

函数零点

1

函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^2, & (0 \leq x \leq 2) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & (x > 2) \end{cases}$, 若关于 x 的方程

$[f(x)]^2 + af(x) + b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, 有且仅有 6 个不同实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

2

已知 $f(x)$ 为偶函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(2-x)$ 恒成立, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2 - 2x^2$.

设函数 $g(x) = f(x) - \log_3 x$, 则 $g(x)$ 的零点的个数为 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

3

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x - x^3, & x > 1 \\ x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(f(x)) = a$ 存在 2 个实数根, 则 a 的取值范围为 () .

A. $[-24, 0)$

B. $(-\infty, -24) \cup [0, 2)$

C. $(-24, 3)$

D. $(-\infty, -24] \cup [0, 2]$

4

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$, 则函数 $g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 上所有零点的和为 () .

A. 7

B. 6

C. 3

D. 2

5

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

C. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$

6 已知函数 $f(x) = -x^3 + 1 + a(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 是自然对数的底})$ 与 $g(x) = 3\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $[0, e^3 - 4]$ B. $[0, \frac{1}{e^3} + 2]$ C. $[\frac{1}{e^3} + 2, e^3 - 4]$ D. $[e^3 - 4, +\infty)$

7 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$, 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个零点, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(0, \frac{\sqrt{5}}{5})$ D. $(0, \frac{\sqrt{6}}{6})$

8 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2}, & x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{2}{3}$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为 () .

- A. $(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}] \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$ B. $(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{7}{3})$
C. $[\frac{5}{3}, 2)$ D. $(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}] \cup (2, +\infty)$

9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^x - 6x, & x \geq 0 \\ 3x^2 + 6x + 2, & x < 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + kx = 0$ 有 4 个不同的实数解, 则 k 的取值范围为 () .

- A. $(2\sqrt{6} - 6, 6 - 2e)$ B. $(2e - 6, 6 - 2\sqrt{6})$
C. $(2\sqrt{6} - 6, 0] \cup (6 - 2e, +\infty)$ D. $(-\infty, 2e - 6) \cup [0, 6 - 2\sqrt{6})$

10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0, \\ \sqrt{-x^2 - 4x} + a, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 $f(x)$ 的图象有三个公共点, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $[-8, -4 + 2\sqrt{5})$ B. $(-4 - 2\sqrt{5}, -4 + 2\sqrt{5})$
C. $(-4 + 2\sqrt{5}, 8]$ D. $(-4 - 2\sqrt{5}, -8]$

- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln x, & x > 0 \\ -x^2 - \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = kx + 1$ 有四个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

- 12 已知函数 $f(x) = \frac{ax-1}{x+2} - e^{-(x+2)}$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $a \geq -\frac{1}{2}$ B. $a > 0$ C. $-\frac{1}{2} < a < 0$ D. $-\frac{1}{2} < a \leq 0$

- 13 已知函数 $f(x) = -|x-a| + a$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, 若方程 $f(x) = |g(x)|$ 恰有 2 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{8}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{8}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right)$

- 14 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点, 则 k 的取值范围是 () .

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

- 15 函数 $f(x) = \frac{|x|}{e^x}$, 方程 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + 1 - m = 0$ 有 4 个不相等的根, 则实数 m 的取值范围为 () .

A. $\left(\frac{e^2 - e}{e^2 + e}, 1\right)$ B. $\left(\frac{e^2 - e}{e^2 + e}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{e^2 - e + 1}{e^2 + e}, 1\right)$ D. $\left(\frac{e^2 - e + 1}{e^2 + e}, +\infty\right)$

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - ax + 1, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ($a \in \mathbf{R}$) , 若函数 $f(x)$ 有四个零点, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 0)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(4, +\infty)$ D. $(4, e^2)$

- 17 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ -x^2 - 6x - 8, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程 $g[f(x)] - a = 0$ (a 为正实数) 的根的个数不可能为 () .

A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

- 18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $|f(x) - a| + |f(x) - a - 1| = 1$ 有且仅有三个不同的整数解, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{27}{19}\right)$ B. $[0, 8]$ C. $\left[-\frac{4}{7}, -\frac{8}{19}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$

- 19 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x + 1|, & x < 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4x + 1 + 4\lambda$, 若关于 x 的方程 $f(g(x)) = \lambda$ 有6个解, 则 λ 的取值范围为 () .

A. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{2}{5}\right)$

- 20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x \leq 0 \\ xe^x - x - 1 - \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $F(x) = f(f(x)) - ef(x)$ 的零点个数为 () (e 是自然对数的底数) .

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

- 21 已知 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 0 \end{cases}$, 若在区间 $(-1, 3)$ 内, 关于 x 的方程

$f(x) = kx + k$ ($k \in \mathbf{R}$) 有4个根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $0 < k \leq \frac{1}{4}$ 或 $k = 8 - 2\sqrt{15}$ B. $0 < k \leq \frac{1}{4}$
C. $0 < k \leq 8 - 2\sqrt{15}$ D. $0 < k < \frac{1}{4}$

- 22 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$. 若方程 $f(x) - kx - 2 = 0$ 有且只有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$