

本试卷分为第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,共150分,考试时间120分钟。第I卷1至3页,第II卷4至6页。

答卷前,考生务必将自己的考场座位号、姓名、准考证号填涂在答题卡上。答卷时,考生务必将答案涂写在答题卡上,答在试卷上的无效。

祝各位考生考试顺利!

第I卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。

2. 本卷共9小题,每小题5分,共45分。

参考公式:

- 如果事件 A 与事件 B 互斥,那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 如果事件 A 与事件 B 相互独立,那么 $P(AB) = P(A)P(B)$.
- 球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$, 其中 R 表示球的半径。

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

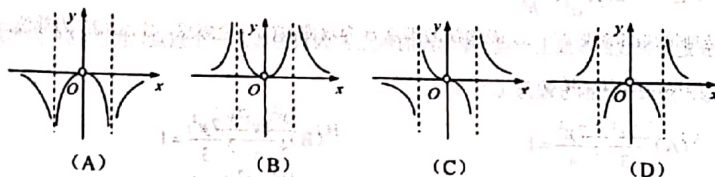
(1) 已知集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \in U \mid |x-1| \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()。

- (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$
(C) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

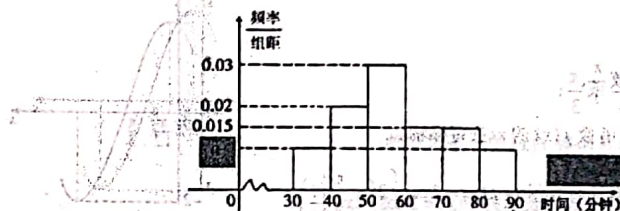
(2) 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 " $1-x^2 < 0$ " 是 " $x^2 > 1$ " 的 ()。

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(3) 函数 $y = \frac{1}{\log_2|x|}$ 的部分图象大致为 ()。



(4) 某校通过问卷调查了解 500 名学生周末参加体育锻炼的时间, 频率分布直方图如下图所示, 数据的分组依次为: $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90]$, 则在调查的学生中周末参加体育锻炼的时间不少于 60 分钟的人数是 ()。



- (A) 125 (B) 175
(C) 200 (D) 300

(5) 设 $a = 2^{\log_2 3}$, $b = \log_3 0.4$, $c = 3 \ln 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()。

- (A) $b < a < c$ (B) $a < c < b$
(C) $b < c < a$ (D) $a < b < c$

(6) 已知圆柱 OO_1 的两底面圆周上的所有点都在球 C 的表面, 且圆柱 OO_1 的底面半径为 1, 高为 $2\sqrt{3}$, 则球 C 的表面积为 ()。

- (A) 2π (B) 8π
(C) 12π (D) 16π





第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共11小题, 共105分。

二、填空题: 本大题共6个小题, 每小题5分, 共30分。试题中包含两个空的, 答对1个的给3分, 全部答对的给5分。

(10) i 是虚数单位, 则 $\frac{3-i}{1+i}$ 的值为 _____。

(11) 在 $\left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数是 _____。

(12) 设 $m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$, 若直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切, 则 $m =$ _____。

(13) 某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛。已知这5名学生中有高一年级学生2名, 高二年级学生2名, 高三年级学生1名, 则所选3人分别来自不同年级的概率为 _____。记所选3人中高一年级学生的人数为 X , 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____。

(14) 已知正实数 x, y 满足 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$, 则 $x + y$ 的最小值是 _____。

(15) 如图所示, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为2, 线段 AD, BE, CF 交于点 O , 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}| =$ _____; 若点 M 是线段 BE 上一点, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FM}\right) = -2$, 则 $|\overrightarrow{OM}| =$ _____。



(7) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于点 A , 点 B 是抛物线的准线上一点, 抛物线的焦点 F 为双曲线的一个焦点, 且 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则双曲线的方程为 ()。

(A) $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$

(B) $\frac{7x^2}{4} - \frac{7y^2}{3} = 1$

(C) $\frac{3x^2}{7} - \frac{4y^2}{7} = 1$

(D) $\frac{7x^2}{12} - \frac{7y^2}{16} = 1$

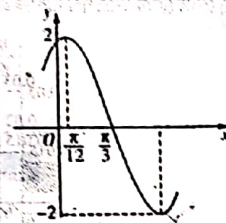
(8) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$ 。给出下列结论:

① ω 的值为2;

② φ 的值为 $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$;

③ 直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴;

④ 函数 $f(x)$ 的解析式可表示为 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。



其中所有正确结论的序号是 ()。

(A) ① ②

(B) ① ④

(C) ① ② ③

(D) ① ② ④

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $-1 \leq x < 1$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Z}, \\ e^x, & x \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{函数 } g(x) = \begin{cases} |\log_a x|, & x > 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 恰有5个互异的实数解, 则实数 a 的取值范围是 ()。

(A) $(7, 9]$

(B) $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right) \cup (7, 9]$

(C) $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 11]$

(D) $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 10) \cup (10, 11]$

三、解答题：本大题共5小题，共75分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(16) (本小题满分14分)

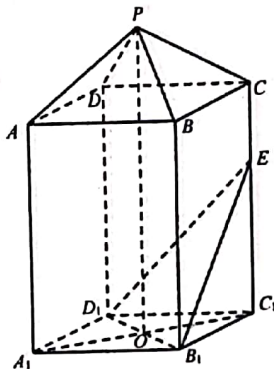
已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\tan B=1$ ， $a=\sqrt{2}$ ， $b=3$ 。

- (I) 求 $\sin A$ ；
 (II) 求 $\cos(2A-B)$ ；
 (III) 求 c 的长。

(17) (本小题满分15分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 和四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 组合而成的几何体中，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形， A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O ， $PO \parallel AA_1$ ，点 E 是棱 CC_1 上一点， $AA_1=3$ ， $CE=1$ 。

- (I) 证明： $PA \perp B_1D_1$ ；
 (II) 求二面角 $B_1-D_1E-C_1$ 的正弦值；
 (III) 若直线 $PA \parallel$ 平面 B_1D_1E ，求直线 PA 和 B_1E 所成角的余弦值。



(18) (本小题满分15分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F ，点 $A(-a, 0)$ 与点 $B(0, b)$ 是椭圆的顶点， $|BF| = \frac{2}{3}|AF|$ 。

- (I) 求椭圆 C 的离心率 e ；
 (II) 设以离心率 e 为斜率的直线 l 经过点 A ，与椭圆 C 相交于点 P (点 P 不在坐标轴上)。
 (i) 证明：点 F 在以线段 AP 为直径的圆上；
 (ii) 若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 8$ ，求椭圆 C 的方程。

(19) (本小题满分15分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列， $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $\frac{1}{a_1}$ ， $2S_2$ ， $8a_3$ 成等差数列， $3a_2 = a_1 + 2a_3$ 。数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，满足 $T_n = n^2 + n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 若 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 是奇数,} \\ (3n+8)a_n, & n \text{ 是偶数,} \end{cases}$ 求 $\sum_{i=1}^{2n} c_i$ 。

(20) (本小题满分16分)

已知函数 $f(x) = e^x$ ， $g(x) = x^n + 1$ ， $h(x) = f(x) - a \cdot g(x)$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

- (I) 当 $n=1$ 时，讨论函数 $h(x)$ 的单调性；
 (II) 当 $n=2$ 时。
 (i) 若 $x \in [0, +\infty)$ 时， $h(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围；
 (ii) 直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 $A(x_1, f(x_1))$ ，与曲线 $y = g(x)$ 相切于点 $B(x_2, f(x_2))$ ，证明： $x_1 + x_2 < \frac{1}{2}$ 。