

函数与方程2 (选填)

考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，一二模共 48 套试卷中出现频率 100%

知识模块	考点	天津卷	一模	二模
函数与方程	分段函数零点	2019-8(文) ; 2018-14 ; 2017-8 ; 2016-8 ; 2015-8 ; 2014-14	15	14
	分段函数值域	2019-8 ; 2018-14 (文)	4	7
	复合函数零点	无	10	9

考点分析



高频考点

- ①分段函数的图像与性质
- ②平移求解根的个数或参数范围
- ③绕定点旋转求交点个数或参数范围
- ④分类讨论求零点个数或参数范围



考试难点

- ①分段函数零点问题 (如：2019天津卷文8题；2018天津卷理14题)
- ②分段函数值域问题 (如：2018天津卷文14题)
- ③周期函数图像

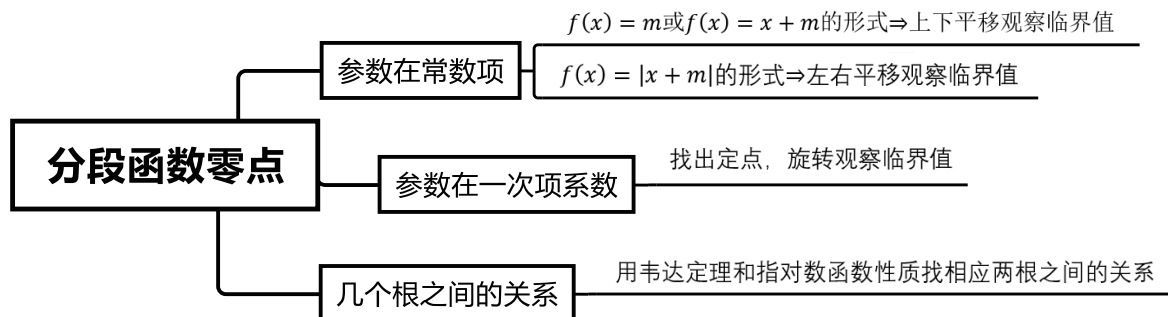


易错点

- ①平移问题参数正负易出错 (如：2017天津卷理8题；2015天津卷理8题)
- ②图像变换问题 (如：2015天津卷理8题)

一、分段函数零点问题

思维导图



1. 平移问题

例题讲解

1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 ().

A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$

B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$

C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 ().

A. $[-\frac{47}{16}, 2]$

B. $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$

C. $[-2\sqrt{3}, 2]$

D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

题型通解

方法一：取特殊值

这里取特殊值最好是取特殊的 x 值然后解出 a 的范围再去排除选项；对 a 赋值去解不等式相对比较麻烦.

方法二：易知两段函数恒大于零的，所以可以直接解不等式：即 $x + \frac{2}{x} \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|, x > 1$ 和

$$x^2 - x + 3 \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|, x \leq 1.$$

牛刀小试

每题建议用时3分钟

3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 ().

A. $(0, \frac{2}{3}]$

B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$

C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$

D. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

题型通解

①分段函数单调递减, 只需要满足两段函数单调递减且交点处单调递减;

②然后分别研究两段函数与 $y = 2 - x$ 的交点情况.

- 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - \frac{5}{2}, & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = \frac{3}{2}x - a$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 若函数

$y = f(x) - g(x)$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{15}{16})$ B. $(\frac{15}{16}, 1)$
C. $(1, \frac{16}{15})$ D. $(1, \frac{5}{4})$

登堂入室

- 5 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解, 则 m 的取值范围是 () .

- A. $[0, \ln 2]$ B. $(-2 - \ln 2, 0)$
C. $(-2 - \ln 2, 0]$ D. $[0, 2 + \ln 2)$

- 6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & x > 2 \end{cases}$, 函数 $g(x) = b - f(2 - x)$, 其中 $b \in \mathbf{R}$, 若函数

$y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是 () .

- A. $(\frac{7}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{7}{4})$
C. $(0, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2)$



题型通解

方法一：取特殊值

化简可得 $g(x) = \begin{cases} |x - 2| + b - 2, & x \geq 0 \\ -x^2 + b, & x < 0 \end{cases}$, 接下来只需要根据选项的差异, 对 b 赋值即可得出答案;

方法二：参变分离.

2. 旋转问题

例题讲解

- 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____ .

- 8 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|$, $x \in \mathbf{R}$. 若方程 $f(x) - a|x - 1| = 0$ 恰有4个互异的实数根, 则实数 a 的取值范围为 _____.



题型通解

方法一：先参变分离再数形结合；

方法二：作出 $f(x)$ 的图象，然后求出相切时的临界状态即可.

牛刀小试



每题建议用时3分钟

- 9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x - 2, & -3 \leq x \leq 1 \\ \ln \frac{1}{x}, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$, 若 $g(x) = ax - |f(x)|$ 的图像与 x 轴有3个不同的交点, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$

C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

D. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{2e}\right)$

登堂入室

- 10 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有6个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.

3. 根的关系

例题讲解

- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x), & x < 0 \\ x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = a - |f(x)|$ 有四个零点 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $ax_1x_2 + \frac{x_3 + x_4}{a}$ 的取值范围是 _____.



题型通解

①根据对数函数性质找 x_1, x_2 之间的关系;

②利用韦达定理找出 x_3, x_4 之间的关系.

牛刀小试



每题建议用时4分钟

12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x), & x < 0 \\ x-2, & x \geq 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = a - |f(x)|$ 有四个零点 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $x_1 + x_2x_3 + x_2x_4$ 的取值范围是 _____ .

13 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \sin(\frac{\pi}{4}x), & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 满足

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{(x_3-1) \cdot (x_4-1)}{x_1 \cdot x_2}$ 的取值范围是 () .

A. (15, 25)

B. (20, 32)

C. (8, 24)

D. (9, 21)

4. 值域问题

例题讲解

14 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$, 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a

的取值范围是 _____ .



题型通解

分类讨论去绝对值, 将问题转化成二次不等式恒成立问题.

牛刀小试



每题建议用时4分钟

15

已知函数 $g(x) = ax + 1$, $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 对 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

登堂入室

- 16 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x, & x \geq 0 \\ -ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$, 当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, 恒有 $f(x+a) < f(x)$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ B. $\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
C. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ D. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

二、复合函数零点问题

例题讲解

- 17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x + 1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 当 $1 < a < 2$ 时, 关于 x 的方程 $f(f(x)) = a$ 的实数解的个数为 ().
- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5
- 18 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ($x \in \mathbf{R}$), 若关于 x 的方程 $f^2(x) - \frac{1}{2}mf(x) + \frac{1}{2}m - 1 = 0$ 恰好有 4 个不相等的实根, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $\left(1, \frac{8}{e^2} + 1\right)$ B. $\left(2, \frac{4}{e^2} + 2\right)$
C. $\left(1, \frac{4}{e^2} + 1\right)$ D. $\left(2, \frac{8}{e^2} + 2\right)$



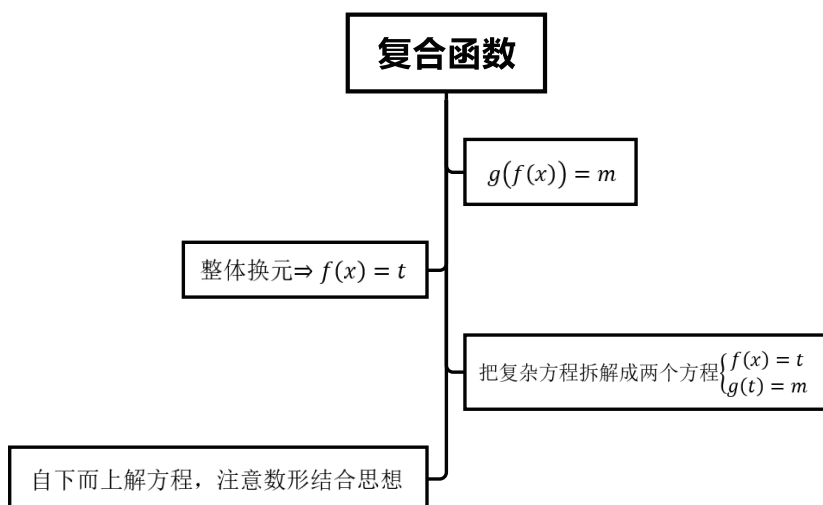
题型通解

①复合函数的零点做题步骤：换元——求解——还元；

此题：首先，换元：设 $f(x) = t$ ；然后，求解得 $t = 1$ 或 $\frac{m}{2} - 1$ ；最后，还元：令 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = \frac{m}{2} - 1$ ，用数形结合，即可求出有四个交点的情况下的 m 的范围；

②指数函数和一次或者二次函数进行乘除运算得到的函数一般情况下都有渐近线.

导图总结



牛刀小试



每题建议用时5分钟

- 19 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$ ，则关于 x 的方程 $6[f(x)]^2 - f(x) - 1 = 0$ 的实根的个数为（ ）.
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

- 20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(x+1)|, & x \in (-1, e-1) \\ \frac{e-1}{x}, & x \in [e-1, +\infty) \end{cases}$ (其中 e 为自然对数的底数), 若关于 x 的方程 $f^2(x) - \frac{1}{2}mf(x) + m - 3 = 0$ 恰好有 4 个不相等的实根, 则 m 的取值范围是 _____.

登堂入室

- 21 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx + k, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ (其中 $k \geq 0$) , 若函数 $y = f[f(x)] + 1$ 有 4 个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____ .
- 22 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2 - 4}, & -1 < x < 1 \\ x^2 - 2, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases}$
- 若函数 $g(x) = |f(x)| + a$ 有 6 个零点, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{5}{4})$
 C. $(-\frac{5}{4}, -1]$ D. $[1, \frac{5}{4}]$

三、试炼之地

23 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$, 函数 $g(x) = 3 - f(2-x)$, 则函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点的个数为 () .

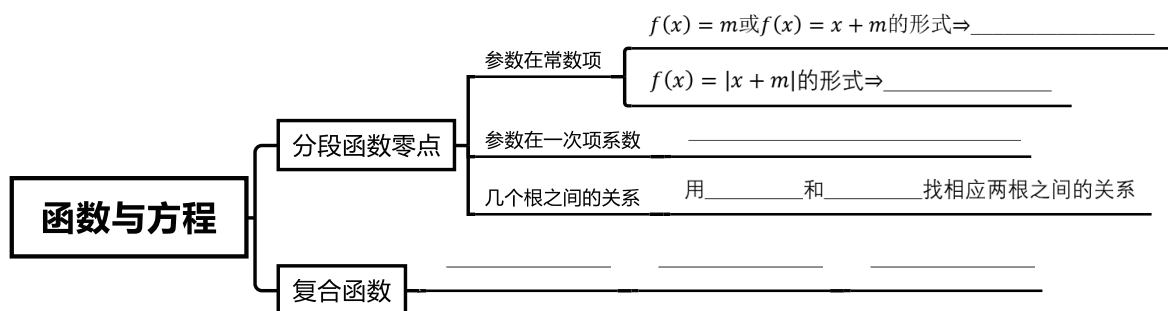
- A. 2 B. 3
 C. 4 D. 5

24 已知函数 $f(x)$ 满足：①定义域为 $\mathbf{R}$ ；②对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = 2f(x)$ ；③当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. 若函数 $g(x) = \begin{cases} e^x & (x \leq 0) \\ \ln x & (x > 0) \end{cases}$, 则函数 $y = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上零点的个数是 () .

- A. 7 B. 8
 C. 9 D. 10

25 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$, $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的所有实根之和为 _____ .

思维导图



易错总结

①平移问题注意参数正负

②复合函数注意内层函数和外层函数结合

小憩一下

陈景润——生为哥猜的数学家

陈景润（1933—1996）是我国一位著名的数学家，他在1973年证明了著名的“ $1+2$ ”，也即“陈氏定理”，对近代研究哥德巴赫猜想迈出了伟大的一步。

少年时的陈景润就是个沉默寡言、善于思考的孩子。1945年，他随着家人从闽西北迁居福州市并进入英华中学读书。正是在这里，陈景润遇到了他自谓是终身获益匪浅的名师沈元。沈元是中国著名的空气动力学家，航空工程教育家，中国航空界的泰斗。他本是伦敦大学帝国理工学院毕业的博士、清华大学航空系主任，1948年回到福州料理家事，正逢战事，只好留在福州母校英华中学暂时任教，而陈景润恰恰就是他任教的那个班上的学生。

一天，沈元老师在数学课上给大家讲了一故事：“200年前有个法国人发现了一个有趣的现象： $6 = 3 + 3$ ， $8 = 5 + 3$ ， $10 = 5 + 5$ ， $12 = 5 + 7$ ， $28 = 5 + 23$ ， $100 = 11 + 89$ 。每个大于4的偶数都可以表示为两个奇素数之和。因为这个结论没有得到证明，所以还是一个猜想。大数学欧拉说过：虽然我不能证明它，但是我确信这个结论是正确的。它像一个美丽的光环，在我们不远的前方闪耀着眩目的光辉。”“数学是自然科学的皇后，而这位皇后头上的皇冠，则是数论，我刚才讲到的哥德巴赫猜想，就是皇后皇冠上的一颗璀璨夺目的明珠啊！”陈景润瞪着眼睛，听得入神。

从此，陈景润对这个奇妙问题产生了浓厚的兴趣。课余时间他最爱到图书馆，不仅读了中学辅导书，这些大学的数理化课程教材他也如饥似渴地阅读。因此获得了“书呆子”的雅号。

兴趣是第一老师。不知道后来沈元教授还能否记得自己当年对这帮孩子们都说了些什么，但陈景润却一直记得，一辈子都那样清晰，一位伟大的数学家就这样诞生了。

他有着超人的勤奋和顽强的毅力，多年来孜孜不倦地致力于数学研究，废寝忘食，每天工作12个小时以上，曾经用过的草稿纸以麻袋计都要装几十包！即便是在遭受疾病折磨时，他也没有停止过自己的追求，为数学事业的发展作出了重大贡献。