

函数零点

1

函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^2, & (0 \leq x \leq 2) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & (x > 2) \end{cases}$ ，若关于 x 的方程

$[f(x)]^2 + af(x) + b = 0$ ， $a, b \in \mathbf{R}$ ，有且仅有 6 个不同实数根，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

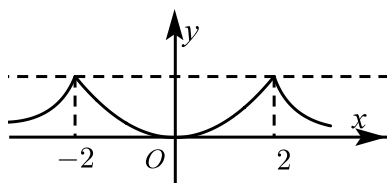
B. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

答案 B

解析 作出 $f(x)$ 的图像，



则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增，在 $(2, +\infty)$ 上递减，

当 $x = \pm 2$ 时， $f(x)$ 取最大值 $\frac{1}{4}$ ，

当 $x = 0$ 时， $f(x)$ 取最小值 0，

设 $t = f(x)$ ，

当 $t < 0$ 或 $t > \frac{1}{4}$ 时，方程 $t = f(x)$ 无实根，

当 $t = 0$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 1 个实根，

当 $t = \frac{1}{4}$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 2 个实根，

当 $0 < t < \frac{1}{4}$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 4 个实根，

若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + b = 0$ ， $(a, b \in \mathbf{R})$ 有且仅有 6 个实根，

则有 $t_1 = \frac{1}{4}$ ，且 $0 < t_2 < \frac{1}{4}$ ，

此时 $-a = t_1 + t_2$ ，

则 $a \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ 即实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ 。

故选 B。

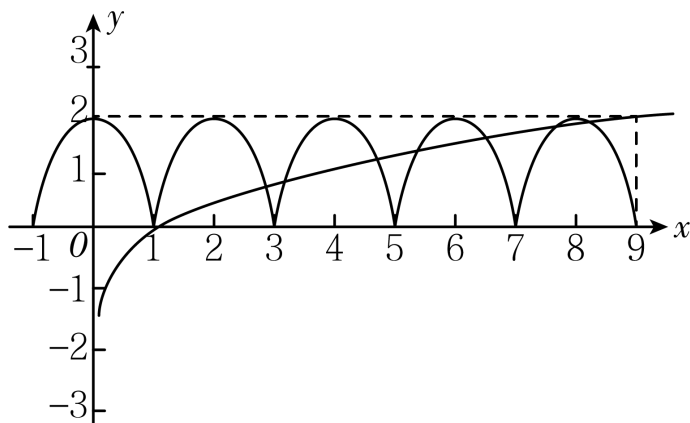
- 2 已知 $f(x)$ 为偶函数，对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) = f(2-x)$ 恒成立，且当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = 2 - 2x^2$ 。
设函数 $g(x) = f(x) - \log_3 x$ ，则 $g(x)$ 的零点的个数为()

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

答案 C

解析 解： $g(x)$ 的零点的个数，就是 $g(x) = f(x) - \log_3 x = 0$ 解的个数，

画出函数 $y = f(x)$ 与 $y = \log_3 x$ 的图象如图：



可知两个函数的图象有8个交点。

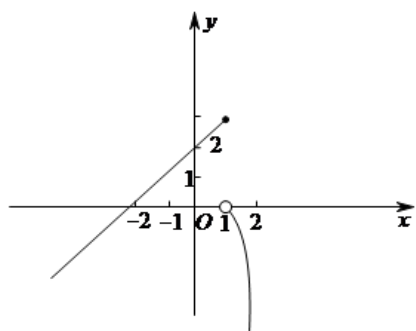
故选：C。

- 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x - x^3, & x > 1 \\ x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(f(x)) = a$ 存在2个实数根，则 a 的取值范围为 ()。

A. $[-24, 0)$ B. $(-\infty, -24) \cup [0, 2)$ C. $(-24, 3)$ D. $(-\infty, -24] \cup [0, 2]$

答案 B

解析 $f(x) = \begin{cases} x - x^3, & x > 1 \\ x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 的图像如下图所示。



令 $t = f(x)$ 则 $t \in (-\infty, 3]$,

当 $a > 3$ 时, 方程 $f(f(x)) = f(t) = a$ 无实根, 方程 $f(f(x)) = a$ 存在 0 个实根,

当 $2 \leq a \leq 3$ 时, $f(t) = a$ 有实根, $t \in [0, 1]$,

$f(x) = t$ 此时有 1 个实根的 $f(f(x)) = a$ 存在 1 个实根,

当 $0 \leq a < 2$ 时, $f(t) = a$ 有 1 实根, $t \in [-2, 0]$,

$f(x) = t$ 此时有 2 实根, $f(f(x)) = a$ 有 2 个实根,

当 $-24 \leq a < 0$ 时, $f(t) = a$ 有 2 实根,

$t_1 \in [-26, -2]$ $f(x) = t$ 有 2 实根,

$t_2 \in [1, 3]$, $f(x) = t$ 此时有 1 实根,

$f(f(x)) = a$ 存在 3 个实根,

$\therefore$ 当 $a < -24$ 时, $f(t) = a$ 有 2 实根.

$t_1 \in (-\infty, -26)$, $f(x) = t$ 有 2 实根,

$t_2 \in (3, +\infty)$, $f(x) = t$ 无实根, 故 $f(f(x)) = a$ 存在 2 实根,

综上 $a \in (-\infty, -24) \cup [0, 2)$.

故选 B.

4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$, 则函数

$g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 上所有零点的和为 ().

A. 7

B. 6

C. 3

D. 2

答案 A

解析 方法一: $\because f(x) = f(2-x)$,

$\therefore f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称,

$$\because f(-x) = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 根与 $x = 0$ 对称,

$$\because f(x) = f(2-x) = f(x-2),$$

$$\therefore f(x) = f(x+2),$$

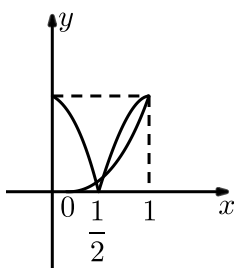
$\therefore f(x)$ 是以 2 为周期的函数,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 上共有 3 条对称轴, 分别为 $x = 0, x = 1, x = 2$,

又 $y = |\cos(\pi x)|$, 关于 $x = 0, x = 1, x = 2$ 对称,

$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$ 为 $g(x)$ 的对称轴,

作出 $y = |\cos(\pi x)|$ 和 $y = x^3$ 在 $[0, 1]$ 上的函数图象如图所示:



由图象可知 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上各有 1 个零点,

$$\text{又 } g(1) = 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 上共有 7 个零点,

设这 7 个零点从小到大依次为: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7$,

则 x_1, x_2 关于 $x = 0$ 对称, x_3, x_5 关于 $x = 1$ 对称, $x_4 = 1, x_6, x_7$ 关于 $x = 2$ 对称,

$$\therefore x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_5 = 2, x_6 + x_7 = 4,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 7.$$

故选: A.

方法二: 由 $f(-x) = f(x), f(x) = f(2-x)$ 可知, 函数 $f(x)$ 的两个对

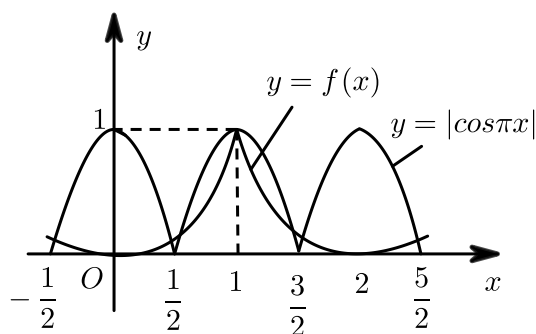
称轴分别为 $x = 0, x = 1$, 又当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$, 所以

函数 $f(x)$ 的周期为 $T = 2|1-0| = 2$. 分别作出函数 $y = |\cos \pi x|$

, $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 上的图像, 如图所示,

两个函数的图像共有 7 个交点, 即函数 $y = g(x)$ 有 7 个零

点, 不难得到这些点都关于直线 $x = 1$ 对称, 故这 7 个点的和为 $2 + 2 + 2 + 1 = 7$.

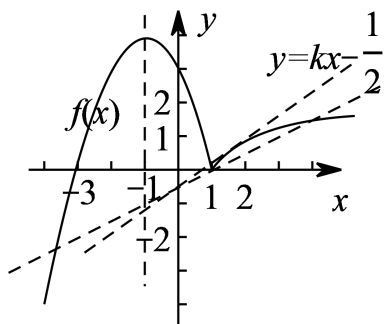


- 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根 , 则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $(\frac{1}{2}, \sqrt{e})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e})$ C. $[\frac{1}{2}, \sqrt{e})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}]$

答案 B

解析 要证 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 有4个不等的实根 ,
只需 $f(x)$ 的图象与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有4个交点 ,
如图 :



如图点 $(1, 0)$ 在 $y = kx - \frac{1}{2}$ 的下方 ,

$$\therefore k \cdot 1 - \frac{1}{2} > 0 \text{ 得 } k > \frac{1}{2} .$$

再根据当 $y = kx - \frac{1}{2}$ 与 $y = \ln x$ 相切时 ,

设切点坐标为 $(m, \ln m)$,

$$\text{则 } k = \frac{\ln m + \frac{1}{2}}{m - 0} = \frac{1}{m} ,$$

$$\therefore m = \sqrt{e} ,$$

$$\text{此时 } k = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{e}}{e} ,$$

此时 $f(x)$ 与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有3个交点 ,

$$\therefore k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e} \right).$$

故选B.

- 6 已知函数 $f(x) = -x^3 + 1 + a\left(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 是自然对数的底} \right)$ 与 $g(x) = 3\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $[0, e^3 - 4]$ B. $\left[0, \frac{1}{e^3} + 2\right]$ C. $\left[\frac{1}{e^3} + 2, e^3 - 4\right]$ D. $[e^3 - 4, +\infty)$

答案 A

解析 函数 $f(x) = -x^3 + 1 + a\left(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 是自然对数的底} \right)$ 与 $g(x) = 3\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点,

则方程 $-x^3 + 1 + a = -3\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有解,

$-x^3 + 1 + a = -3\ln x \Leftrightarrow a + 1 = x^3 - 3\ln x$, 即方程 $a + 1 = x^3 - 3\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有解,

设函数 $g(x) = x^3 - 3\ln x$, 其导数 $g'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$,

又由 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, $g'(x) = 0$ 在 $x = 1$ 有唯一的极值点,

分析可得: 当 $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

当 $1 \leq x \leq e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数,

故函数 $g(x) = x^3 - 3\ln x$ 有最小值 $g(1) = 1$,

又由 $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^3} + 3$, $g(e) = e^3 - 3$; 比较可得: $g\left(\frac{1}{e}\right) < g(e)$,

故函数 $g(x) = x^3 - 3\ln x$ 有最大值 $g(e) = e^3 - 3$,

故函数 $g(x) = x^3 - 3\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的值域为 $[1, e^3 - 3]$,

若方程 $a + 1 = x^3 - 3\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有解,

必有 $1 \leq a + 1 \leq e^3 - 3$, 则有 $0 \leq a \leq e^3 - 4$,

即 a 的取值范围是 $[0, e^3 - 4]$,

故选: A.

- 7 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时,

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$, 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个零点, 则 a 的取值

范围是 () .

A. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

答案 A

解析

$$\because f(x+2) = f(x) - f(1),$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 则 } f(1) = f(-1) - f(1),$$

$$\because f(x) \text{ 是定义在 } \mathbf{R} \text{ 上的偶函数},$$

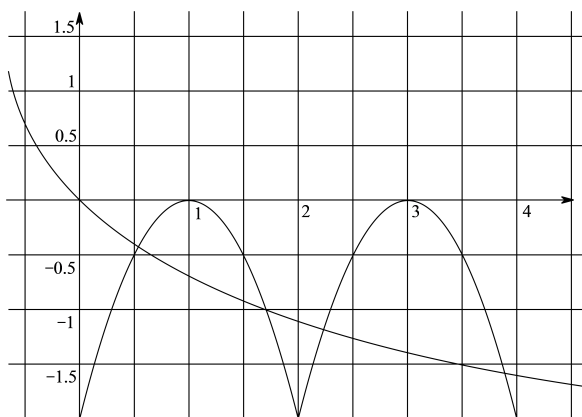
$$\therefore f(1) = 0.$$

$$\therefore f(x) = f(x+2),$$

则函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的, 周期为 2 的偶函数,

$$\text{又 } \because \text{当 } x \in [2, 3] \text{ 时}, f(x) = -2x^2 + 12x - 18,$$

令 $g(x) = \log_a(x+1)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的部分图象如下图:



$y = f(x) - \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个零点可化为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个交点,

$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{则 } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a 3 > -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

8

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2}, & x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{2}{3}$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的

取值范围为 () .

A. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$

B. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{7}{3}\right)$

C. $\left[\frac{5}{3}, 2\right)$

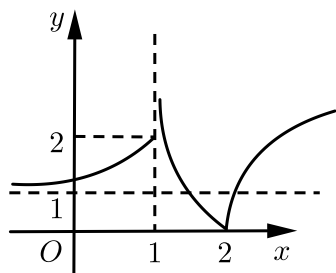
D. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup (2, +\infty)$

答案 A

解析

根据函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2}, & x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$,

作出图象如下,



设 $t = f(x)$, 根据函数图象有,

当 $t > 2$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有 2 个实数根,

当 $1 < t \leq 2$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有 3 个实数根;

当 $0 < t \leq 1$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有 2 个实数根;

当 $t = 0$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有 1 个实数根;

当 $t < 0$ 时, 方程 $t = f(x)$ 没有实数根;

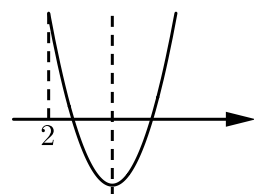
若函数 $F(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{2}{3}$ 恰有 4 个零点,

则方程 $t^2 - at + \frac{2}{3} = 0$ ($t \neq 0$) 有两个不等实数根 t_1, t_2 ,

且 $t_1, t_2 \in (0, 1]$, 或 $t_1, t_2 > 2$ 或 $0 < t_1 \leq 1, t_2 > 2$;

设函数 $h(t) = t^2 - at + \frac{2}{3}$;

则 $\begin{cases} h(0) > 0 \\ \Delta > 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < 1 \\ h(1) \geq 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) > 0 \\ \frac{a}{2} > 2 \end{cases}$,



或 $\begin{cases} h(0) > 0 \\ h(1) \leq 0 \\ h(2) < 0 \end{cases}$,

解得: $\frac{2\sqrt{6}}{3} < a \leq \frac{5}{3}$, 或 $a > \frac{7}{3}$.

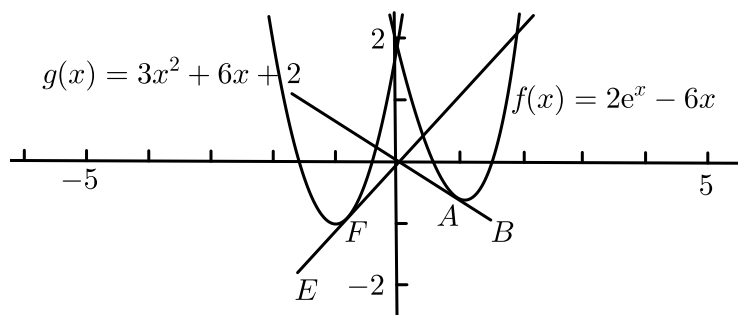
故答案选: A.

9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^x - 6x, & x \geq 0 \\ 3x^2 + 6x + 2, & x < 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) + kx = 0$ 有 4 个不同的实数解，则 k 的取值范围为 () .

- A. $(2\sqrt{6} - 6, 6 - 2e)$ B. $(2e - 6, 6 - 2\sqrt{6})$
C. $(2\sqrt{6} - 6, 0] \cup (6 - 2e, +\infty)$ D. $(-\infty, 2e - 6) \cup [0, 6 - 2\sqrt{6})$

答案 A

解析 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2e^x - 6x$ ，可得 $f'(x) = 2e^x - 6$ ，
当 $x = \ln 3$ 时，函数取得极小值也是最小值： $6 - 6\ln 3 < 0$ ，
关于 x 的方程 $f(x) + kx = 0$ 有 4 个不同的实数解，
就是函数 $y = f(x)$ 与 $y = -kx$ 的图象有 4 个交点，
画出函数的图象如图：可知 $y = -kx$ 与 $y = f(x)$ 有 4 个交点，



临界状态是直线 AB 与直线 EF ，根据导数的几何意义，

可求 $k_{AB} = 2e - 6$ ， $k_{EF} = 6 - 2\sqrt{6}$ ，

所以应满足： $2e - 6 < -k < 6 - 2\sqrt{6}$ ，

得 $2\sqrt{6} - 6 < k < 6 - 2e$ 。

故选 A。

10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0, \\ \sqrt{-x^2 - 4x} + a, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 $f(x)$ 的图象有三个公共点，则 a 的取值范围是 () .

- A. $[-8, -4 + 2\sqrt{5})$ B. $(-4 - 2\sqrt{5}, -4 + 2\sqrt{5})$
C. $(-4 + 2\sqrt{5}, 8]$ D. $(-4 - 2\sqrt{5}, -8]$

答案 D

解析

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f'(x) = 2x$,

$$\therefore f'(1) = 2 \times 1 = 2,$$

则在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为 $y = 2x$,

当 $x \leq 0$ 时, $y = f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x} + a$,

$$\text{即 } (x+2)^2 + (y-a)^2 = 4 (y \geq a),$$

作出函数图象如右图

随着 a 减小时, 半圆向下移动,

当点 $A(-4, a)$ 落在切线上时,

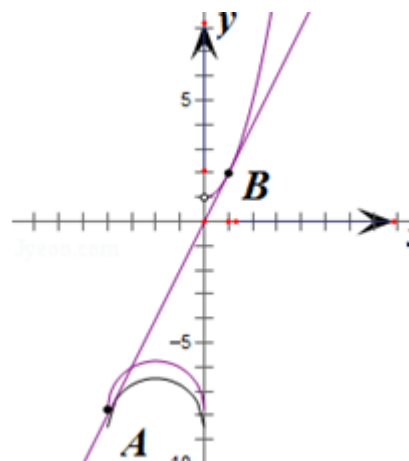
在点 $(1, 2)$ 处的切线与 $f(x)$ 的图象有三个公共点,

即 $a = 2 \times (-4) = -8$ 再向下移动, 直到半圆与直线相切前,

切线 $f(x)$ 的图象有三个公共点, 相切时与 $f(x)$ 的图象有两个交点,

$$\text{即 } \frac{|-4-a|}{\sqrt{5}} = 2, \text{ 解得 } a = -4 - 2\sqrt{5} < -8,$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-4 - 2\sqrt{5}, -8]$.



11

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln x, & x > 0 \\ -x^2 - \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = kx + 1$ 有四个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $(\frac{1}{3}, 1)$

B. $(\frac{1}{3}, 2)$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$

D. $(\frac{1}{2}, 1)$

答案 D

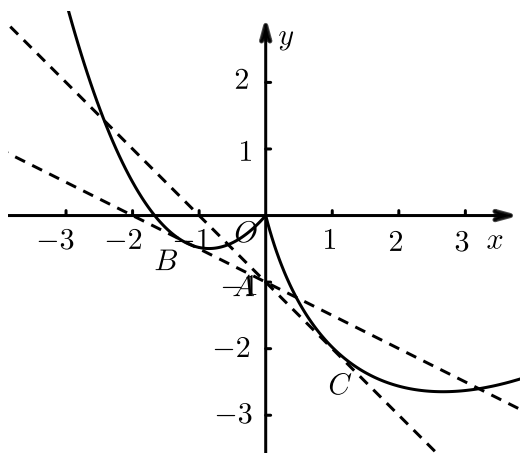
解析

方法一: 因为函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln x (x > 0) \\ -x^2 - \frac{3}{2}x (x \leq 0) \end{cases}$ 有且仅有四个不同的点关于直线 $y = 1$ 的对称点

在直线 $kx + y - 1 = 0$ 的图象上,

而直线 $kx + y - 1 = 0$ 关于直线 $y = 1$ 的对称图象为 $-kx + y = 0$,

所以函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln x (x > 0) \\ -x^2 - \frac{3}{2}x (x \leq 0) \end{cases}$ 的图象与 $-kx + y - 1 = 0$ 的图象有且仅有四个不同的交点,



易知直线 $-kx + y - 1 = 0$ 恒过点 $A(0, 1)$,

设直线 AC 与 $y = 2x - x \ln x$ 相切于点 $C(x, 2x - x \ln x)$,

则 $y' = 1 - \ln x$,

所以 $1 - \ln x = \frac{2x - x \ln x + 1}{x}$, 解得 $x = 1$, 故 $k_{AC} = -1$,

设直线 AB 与 $y = -x^2 - \frac{3}{2}x$ 相切于点 $B(x, -x^2 - \frac{3}{2}x)$,

所以 $-2x - 3 = \frac{-x^2 - \frac{3}{2}x + 1}{x}$, 解得 $x = -1$,

所以 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$,

所以 $-1 < -k < -\frac{1}{2}$, 故 $\frac{1}{2} < k < 1$.

故选 D.

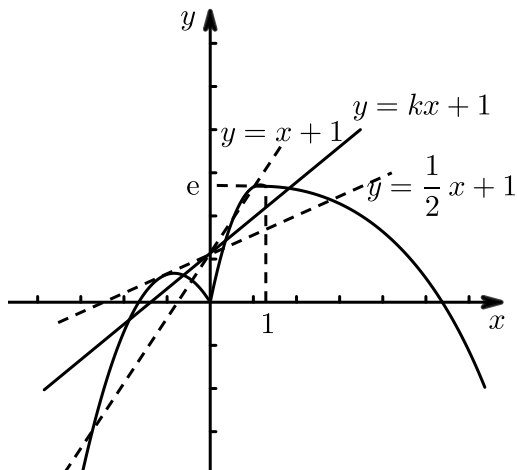
方法二：方程 $f(x) = k + 1$ 有四个不相等的实根，

等价于函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx + 1$ 有四个交点，

易得：①当直线 $y = kx + 1$ 与函数 $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x$ 相切时， $k = \frac{1}{2}$,

②当直线 $y = kx + 1$ 与函数 $f(x) = 2xx \ln x$ 相切时，利用导数的几何意义可得： $k = 1$,

即由图知函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx + 1$ 有四个交点时，



实数 k 的取值范围是 $\frac{1}{2} < k < 1$.

故选D.

12 已知函数 $f(x) = \frac{ax-1}{x+2} - e^{-(x+2)}$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $a \geq -\frac{1}{2}$

B. $a > 0$

C. $-\frac{1}{2} < a < 0$

D. $-\frac{1}{2} < a \leq 0$

答案 B

解析 $f(x) = \frac{ax-1}{x+2} - e^{-(x+2)}$ 恰有两个零点,

则 $\frac{ax-1}{x+2} - e^{-(x+2)} = 0$ 有两个解,

即 $ax-1 = (x+2)e^{-(x+2)}$ 有两个解,

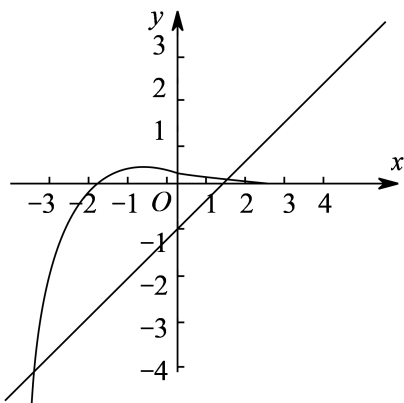
令 $g(x) = ax-1$, 且过定点 $(0, -1)$,

$h(x) = (x+2)e^{-(x+2)}$,

则 $h'(x) = (-x-1)e^{-(x+2)}$,

$x < -1$ 时, $h'(x) > 0$, $x > -1$ 时, $h'(x) < 0$,

图象如图所示,



$\therefore$ 当 $a > 0$ 时图象有两个交点,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a > 0$.

故选B.

13 已知函数 $f(x) = -|x-a| + a$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, 若方程 $f(x) = |g(x)|$ 恰有2个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{8}, +\infty\right)$

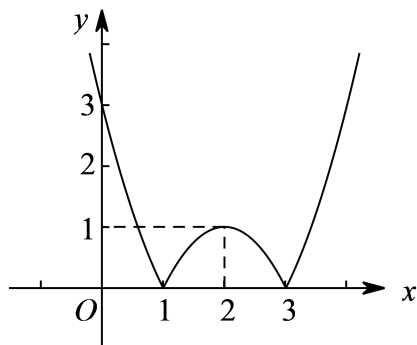
B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{8}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right]$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right)$

答案 A

解析 $\because |g(x)|$ 的图象为

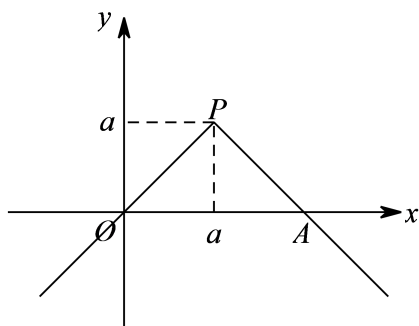


接着，我们分析一下 $f(x)$ 的图像，

$$\because f(x) = -|x-a| + a$$

则 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称，并且 $f(x)$ 恒过定点 $(0,0)$ 以及顶点 (a,a) ，

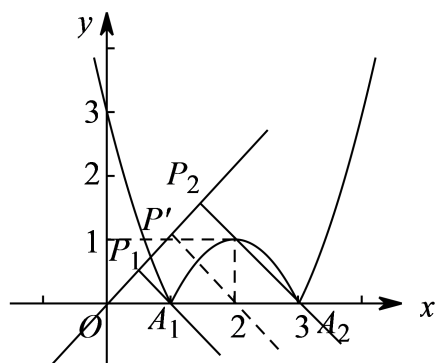
则 $f(x)$ 图象大致为



$\therefore f(x)$ 图象随 a 变化，其顶点 $P(a,a)$ 在不断彼岸花，而 $\triangle OAP$ 一直是一个等腰直角三角形。

$\therefore$ 接下来，我们讨论一些临界，

①



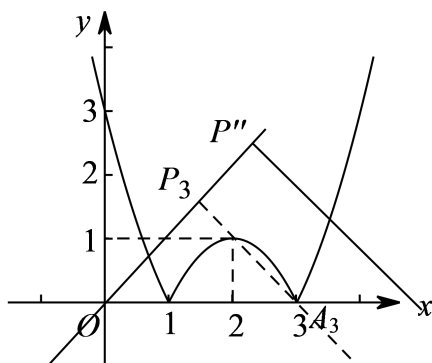
当顶点在 P_1 位置, 即 A_1 在 $(1, 0)$ 点时, 此时有1个交点, $a = \frac{1}{2}$.

当顶点 (a, a) 增大时, $f(x)$ 与 $|g(x)|$ 有两个交点, 如图中 P' 位置. 即 $a > \frac{1}{2}$.

当顶点到 P_2 位置, 即 A_2 在 $(3, 0)$ 位置时, $f(x)$ 与 $|g(x)|$ 有三个交点, 此时 $a = \frac{3}{2}$, $\therefore a < \frac{3}{2}$.

此情况求得 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

②



接着第二种情况, 当顶点 P 在 P_3 位置时,

此时, $|g(x)|$ 与 $f(x)$ 图象切于点 H ,

此时两图象正好有三个交点,

此时在 $[1, 3]$ 上 $g(x)$ 的解析式为 $g(x)_1 = -x^2 + 4x - 3$,

$$g'(x)_1 = -2x + 4.$$

$\because f(x)$ 在对称轴 $x = a$ 右侧, 解析式为 $f(x)_1 = -x + 2a$.

$$g'(x)_1 = -2x + 4 = -1 \text{ 时, } x = \frac{5}{2}, \text{ 解得 } y = \frac{3}{4}.$$

即 H 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$, 代入 $f(x)$ 得 $a = \frac{13}{8}$.

当顶点 P 继续增大时, $f(x)$ 与 $|g(x)|$ 一直有两个交点, 如 P'' 位置.

$$\therefore a > \frac{13}{8},$$

综上, a 取值范围是 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a > \frac{13}{8}$.

故选A.

14 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x| (k \in \mathbf{R})$ 恰有4个零点, 则 k 的取值范围是().

A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

答案 D

解析 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ 恰有4个零点，即 $f(x) = |kx^2 - 2x|$ 恰有4个不等实根，又当 $x = 0$ 时，“等式显然成立”，

$\therefore x = 0$ 是方程的一个根。

当 $x > 0$ 时，有 $x^3 = |kx^2 - 2x| = |kx - 2| \cdot x$ ，

即 $x^2 = |kx - 2|$ ，

当 $x < 0$ 时，有 $-x = |kx^2 - 2x| = |kx - 2| \cdot (-x)$ ，

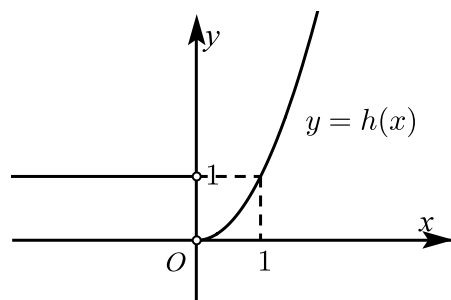
即 $|kx - 2| = 1$ ，

令 $h(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ， $m(x) = |kx - 2|$ ，

$\therefore$ 原题转化为 $h(x) = m(x)$ ，在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有3个根，

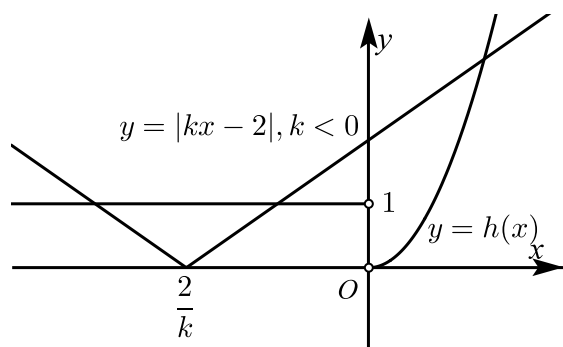
即 $y = h(x)$ 与 $y = m(x)$ 图象在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有3个交点，

作出 $y = h(x)$ 图象如下图所示：



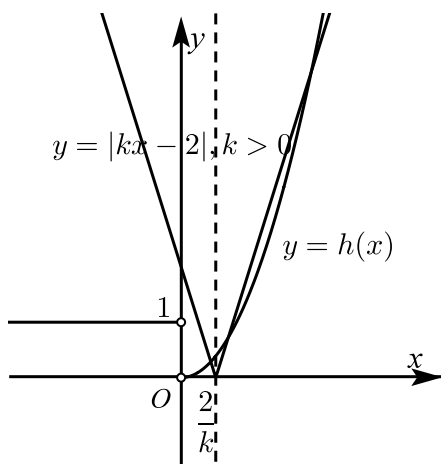
$m(x) = |kx - 2|$ 过定点 $(0, 2)$ ，

① 当 $k < 0$ 时，作出 $y = m(x)$ 草图如下，显然合题。



② 当 $k = 0$ 时， $m(x) = 2$ ，显然不合题，

③ 当 $k > 0$ 时， $y = m(x)$ 草图如下：



若 $y = m(x)$ 与 $y = h(x)$ 图象有 3 个交点，

不妨设为 x_1, x_2, x_3 ，($x_1 < x_2 < x_3$)，

由图可知， $0 < x_1 < \frac{2}{k} < x_2 < x_3$ ，

当 $x > \frac{2}{k}$ 时， $m(x) = kx - 2$ ，

由上述可知， $kx - 2 = x^2$ 在 $(\frac{2}{k}, +\infty)$ 上有 2 根。

令 $t(x) = x^2 - kx + 2$ ，

$$\text{则有} \begin{cases} \Delta = k^2 - 8 > 0 \\ \frac{k}{2} > \frac{2}{k} \\ t(\frac{2}{k}) = \frac{4}{k^2} > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

解得 $k > 2\sqrt{2}$ ，

综上： k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ ，

故选 D。

- 15 函数 $f(x) = \frac{|x|}{e^x}$ ，方程 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + 1 - m = 0$ 有 4 个不相等的根，则实数 m 的取值范围为 ()。

- A. $(\frac{e^2 - e}{e^2 + e}, 1)$ B. $(\frac{e^2 - e}{e^2 + e}, +\infty)$ C. $(\frac{e^2 - e + 1}{e^2 + e}, 1)$ D. $(\frac{e^2 - e + 1}{e^2 + e}, +\infty)$

答案 C

解析 $\because x > 0$ 时， $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ ，

$\therefore 0 < x < 1$ 时， $f(x)$ 递增，

$x > 1$ 时， $f(x)$ 递减，

$$x < 0 \text{ 时}, f'(x) = -\frac{1-x}{e^x} < 0,$$

$\therefore f(x)$ 递减,

$$\text{关于 } x \text{ 的方程: } [f(x)]^2 - (m+1)f(x) + 1 - m = 0,$$

$$\therefore t^2 - (m+1)t + 1 - m = 0,$$

有一个根大于 $\frac{1}{e}$, 一个根大于 $(0, \frac{1}{e})$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{e^2} - (m+1) \cdot \frac{1}{e} + 1 - m < 0 \\ 0 - (m+1) \times 0 + 1 - m > 0 \end{cases},$$

$$\therefore m \in \left(\frac{e^2 - e + 1}{e^2 + e}, 1 \right),$$

故答案选: C.

16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - ax + 1, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases} (a \in \mathbf{R})$, 若函数 $f(x)$ 有四个零点, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 0)$

B. $(e, +\infty)$

C. $(4, +\infty)$

D. $(4, e^2)$

答案 C

解析 ①当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = x - a \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递增函数,

且 $f(x) > f(1) = 1$.

即 $x > 1$ 时, $f(x)$ 没有零点, 而 $x \leq 1$ 时, $f(x) = ax^2 - ax + 1$ 最多有两个零点,

因此, $a \leq 0$ 不符合;

②当 $a > 0$ 时, 令 $f(x) = 0 (x > 1)$, 则 $x - a \ln x = 0$,

$$\text{即 } a = \frac{x}{\ln x}, \text{ 设 } g(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 1), \text{ 则 } g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

$\therefore$ 在区间 $(1, e)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

在区间 $(e, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

即 $g(x)$ 在 $x = e$ 处取得极小值也是最小值 $g(e) = e$,

$\therefore y = a$ 与 $y = g(x)$ 最多有两个交点, 即 $x - a \ln x = 0$ 最多有两个零点,

且当 $a > e$ 时, $x - a \ln x = 0 (x > 1)$ 有两个零点,

又 $f(x)$ 有四个零点,

$\therefore x \leq 1$ 时, $f(x) = ax^2 - ax + 1$ 必有两个零点,

所以 a 满足 $\Delta = a^2 - 4a > 0$, 且对称轴 $x = -\frac{-a}{2a} < 1$, 解得 $a > 4$.

综上 $a > 4$ 时, $f(x)$ 有四个零点. 故选C.

17

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ -x^2 - 6x - 8, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程 $g[f(x)] - a = 0$ (a 为正实数)

的根的个数不可能为 () .

A. 3个

B. 4个

C. 5个

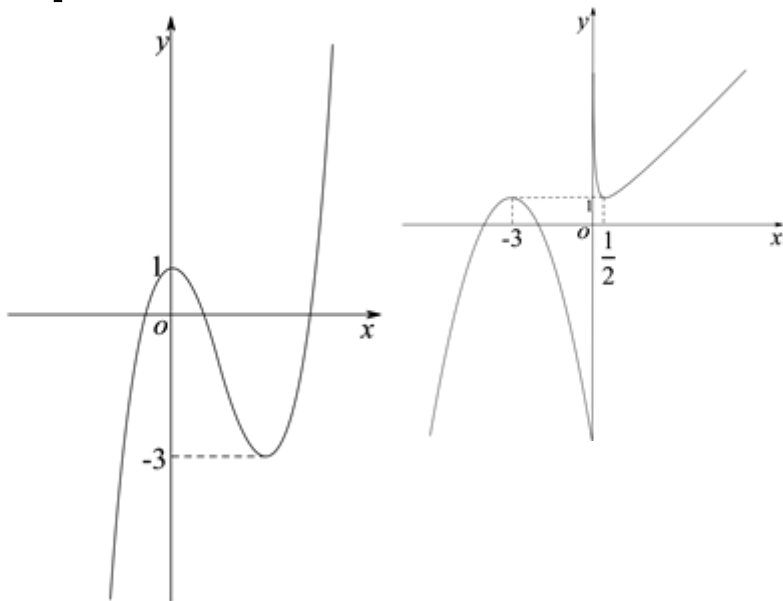
D. 6个

答案

A

解析

如图所示 $a < -8$ 的时候1个, 当 $-8 \leq a < 1$ 时 $g[f(x)] - a = 0$ 有4个根, 当 $a = 1$ 时, 方程 $g[f(x)] - a = 0$ 有5个根, 当 $1 < a < \frac{5}{4}$ 时, $g[f(x)] - a = 0$ 有6个根, $a = \frac{5}{4}$ 的时候有5个, $a > \frac{5}{4}$ 的时候有4个.



18

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $|f(x) - a| + |f(x) - a - 1| = 1$ 有且仅有三个不同的整数解, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{27}{19}\right)$

B. $[0, 8]$

C. $\left[-\frac{4}{7}, -\frac{8}{19}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$

答案

A

解析

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3},$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \frac{(2x)' \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot (x^2 + 3)'}{x^2 + 3} \\ &= \frac{2x^2 + 6 - 4x^2}{x^2 + 3} = \frac{6 - 2x^2}{x^2 + 3}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解之得 } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3},$$

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (-\infty, -\sqrt{3}]$ 单调递减, 在 $x \in [-\sqrt{3}, 0]$ 单调递增,

$$\text{且 } f(-\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2 + 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{且 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} \rightarrow 0,$$

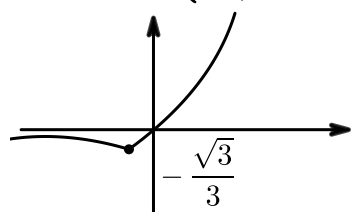
$$f(0) = \frac{2 \times 0}{0^2 + 3} = 0,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x^3,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 > 0 \text{ 恒成立,}$$

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore \text{可知 } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases} \text{ 的大概图象如图,}$$



$$\text{令 } f(x) = t, g(t) = |t - a| + |t - a - 1| - 1,$$

$$\therefore |f(x) - a| + |f(x) - a - 1| = 0 \text{ 有且仅有三个不同的整数解,}$$

$$\therefore \text{即 } g(t) = 0, \text{ 有且仅有三个不同的整数解,}$$

$$\text{令 } g(f(x)) = |f(x) - a| + |f(x) - a - 1| - 1,$$

$$\therefore |f(x) - a| + |f(x) - a - 1| = 1 \text{ 有且仅有三个不同的整数解,}$$

$$\therefore \text{即 } g(f(x)) = 0 \text{ 有且仅有三个不同的整数解,}$$

$$\text{① 当 } f(x) > a + 1 \text{ 时,}$$

$$g(f(x)) = f(x) - a + f(x) - a - 1 - 1 = 2f(x) - 2a - 2 = 0,$$

解之得 $f(x) = a + 1$, 与条件矛盾,

$$\text{② 当 } a \leq f(x) \leq a + 1 \text{ 时,}$$

$$g(f(x)) = f(x) - a + a + 1 - f(x) - 1 = 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{③ 当 } f(x) < a \text{ 时,}$$

$$g(f(x)) = a - f(x) + a + 1 - f(x) - 1 = 2a - 2f(x) = 0,$$

解之得 $f(x) = a$ ，与条件矛盾，

$\therefore$ 可知 $g(f(x)) = 0$ 有且仅有三个不同的整数解时，

$a \leq f(x) \leq a+1$ 有且仅有三个不同的整数解，

$\therefore$ 结合 $f(x)$ 图象可知此时 $f(x) < 0$ ，

$$\text{又} \because f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f(-1) = \frac{2 \times (-1)}{(-1)^2 + 3} = -\frac{1}{2}, \quad f(-2) = \frac{2 \times (-2)}{(-2)^2 + 3} = -\frac{4}{7},$$

$$f(-3) = \frac{2 \times (-3)}{(-3)^2 + 3} = -\frac{1}{2}, \quad f(-4) = \frac{2 \times (-4)}{(-4)^2 + 3} = -\frac{8}{19},$$

$$0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} < a+1 - a,$$

$$\therefore \text{可知此时}, -\frac{1}{2} \leq a+1 < -\frac{8}{19},$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq a < -\frac{27}{19},$$

$$\text{故 } a \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{27}{19}\right).$$

故选 A.

19 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x < 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$ ， $g(x) = x^2 - 4x + 1 + 4\lambda$ ，若关于 x 的方程 $f(g(x)) = \lambda$

有 6 个解，则 λ 的取值范围为 ().

A. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

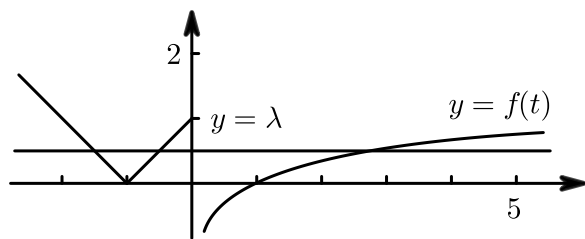
C. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(0, \frac{2}{5}\right)$

答案 D

解析 令 $g(x) = t$ ，则方程 $f(t) = \lambda$ 的解有 3 个，

由图象可得，



$$0 < \lambda < 1,$$

且三个解分别为

$$t_1 = -1 - \lambda, \quad t_2 = -1 + \lambda, \quad t_3 = 10^\lambda,$$

$$\text{则 } x^2 - 4x + 1 + 4\lambda = -1 - \lambda, \quad x^2 - 4x + 1 + 4\lambda = -1 + \lambda,$$

$x^2 - 4x + 1 + 4\lambda = 10^\lambda$, 均有两个不相等的实根 ,

则 $\Delta_1 > 0$, 且 $\Delta_2 > 0$, 且 $\Delta_3 > 0$,

即 $16 - 4(2 + 5\lambda) > 0$ 且 $16 - 4(2 + 3\lambda) > 0$,

解得 $0 < \lambda < \frac{2}{5}$,

当 $0 < \lambda < \frac{2}{5}$ 时 , $\Delta_3 = 16 - 4(1 + 4\lambda - 10^\lambda) > 0$,

即 $3 - 4\lambda + 10^\lambda > 0$ 恒成立 ,

故 λ 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$.

故选 D .

20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x \leq 0 \\ xe^x - x - 1 - \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $F(x) = f(f(x)) - ef(x)$ 的零点个数为 () (e 是自然对数的底数) .

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

答案 B

解析 本题采用复合函数图象作法 ,

令 $g(r) = e^r - r - 1$, $r \in \mathbf{R}$,

则 $g'(r) = e^r - 1$,

当 $r \in (-\infty, 0)$ 时 , $g'(r) < 0$, $g(r)$ 单调递减 , $r \in (0, +\infty)$ 时 , $g'(r) > 0$, $g(r)$ 单调递增

$\Rightarrow g(r)_{\min} = g(0) = 0$,

$\therefore e^r \geq r + 1$,

令 $r = x + \ln x$, 有 :

$e^{x+\ln x} \geq x + \ln x + 1 \Rightarrow xe^x - x - \ln x - 1 \geq 0$, $\forall x > 0$ 恒成立 ,

且“=”在 $x + \ln x = 0$ 时 , 取得 .

当 $x > 0$ 时 ,

$f'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x}$

$= e^x(x+1) - \frac{x+1}{x}$

$= (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$,

显然 $\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ 单调递增 ,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{e}-2 < 0$,

$x = 1$ 时, $e - 1 > 0$,

故必 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$ 且 x_0 唯一,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

且 $f(x_0) = 0$,

故可大致作出 $f(x)$ 图象,

令 $f(x) = t$,

则 $F(x) = f(f(x)) - ef(x)$ 的零点 $\Leftrightarrow f(t) = et$ 的根,

考虑 $y = f(t)$ 与 $y = et$ 的交点个数及对应 x 的根的个数,

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -e^{-x}$, $f'(x) = e^{-x}$,

则 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线为: $y = ex$,

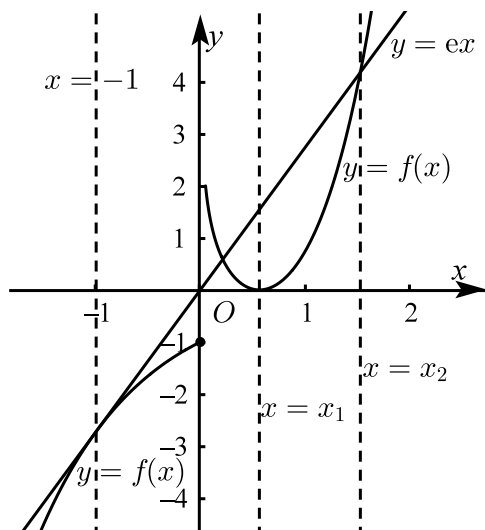
故 $y = ex$ 与 $y = f(t)$ ($t < 0$) 时相切,

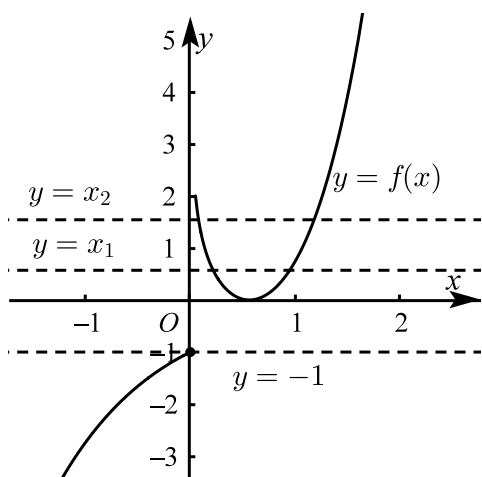
当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f''(x) &= e^x - \frac{1}{x} + \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)(x+1) \\ &= xe^x + 2e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 为下凸函数,

结合下图, $x > 0$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = ex$ 有且仅有两个不同交点,





则结合图，可知 $f(f(x)) = ef(x)$ 有：

$1 + 2 + 2 = 5$ 个不同实根，

$\Leftrightarrow F(x)$ 有 5 个不同零点。

故选 B。

21

已知 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 0 \end{cases}$ ，若在区间 $(-1, 3)$ 内，关于 x 的方程

$f(x) = kx + k (k \in \mathbf{R})$ 有 4 个根，则实数 k 的取值范围是 ()。

A. $0 < k \leq \frac{1}{4}$ 或 $k = 8 - 2\sqrt{15}$

B. $0 < k \leq \frac{1}{4}$

C. $0 < k \leq 8 - 2\sqrt{15}$

D. $0 < k < \frac{1}{4}$

答案 A

解析

$$\because f(x) \text{ 满足 } f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 0 \end{cases}$$

可得：当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = -4x^2 - 8x$ ，

故 $-2 < x \leq 0$ 时， $f(x) = -4x^2 - 8x$ 。

令 $0 < x \leq 2$ ，则 $-2 < x-2 \leq 0$ 。

根据 $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2)$ ，

$$\text{可得 } f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) = \frac{1}{2}[-4(x-2)^2 - 8(x-2)]$$

$$= -2(x^2 - 2x) = -2(x-1)^2 + 2.$$

$\because$ 当 $2 < x \leq 4$ 时， $0 < x-2 \leq 2$ ，

$$\text{可得 } f(x) = \frac{1}{2}f(x-2),$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \frac{1}{2}f(x-2) \\ &= -[(x-2)^2 - 2(x-2)] \\ &= -(x-3)^2 + 1.\end{aligned}$$

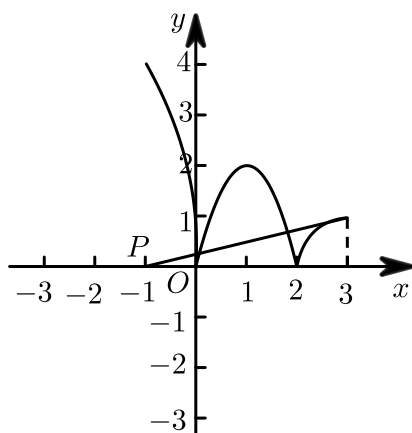
$$\text{即 } 2 < x \leq 4, f(x) = -(x-3)^2 + 1,$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 < x \leq 0 \\ -2(x-1)^2 + 2, & 0 < x \leq 2 \\ -(x-3)^2 + 1, & 2 < x < 3 \end{cases}.$$

$$\text{令 } y = kx + k, \text{ 化简可得 } y = k(x+1),$$

$$\text{故 } y = k(x+1) \text{ 恒过点 } (-1, 0).$$

在同一坐标系画出 $y = k(x+1)$ 和函数 $f(x)$ 的图象如图,



①当 $y = k(x+1)$ 和函数 $f(x)$ 相交时,

$$\because f(3) = 1,$$

$$\text{当 } y = k(x+1) \text{ 过点 } (3, 1) \text{ 时, 可得 } k = \frac{1}{4}.$$

根据图象可知当 $0 < k \leq \frac{1}{4}$ 时, 在区间 $(-1, 3)$ 内, $y = k(x+1)$ 和函数 $f(x)$ 相交且有 4 个交点,

即 $f(x) = kx + k (k \in \mathbf{R})$ 有 4 个根.

②当 $y = k(x+1)$ 和函数 $f(x)$ 在 $(2, 3]$ 上相切时,

设 $y = k(x+1)$ 和函数 $f(x)$ 在 $(2, 3]$ 上相切的切点为 (x_0, y_0) .

$$\text{当 } 2 < x \leq 3, f(x) = -(x-3)^2 + 1 = -x^2 + 6x - 8,$$

$$f'(x) = -2x + 6,$$

$$\therefore f'(x_0) = -2x_0 + 6 = k.$$

$$\text{又 } \because y = k(x+1) \text{ 恒过点 } (-1, 0), \text{ 可得 } k = \frac{y_0}{x_0 + 1},$$

$$\therefore -2x_0 + 6 = \frac{y_0}{x_0 + 1} = \frac{-x_0^2 + 6x_0 - 8}{x_0 + 1},$$

$$x_0^2 + 2x_0 - 14 = 0,$$

$$\text{解得: } x_0 = -1 \pm \sqrt{15},$$

故 $x_0 = -1 + \sqrt{15}$.

$f'(x_0) = -2x_0 + 6 = k$, 可得 $k = 8 - 2\sqrt{15}$.

综上所述, $f(x) = kx + k (k \in \mathbf{R})$ 有 4 个根, 则实数 k 的取值范围是: $0 < k \leq \frac{1}{4}$ 或

$k = 8 - 2\sqrt{15}$.

故选: A.

22 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$. 若方程 $f(x) - kx - 2 = 0$ 有且只有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

B. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

答案 C

解析 作函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$, 与 $g(x) = kx + 2$ 的图像, 如图

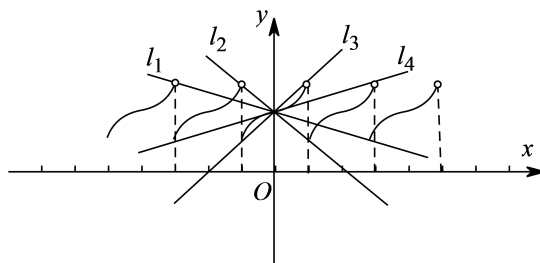
直线 $g(x) = kx + 2$ 恒过点 $(0, 2)$,

$$k_{l_1} = \frac{3-2}{-3-0} = -\frac{1}{3},$$

$$k_{l_2} = \frac{3-2}{-1-0} = -1,$$

$$k_{l_3} = \frac{3-2}{1-0} = 1,$$

$$k_{l_4} = \frac{3-2}{3-0} = \frac{1}{3},$$



结合图像可知, 实数 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, 故选 C.