

21年立体几何模考

- 1 一个四棱锥的所有棱长都相等，其表面积为 $16 + 16\sqrt{3}$ ，则该四棱锥的棱长为 _____，体积为 _____。

答案 1: $2\sqrt{2}$
2: $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

解析 设四棱锥的棱长为 a ，由题意得 $a^2 + 4 \times \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = 16 + 16\sqrt{3}$ ，
解得 $a = 4$ 或 -4 （舍），
所以该四棱锥的高为 $\sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ ，
所以该四棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$ 。

- 2 某长方体的长、宽、高分别为 $4, 4, 2$ ，则该长方体的体积与其外接球的体积之比为 _____。

答案 $8 : 9\pi$

解析 因为长方体的长、宽、高分别为 $4, 4, 2$ ，
所以其体积 $V_{\text{长方形}} = 4 \times 4 \times 2 = 32$ ，
其外接球直径为 $2R = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$ ，故 $R = 3$ ，
所以其外接球体积 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ ，
因此，长方体的体积与其外接球的体积之比为 $\frac{32}{36\pi} = \frac{8}{9\pi}$ 。
故答案为： $8 : 9\pi$ 。

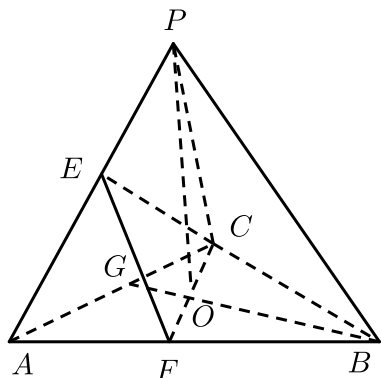
- 3 已知三棱锥 $P - ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为 2 正三角形， E, F 分别是 PA, AB 的中点， $\angle CEF = 90^\circ$ ，则球 O 的体积为 _____。

答案

$$\sqrt{6}\pi$$

解析

如图，由 $PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，可知三棱锥 $P - ABC$ 为正三棱锥，



则顶点 P 在底面的射影 O 为底面三角形的中心，连接 BO 并延长，交 AC 于 G ，

则 $AC \perp BG$ ，又 $PO \perp AC$ ， $PO \cap BG = O$ ，

可得 $AC \perp$ 平面 PBG ，则 $PB \perp AC$ ，

$\because E, F$ 分别是 PA, AB 的中点，

$\therefore EF \parallel PB$ ，

又 $\angle CEF = 90^\circ$ ，即 $EF \perp CE$ ，

$\therefore PB \perp CE$ ，得 $PB \perp$ 平面 PAC ，

$\therefore$ 正三棱锥 $P - ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，

把三棱锥补形为正方体，则正方体外接球即为三棱锥的外接球，

其直径， $2R = \sqrt{PA^2 + PB^2 + PC^2}$ ，则球 O 的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{6}\pi$ 。

故答案为： $\sqrt{6}\pi$ 。

4

已知圆柱 OO_1 的两底面圆周上的所有点都在球 C 的表面，且圆柱 OO_1 的底面半径为1，高为 $2\sqrt{3}$ ，则球 C 的表面积为（ ）。

A. 2π

B. 8π

C. 12π

D. 16π

答案

D

解析

设球的半径为 R ，则 $2R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ ，

所以， $R = 2$ ，

因此，球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

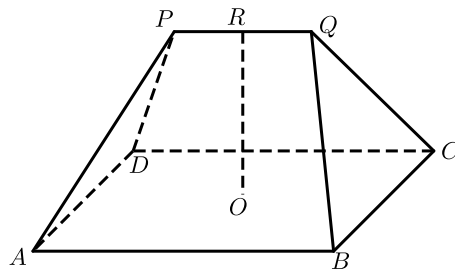
故选D .

- 5 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一个球面上, 且 $AB = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = 1$, 则球的表面积为 _____ .

答案 8π

解析 $\because$ 长方体8个顶点在同一球面上,
则长方体外接球半径满足 $2R = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = 2\sqrt{2}$,
 $R = \sqrt{2}$,
 $\therefore S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 8\pi$.
故答案为: 8π .

- 6 如图所示的屋脊状楔体 $PQ - ABCD$, 下底面 $ABCD$ 是矩形, 假设屋脊没有歪斜, 即 PQ 的中点 R 在底面 $ABCD$ 上的投影为矩形 $ABCD$ 的中心点 O , $PQ \parallel AB$, $AB = 4$, $AD = 3$, $PQ = 2$, $OR = 1$ (长度单位: 丈) 则楔体 $PQ - ABCD$ 的体积为 () (体积单位: 立方丈) .



- A. $6\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 8 D. 5

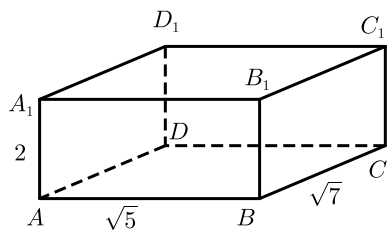
答案 D

解析 如图,

- 8 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{7}$, $AA_1 = 2$, 则三棱锥 $D_1 - ACD$ 的体积为 _____, 长方体的外接球的表面积为 _____.

答案 1: $\frac{\sqrt{35}}{3}$
2: 16π

解析



由图可知 $V_{D_1-ACD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} \times 2 = \frac{\sqrt{35}}{3}$,

$$A_1C = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 + 2^2} = \sqrt{5 + 7 + 4} = 4,$$

$\therefore$ 长方体外接球半径为 2,

$\therefore$ 长方体外接球表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times 4 = 16\pi$.

- 9 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ().



A. 22 斛

B. 14 斛

C. 36 斛

D. 66 斛

答案 A

解析 设米堆所在圆锥的底面半径为 r 尺,

则 $\frac{1}{4} \times 2\pi r = 8$,

解得： $r = \frac{16}{\pi}$,

所以米堆的体积为：

$$V = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 5 = \frac{320}{3\pi} \approx 35.56,$$

所以米堆的斛数是 $\frac{35.56}{1.62} \approx 22$.

故选：A.

- 10 已知一个圆锥的底面半径为2，高为3，其体积大小等于某球的表面积大小，则此球的体积是（ ）.

A. $4\sqrt{3}\pi$

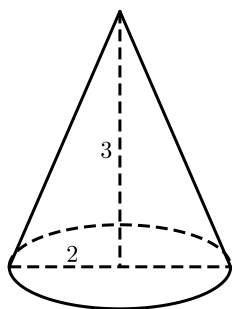
B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

C. 4π

D. $\frac{4\pi}{3}$

答案 D

解析



$$\therefore V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi R^2,$$

$$\therefore R = 1,$$

$$\therefore V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

故选D.

- 11 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，则三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的体积为（ ）.

A. $\frac{4}{3}$

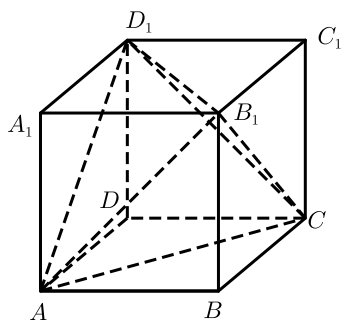
B. $\frac{8}{3}$

C. 4

D. 6

答案 B

解析



三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的体积 = 正方体的体积 - 4个三棱锥的体积 .

$$\text{故 } V_{A-B_1CD_1} = V_{\text{正}} - V_{C_1-B_1CD} - V_{B_1-ABC} - V_{B_1-AA_1D} - V_{D_1-ADC} ,$$

$$\text{又} \because V_{C_1-B_1CD} = V_{B_1-ABC} = V_{B_1-AA_1D} = V_{D_1-ADC}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{底面积} \times \text{高}$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{4}{3} ,$$

$$\therefore V_{A-B_1CD_1} = 2 \times 2 \times 2 - \frac{4}{3} \times 4$$

$$= 8 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{8}{3} .$$

故本题应选B .

- 12 将长、宽分别为4和3的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，得到四面体 $A - BCD$ ，则四面体 $A - BCD$ 的外接球的表面积为 () .

A. 25π B. 50π C. 5π D. 10π

答案 A

解析 由题意可知，直角三角形斜边的中线是斜边的一半，

所以长宽分别为4和3的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起二面角，得到四面体 $A - BCD$ ，

则四面体 $A - BCD$ 的外接球的球心 O 为 AC 中点，

$$\text{半径 } r = \frac{5}{2} ,$$

$$\text{所求四面体 } A - BCD \text{ 的外接球的表面积为 } 4\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\pi .$$

故选A .

- 13 天津滨海文化中心地处天津滨海新区开发区，是天津乃至京津冀地区的标志性文化工程．其中滨海图书馆建筑独具特色，被称为“滨海之眼”，如图1所示，中心球状建筑引起了小明的注意，为了测量球的半径，小明设计了两个方案，
- 方案甲，构造正三棱柱侧面均与球相切，如图2所示，底面边长约为30米，估计此时球的完整表面积为 _____ 平方米；
- 方案乙，测量球被地面截得的圆的周长约为 16π 米，地面到球顶部高度约为16米，估计此时球的完整体积为 _____ 立方米．
- 你认为哪种方案好呢？



图1

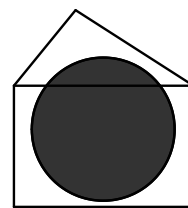
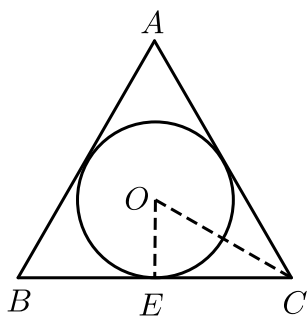


图2

答案 300π ； $\frac{4000\pi}{3}$ ；方案乙．

解析 方案甲： $R = OE = \frac{1}{\sqrt{3}}EC = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{30}{2} = 5\sqrt{3}$ （米），

则球的完整表面积为 $4\pi R^2 = 300\pi$ 平方米．



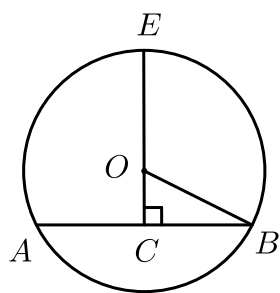
方案乙： $BC = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\pi}{\pi} = 8$ （米），

而 $OE = OB = R$ ，

$OC = EC - OE = 16 - R$ ，

则 $OC^2 + BC^2 = OB^2$ ， $(16 - R)^2 + 8^2 = R^2$ ， $R = 10$ ，

则球完整体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4000\pi}{3}$ 立方米．



方案乙更好，实际可操作性方案乙更强。