leq 1 \text{ 时有 2 个解,}$$

$$\therefore a = \frac{5}{4} \text{ 成立.}$$

$$\textcircled{3} a < \frac{5}{4} \text{ 时, } \ln x + 1 = -\frac{1}{4}x + a \text{ 在 } x > 1 \text{ 时无解,}$$

$$x \leq 1 \text{ 时, } x^2 - 2ax + 2a = -\frac{1}{4}x + a,$$

$$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2a\right)x + a = 0,$$

该方程要在 $x \leq 1$ 时有 2 个解,

$$\Delta = 4a^2 - a + \frac{1}{16} - 4a > 0,$$

$$\therefore a > \frac{5+2\sqrt{6}}{8} \text{ 或 } a < \frac{5-2\sqrt{6}}{8},$$

$$\therefore a < \frac{5}{4},$$

$$\therefore a < \frac{5-2\sqrt{6}}{8},$$

且 $x=1$ 时, $1 + \frac{1}{4} - 2a + a \geq 0$,

$$\therefore a \leq \frac{5}{4},$$

$$\therefore a < \frac{5-2\sqrt{6}}{8}.$$

综上 a 的范围为 $\left(-\infty, \frac{5-2\sqrt{6}}{8}\right) \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

故选 D.

24

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

答案

D

解析

由题意 $f(0) = 0$,

$\therefore 0$ 是 $f(x) - ax^2 = 0$ 的一个根,

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) - ax^2 = 0$ 即 $a = \frac{f(x)}{x^2}$,

$\therefore a = \frac{f(x)}{x^2}$ 有 4 个实根,

即 $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象有 4 个不同的交点, ($x \neq 0$),

$$\frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x(x+4)}, & -4 < x < 0 \\ \frac{1}{x(x+4)}, & 0 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad (x \neq 0),$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{1}{x(x+4)} \quad (-4 < x < 0),$$

$$g'(x) = \frac{2x+4}{(x^2+4x)^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, x = -2,$$

$\therefore$ 在 $(-4, -2)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减,

在 $(-2, 0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增,

当 $x = -2$ 时, $g(x)$ 有极小值 $g(-2) = \frac{1}{4}$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{x(x+4)} \quad (0 < x < 2),$$

$$h'(x) = -\frac{2x+4}{(x^2+4x)^2} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减,

$$\text{令 } \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}} \quad (2 \leq x \leq 6),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{6-2x}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-3}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

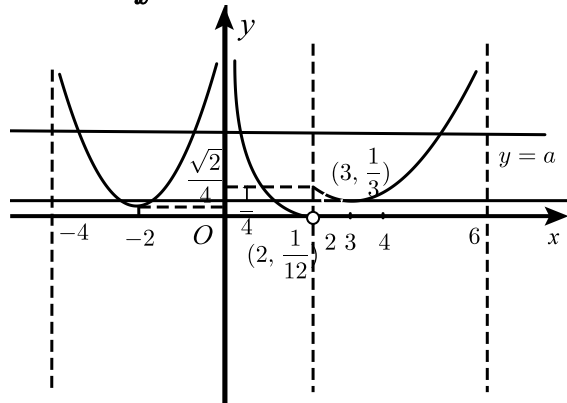
令 $\varphi'(x) = 0$, 则 $x = 3$,

当 $2 \leq x < 3$ 时 $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 递减,

当 $x > 3$ 时 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 递增,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时 $\varphi(x)$ 有极小值 $\varphi(3) = \frac{1}{3}$,

作出 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象,



如图所示,

当 $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 有 4 个交点,

当 $\frac{1}{3} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时有 5 个交点,

当 $a = \frac{1}{3}$ 时有 4 个交点,

当 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$ 时有 3 个交点,

当 $a = \frac{1}{4}$ 时有 2 个交点,

当 $\frac{1}{12} < a < \frac{1}{4}$ 时有 1 个交点,

当 $a \leq \frac{1}{12}$ 时没有交点,

综上, 当 a 取 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$ 时 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根.

故选 D.

已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4|, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解, 则 m 的取值范围是 ().

A. $(-\ln 2, 0]$

B. $[0, \ln 2]$

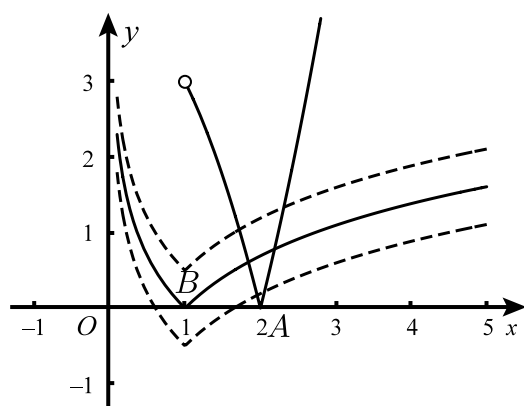
C. $(-2 - \ln 2, 0]$

D. $[0, 2 + \ln 2)$

答案 A

解析 设 $h(x) = f(x) + m$,

作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图:



则 $h(x)$ 是 $f(x)$ 的图象沿着 $x = 1$ 上下平移得到,

由图象知, B 点的纵坐标为 $h(1) = f(1) + m = \ln 1 + m = m$,

A 点的纵坐标为 $g(2) = 0$,

当 $x = 2$ 时, $h(2) = \ln 2 + m$, 又 $g(1) = 0$,

要使方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解,

则等价于 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有三个不同的交点,

则满足 $\begin{cases} h(1) \leq g(1) \\ h(2) > g(2) \end{cases}$,

即 $\begin{cases} m \leq 0 \\ m + \ln 2 > 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > -\ln 2 \end{cases}$,

即 $-\ln 2 < m \leq 0$,

即实数 m 的取值范围是 $(-\ln 2, 0]$.

故选 A.