

21年模考基本不等式

1 已知实数 $a > 0$, $b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 _____.

答案 $2\sqrt{6}$

解析 解: 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 可得 $\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} > 0$, 则 $a-1 > 0$,
 则 $b = \frac{a}{a-1}$, 则 $b-1 = \frac{a}{a-1} - 1 = \frac{1}{a-1}$,
 $\therefore \frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1} = \frac{3}{a-1} + 2(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{3}{a-1} \cdot 2(a-1)} = 2\sqrt{6}$,
 当且仅当 $\frac{3}{a-1} = 2(a-1)$, 即 $a = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取等号,
 故 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$,
 故答案为: $2\sqrt{6}$.

2 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab}$ 的最小值是 _____.

答案 $\frac{5}{2}$

解析 $\because$ 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = 1$,
 $\therefore 1 = a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$, 当且仅当 $a = 2b$ 时, 取等号,
 解得 $ab \leq \frac{1}{8}$, 即 $ab \in \left(0, \frac{1}{8}\right]$,
 由 $(a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab = 1$,
 则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab} = 1 - 4ab + \frac{1}{4ab}$,
 令 $t = ab$, $t \in \left(0, \frac{1}{8}\right]$,
 设 $f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t}$ ($t \in \left(0, \frac{1}{8}\right]$, $-4t$ 减函数 $\frac{1}{4t}$ 减函数),
 故 $f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t}$ 在 $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ 上是减函数,
 当 $t = \frac{1}{8}$ 时, $f(t)_{\min} = 1 - 4 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} = \frac{5}{2}$.

- 3 函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A ，若点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ ($mn > 0$) 上，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____。

答案 4

解析 $\because$ 函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A ，
 $\therefore A(1, 1)$ ，
 $\because$ 点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上 ($mn > 0$)，
 $\therefore m + n = 1$ ($mn > 0$)，
 $\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (m + n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4$ ，当且仅当 $m = n = \frac{1}{2}$ 时取等号，
 $\therefore m = n = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 4。
 故答案为：4。

- 4 已知正实数 x, y 满足 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，则 $x + y$ 的最小值是 _____。

答案 8

解析 由 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，可得 $x + y - 6 = \frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 。
 两边同时乘以 $x + y$ ，可得 $(x + y - 6) \cdot (x + y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \right) \cdot (x + y)$ ，
 因为 $\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \right) \cdot (x + y) = 10 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} = 16$ ，
 当且仅当 $y = 3x$ ，即 $x = 2, y = 6$ 时，等号成立，
 则 $(x + y - 6) \cdot (x + y) \geq 16$ ，即 $(x + y)^2 - 6(x + y) - 16 \geq 0$ ，
 解得 $x + y \leq -2$ (舍去) 或 $x + y \geq 8$ 。
 故答案为：8。

- 5 函数 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ ($x > -1$) 最小值为 _____。

答案 9

解析

$$\text{设 } t = x + 1 (t > 0), \text{ 则 } y = f(t) = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$$

$$= \frac{(t+4)(t+1)}{t},$$

$$\text{整理得: } f(t) = \left(t + \frac{4}{t}\right) + 5,$$

$$\because t > 0,$$

$$\therefore t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}},$$

$$\text{所以 } f(t) = \left(t + \frac{4}{t}\right) + 5 \geq 2\sqrt{4} + 5 = 9,$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{4}{t} = 2 \text{ 时, 函数有最小值, 此时 } x = 1,$$

$$\text{因此函数 } y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1} \text{ 当 } x = 1 \text{ 时有最小值为 } 9.$$

故答案为: 9.

6 已知实数 x, y 满足 $xy = 4x + y (x > 0, y > 0)$, 则 $\frac{4x+y+4}{\sqrt{xy}}$ 的最小值是 _____.

答案 4

解析

$$\because xy = 4x + y,$$

$$\therefore 4x + y = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy},$$

$$\therefore \frac{4x+y+4}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{xy})^2 + 4}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy} + \frac{4}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

$$\therefore \text{最小值} = 4.$$

7 设 $a > 0, b > 0$, 且 $5ab + b^2 = 1$, 则 $a + b$ 的最小值为 _____.

答案 $\frac{4}{5}$

解析

$$\text{因为 } a > 0, b > 0, \text{ 且 } 5ab + b^2 = 1,$$

$$\text{所以 } a = \frac{1-b^2}{5b},$$

$$\text{因为 } a > 0,$$

所以 $0 < b < 1$,

$$a + b = \frac{1 + 4b^2}{5b} = \frac{1}{5b} + \frac{4b}{5} \geq 2\sqrt{\frac{1}{5b} \cdot \frac{4b}{5}} = \frac{4}{5},$$

当且仅当 $\frac{1}{5b} = \frac{4b}{5}$, 即 $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{10}$ 时取等号,

则 $a + b$ 的最小值 $\frac{4}{5}$.

故答案为: $\frac{4}{5}$.

8 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a + b = ab$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 _____.

答案 9

解析 $\because a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = ab$,

$$\therefore a = \frac{b}{b-2} > 0, \text{ 解得 } b > 2,$$

$$\text{则 } a + 2b = \frac{b}{b-2} + 2b = 1 + \frac{2}{b-2} + 2(b-2) + 4 \geq 5 + 2 \times 2\sqrt{\frac{1}{b-2} \cdot (b-2)} = 9,$$

当且仅当 $b = 3$, $a = 3$ 时取等号,

其最小值为 9.

9 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = a + b + 3$, 则 $a + b$ 的最小值为 ().

A. 4

B. 8

C. 7

D. 6

答案 D

解析 $a > 0, b > 0$, 且满足 $ab = a + b + 3$,

$$\text{可得 } ab \geq 3\sqrt[3]{3ab},$$

$$\text{即有 } ab \geq 9,$$

$$\text{可得 } a + b \geq 6,$$

当且仅当 $a = b = 3$ 取得等号,

则 $a + b$ 的最小值为 6.

故选 D.

10 已知 $x > 0$, $y > -1$, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2 + 3}{x} + \frac{y^2}{y + 1}$ 的最小值为 _____.

答案 $\sqrt{3} + 2$

解析 原式 = $\frac{x^2 + 3}{x} + \frac{(y + 1)^2 - 2(y + 1) + 1}{y + 1}$

$$= x + \frac{3}{x} + (y + 1) + \frac{1}{y + 1} - 2$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{1}{y + 1} + x + y + 1 - 2,$$

$$\because x + y = 1,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{3}{x} + \frac{1}{y + 1}$$

$$= \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y + 1} \right) (x + y + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left(3 + \frac{3(y + 1)}{x} + \frac{x}{y + 1} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\geq \left(2\sqrt{\frac{3(y + 1)}{x} \cdot \frac{x}{y + 1}} + 4 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} + 2.$$

$$\text{当且仅当 } \frac{3(y + 1)}{x} = \frac{x}{y + 1}, \text{ 即当 } x = 3 - \sqrt{3}, y = \sqrt{3} - 2 \text{ 时, 取“=”}.$$

11 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b + c = 1$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1}$ 的最大值是 _____.

答案 -2

解析 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1} = \frac{a^2 + b^2 + 2}{-a - b}$

$$= -\frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b} \leq -\frac{\frac{(a + b)^2}{2} + 2}{a + b}$$

$$= -\left(\frac{a + b}{2} + \frac{2}{a + b} \right) \leq -2.$$

当且仅当“ $a = b$ ”时且“ $a + b = 2$ ”时“=”成立.

12 已知 $a > 0$, $b > 0$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b}$ 的最小值为 _____.

答案 2

解析

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a^2 + 1 \geq 2a,$$

$$b^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}b,$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b} = \frac{(a^2 + 1) + (b^2 + 2)}{a + \sqrt{2}b}$$

$$\geq \frac{2a + 2\sqrt{2}b}{a + \sqrt{2}b}$$

$$= \frac{2(a + \sqrt{2}b)}{a + \sqrt{2}b}$$

$$= 2,$$

$$\therefore \left(\frac{a^2 + b^2 + 3}{a + \sqrt{2}b} \right)_{\min} = 2, \text{ 此时 } a = 1, b = \sqrt{2}.$$

13 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____.

答案 18

解析

已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$. $2x + 8y = xy$ 即: $\frac{2}{y} + \frac{8}{x} = 1$. 利用基本不等式:

$$\text{则 } x + y = (x + y) \left(\frac{2}{y} + \frac{8}{x} \right) = \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} + 10 \geq 8 + 10 = 18, \text{ 当且仅当 } x = 2y \text{ 时成立.}$$

则 $x + y$ 的最小值为 18.

故答案为 18.