

2023 年天津高考模拟试题分类二三模大题答案

1. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $ab = 0$ ”是“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”的(

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件 【答案】B

【分析】根据函数奇偶性的定义和性质得出“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”的等价条件, 再根据“ $ab = 0$ ”
 $\Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$; 由充分必要条件的定义即可得到结论. 【详解】解: 函数的定义域为 $\mathbf{R}$,
 若函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 为奇函数, 则 $f(0) = b = 0$, 当 $b = 0$ 时, $f(x) = x|x + a|$, 若为奇函数,
 则 $f(-x) = -x|-x + a| = -f(x) = -x|x + a|$, 即 $|x - a| = |x + a|$, $\therefore a = 0$,
 即函数 $f(x) = -x|x + a| + b$ 为奇函数的充要条件是 $a = b = 0$, $\because ab = 0$, $\therefore a = 0$ 或 $b = 0$,
 $\therefore$ “ $ab = 0$ ”推不出“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”, “函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”可以得到“ $ab = 0$ ”;
 则“ $ab = 0$ ”是“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”的必要不充分条件.

2. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?”意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯

A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏 【答案】B

【详解】设塔顶的 a_1 盏灯, 由题意 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, $\therefore S_7 = \frac{a_1(1 - 2^7)}{1 - 2} = 381$, 解得 $a_1 = 3$.

3. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 且函数 $g(x)$ 的最大负零点在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上, 则 φ 的取值范围是

A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 【答案】D

【分析】利用函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后, 得到函数 $g(x)$ 的图象的位置特征, 列出关于 φ 的关系式, 最后确定取值范围.

【详解】函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 所以 $g(x) = \sin(2x - 2\varphi)$,

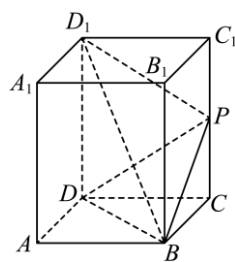
$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow (2x - 2\varphi) \in [-2\varphi, \frac{\pi}{3} - 2\varphi]$, $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 所以有 $\begin{cases} \frac{\pi}{3} - 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ -2\varphi \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ①; 当

$2x - 2\varphi = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2}k\pi + \varphi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, 函数 $g(x) = 0$, 而 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $g(x)$ 的最大负零点为 $x = -\frac{1}{2}\pi + \varphi$, 它在区

间 $\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上, 所以有 $-\frac{\pi}{3} < -\frac{1}{2}\pi + \varphi < -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3}$ ②, 结合①②, φ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 故本题选 D.

4. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧棱 CC_1 上

一点，且 $C_1P = 2PC$. 设三棱锥 $P - D_1DB$ 的体积为 V_1 , 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 则 $\frac{V_1}{V}$ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$ 【答案】C

【分析】根据给定的几何体，利用等体积法及锥体体积、柱体体积公式计算作答.

【详解】在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是侧棱 CC_1 上一点，

$$\text{则 } V_1 = V_{P-D_1DB} = V_{B-D_1DP} = \frac{1}{3} S_{\triangle D_1DP} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} DD_1 \cdot CD \cdot BC = \frac{1}{6} V, \text{ 所以 } \frac{V_1}{V} \text{ 的值为 } \frac{1}{6}.$$

5. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与抛物线

$E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线分别交于 A, B 两点，若抛物线的焦点为 F ，且 $FA \perp FB$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$ 【答案】D

【分析】双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，与抛物线的准线方程 $x = -\frac{p}{2}$ 联立，求出 A, B 两点的坐标，由 $FA \perp FB$ ，得 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ，结合 $c^2 = a^2 + b^2$ 计算得解.

【详解】解：∵ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，∴ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，又∵ $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程

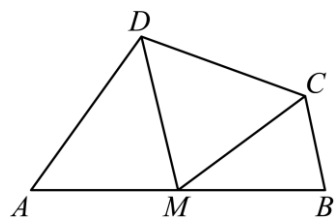
是 $x = -\frac{p}{2}$ ，∴ A, B 两点的纵坐标分别是 $y = \pm \frac{pb}{2a}$ ，

不妨设 A 在 B 上方，则 $A\left(-\frac{p}{2}, \frac{pb}{2a}\right)$ ， $B\left(-\frac{p}{2}, -\frac{pb}{2a}\right)$ ， $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，∴ $\overrightarrow{FA} = \left(-p, \frac{pb}{2a}\right)$ ， $\overrightarrow{FB} = \left(-p, -\frac{pb}{2a}\right)$ ，

又∵ $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ，∴ $p^2 - \frac{p^2 b^2}{4a^2} = 0$ ，即 $b^2 = 4a^2$ ，∴ $c^2 - a^2 = 4a^2$ ，∴ $c^2 = 5a^2$ ，∴ $e = \sqrt{5}$. 故选：D.

6. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， M 为 AB 的中点，且 $AB = 2$ ，

$MC = MD = CD = 1$. 若点 N 在线段 CD (端点除外) 上运动，则 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB}$ 的取值范围是 ()

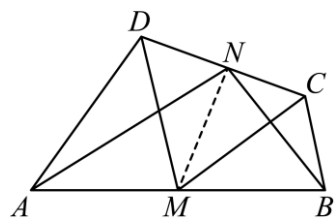


- A. $\left[-\frac{1}{4}, 0\right)$ B. $\left[\frac{3}{4}, 0\right)$ C. $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ D. $\left[-\frac{3}{4}, 0\right)$

【答案】A

【分析】连接 MN ，求出 $|NM|$ 的范围，再利用向量线性运算及数量积运算律求解作答.

【详解】连接 MN ，如图，点 N 在线段 CD (端点除外) 上运动，



因为 $MC = MD = CD = 1$ ，即 $\triangle MCD$ 是正三角形，于是 $\frac{\sqrt{3}}{2} < |NM| < 1$ ，而 M 为 AB 的中点，且 $|MA| = 1$ ，

所以 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{NM}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = \left[-\frac{1}{4}, 0\right)$. 故选：A

【点睛】关键点睛：涉及定长的线段两端点为向量端点的向量数量积，取线段的中点，借助向量数量积的计算公式

7. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 已知 $a > 1$, $b > 1$, 且 $\log_2 \sqrt{a} = \log_b 4$, 则 ab 的最小值为 _____ . 【答案】 16

【分析】 根据给定条件, 利用换底公式变形, 再利用均值不等式求解作答.

【详解】 因为 $a > 1$, $b > 1$, 则 $\log_2 a > 0, \log_2 b > 0$, 由 $\log_2 \sqrt{a} = \log_b 4$, 得 $\frac{1}{2} \log_2 a = \frac{2}{\log_2 b}$, 则有 $4 = \log_2 a \cdot \log_2 b \leq \left(\frac{\log_2 a + \log_2 b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (\log_2 ab)^2$, 当且仅当 $\log_2 a = \log_2 b$, 即 $a = b = 4$ 时取等号, 于是 $\log_2 ab \geq 4$, $ab \geq 16$, 所以当 $a = b = 4$ 时, ab 取得最小值 16. 故答案为: 16

8. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 已知直线 $l: y = kx$ 被圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $k =$ _____, 圆 C 上到直线 l 的距离为 1 的点有 _____ 个. 【答案】 $-\frac{3}{4}$ 3

【解析】 利用点到直线的距离公式求出圆心到直线 l 的距离 d , 再根据弦长公式求出 d , 解方程求得 k 值,

【详解】 解: 由题意得: 圆心 $C(1, -2)$, 则圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{4-(\sqrt{3})^2}$, 解得 $k = -\frac{3}{4}$; 因为 $d = 1$, $r = 2$, 则圆 C 上到直线 l 的距离为 1 的点应有 3 个. 故答案为: $-\frac{3}{4}$; 3.

9. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, 且 $2b \cos C = 2a + c$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $2\sqrt{3} \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{11}{13}$, 求 $\cos C$ 的值. 【答案】 (1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$

【详解】 (1) $\because \triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, 且 $2b \cos C = 2a + c$.

$\therefore$ 由余弦定理得 $2b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 2a + c$, 整理得 $b^2 = a^2 + c^2 + ac$, $\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}$,

$\because B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $2\sqrt{3} \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{11}{13}$, $\therefore \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{24}{13}$,

$\therefore 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{24}{13}$, 即 $2 \sin\left(A + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{24}{13}$, 所以 $\cos A = \frac{12}{13}$,

又 $A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{5}{13}$, $\because B = \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore \cos C = \cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos A + \sin \frac{\pi}{3} \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{13} = \frac{12+5\sqrt{3}}{26}$.

10. (2023 天津河北 统考二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c \sin \frac{B+C}{2} = a \sin C$.

(1) 求角 A 的大小; (2) 若 $b = 2$, $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 求边 c 及 $\sin(2B + A)$ 的值. 【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

【详解】 (1) 根据正弦定理,

由 $c \sin \frac{B+C}{2} = a \sin C$ 可得 $\sin C \sin \frac{B+C}{2} = \sin A \sin C$. 即 $\sin C \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin A \sin C$, $\sin C \cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin C$,

因为 $0 < C < \pi, 0 < A < \pi$, 所以 $\sin C > 0, 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}, \cos \frac{A}{2} > 0$.

所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$, $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$, 解得 $a = \sqrt{7}$,

根据余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $7 = 4 + c^2 - 2c$, $c^2 - 2c - 3 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去)

故 $c = 3$. 因为 $b < a$, 所以 $B < A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2 = \frac{1}{7}$,

所以 $\sin(2B + A) = \sin 2B \cos A + \cos 2B \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

11. (2023 天津南开 统考二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{15}b \cos A + a \sin B = 0$, $a = 2\sqrt{6}$, $b = 4$. (1) 求 $\cos A$ 的值; (2) 求 c 的值; (3) 求 $\cos(2A + B)$ 的值. 【答案】(1) $-\frac{1}{4}$ (2) 2 (3) $-\frac{\sqrt{6}}{16}$

【详解】(1) 由 $\sqrt{15}b \cos A + a \sin B = 0$ 及正弦定理, 得 $\sqrt{15} \sin B \cos A + \sin A \sin B = 0$, 因为 $B \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$,

所以 $\sin A = -\sqrt{15} \cos A$, 且 $\cos A < 0$. 又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 可得 $\cos A = -\frac{1}{4}$. (2) 因为 $a = 2\sqrt{6}$, $b = 4$

由余弦定理, 得 $(2\sqrt{6})^2 = 4^2 + c^2 + 2c$, 即 $c^2 + 2c - 8 = 0$, 解得 $c = 2$ (负值舍去).

(3) 由 (1) 及 $\sqrt{15}b \cos A + a \sin B = 0$, $a = 2\sqrt{6}$, $b = 4$, 得 $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 从而 $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

由 (1) 得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = -\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = -\frac{7}{8}$,

所以 $\cos(2A + B) = \cos 2A \cos B - \sin 2A \sin B = \left(-\frac{7}{8}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right) \times \frac{\sqrt{10}}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{16}$.

12. (2023 天津红桥 统考二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b \sin A = 3c \sin B$, $a = 3$, $\cos B = \frac{2}{3}$. (I) 求 b 的值; (II) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(I) $b = \sqrt{6}$ (II) $\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}$

【详解】(I) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 可得, $b \sin A = a \sin B$, 又由 $b \sin A = 3c \sin B$,

可得 $a = 3c$, 又 $a = 3$, 故 $c = 1$, 由 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $\cos B = \frac{2}{3}$, 可得 $b = \sqrt{6}$.

(II) 由 $\cos B = \frac{2}{3}$ 得, $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 进而得 $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = \frac{1}{9}$, $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{5}}{9}$,

所以 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}$.

本题第 (I) 问, 因为 $b \sin A = 3c \sin B$, 所以由边角互化结合余弦定理即可求出边 b ; 第 (II) 问, 由平方关系、二倍角公式、两角差的正弦公式可以求出结果. 在解三角形中, 遇到边角混和式, 常常想边角互化. 对三角函数及解三角形的题目, 熟练三角部分的公式是解答好本类题的关键, 日常复习中加强基本题型的训练.

13. (2023 天津·二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值; (2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围. 【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

【分析】(1) 利用余弦定理将已知 $2a - c = 2b \cos C$ 化简整理得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 可得角 $B, A + C$, 代入所求可得答案.

(2) 利用正弦定理和两角和差公式以及辅助角公式化简 $c - a = 2 \sin(C - 60^\circ)$, 根据 $0^\circ < C < 120^\circ$ 求解可得结果.

【详解】(1) 因为 $2a - c = 2b \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \times 2b$, 整理可得, $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

由余弦定理可得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 故 $B = 60^\circ$, $A + C = 120^\circ$, 所以 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) 由正弦定理可得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$, 所以 $a = 2 \sin A$, $c = 2 \sin C$, 所以

$$c - a = 2 \sin C - 2 \sin A = 2 \sin C - 2 \sin(120^\circ - C) = 2 \sin C - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C \right)$$

$$= \sin C - \sqrt{3} \cos C = 2 \sin(C - 60^\circ), \text{ 因为 } 0^\circ < C < 120^\circ, \text{ 所以 } -60^\circ < C - 60^\circ < 60^\circ, \text{ 所以 } -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(C - 60^\circ) < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $-\sqrt{3} < c - a < \sqrt{3}$, 所以取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

14. (2023 天津 统考二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $c = \sqrt{2}$, $\cos C = \frac{3}{4}$, $2c \sin A = b \sin C$.

(1) 求 b 的值; (2) 求 $\sin A$ 的值; (3) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(1) $b = 2$ (2) $\sin A = \frac{\sqrt{14}}{8}$ (3) $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{7} + 9\sqrt{3}}{32}$

【详解】(1) 解: 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $2c \sin A = b \sin C$ 可得 $bc = 2ac$, 则 $b = 2a$,

由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 5a^2 - 4a^2 \times \frac{3}{4} = 2a^2 = 2$, 可得 $a = 1$, 故 $b = 2a = 2$.

(2) 解: 因为 $0 < C < \pi$, $\cos C = \frac{3}{4}$, 则 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 可得 $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$.

(3) 解: 由 (1) 可知 $a < b$, 则 $A < B$, 故 A 为锐角, 所以, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$,

所以, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{14}}{8} \times \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16}$,

所以, $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{7} + 9\sqrt{3}}{32}$.

15. (2023 天津 校联考二模) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(2a - \sqrt{3}c) \cos B = \sqrt{3}b \cos C$.

(1)求 B ; (2)若 $b = 3$, $\sin C = \sqrt{3} \sin A$, 求 a , c ; (3)若 $b = \sqrt{2}a$, 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right)$.

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $a = 3$, $c = 3\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{8}$

【分析】(1) 由正弦边化角及三角恒等变换可得 $2 \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin A$, 结合三角形内角性质求 B ;

(2) 由正弦角化边及余弦定理列方程求 a , c ;

(3) 由题设及 (1) 得 $\sin A = \frac{\sin B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 注意 A 为锐角, 应用倍角正余弦、差角正弦公式求目标式的值.

【详解】(1) 由题设及正弦边角关系得: $(2 \sin A - \sqrt{3} \sin C) \cos B = \sqrt{3} \sin B \cos C$,

$\Rightarrow 2 \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin C \cos B + \sqrt{3} \sin B \cos C = \sqrt{3} \sin(B + C) = \sqrt{3} \sin A$, 显然 $\sin A \neq 0$, 则 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$,

故 $B = \frac{\pi}{6}$;

(2) 由 $C = \sqrt{3}A$, 则 $c = \sqrt{3}a$ ①, 由 (1) 得: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - 9}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ②, 由①②得: $a = 3$, $c = 3\sqrt{3}$;

(3) 由正弦定理得: $\sin B = \sqrt{2} \sin A$, 则 $\sin A = \frac{\sin B}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\because b = \sqrt{2}a$, 即 $b > a$, 则 $B > A$, 故 A 为锐角, $\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$,

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4}$,

$\therefore \sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{8}$.

16. (2023 天津河西 统考二模) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 满足 $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$.

(1)求角 A 的值; (2)若 $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, (i) 求 $\sin B$ 的值; (ii) 求 $\cos(2B - A)$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{-1 + 2\sqrt{6}}{6}$

【分析】(1) 由正弦定理化简已知式可得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 由余弦定理即可求出 $A = \frac{\pi}{3}$;

(2) (i) 由正弦定理可求出 $\sin B$ 的值; (ii) 由同角三角函数的基本关系可求出 $\cos B$, 再由二倍角的正弦和余弦公式求出 $\cos 2B$, $\sin 2B$, 最后由两角差的余弦公式求出 $\cos(2B - A)$ 的值.

【详解】(1) 由正弦定理得: $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{c}{a+b}$, 化简得: $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

由余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) (i) 由 (1) 知, $A = \frac{\pi}{3}$, 又 $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, 由正弦定理可得: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

(ii) 因为 $b < a$, 所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = -\frac{1}{3}$,
 所以 $\cos(2B - A) = \cos\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2B \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2B \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{6}}{6}$.

17. (2023 天津河东 统考二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且 $b - c = 1$, $\cos A = \frac{2}{3}$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{5}$.

(1) 求边 a 及 $\sin B$ 的值; (2) 求 $\cos\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值. 【答案】(1) $a = \sqrt{5}$, $\sin B = 1$ (2) $\frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{5}}{18}$

【分析】(1) 先由 $\cos A$ 求得 $\sin A$, 结合三角形面积公式可得 $bc = 6$, 根据条件可得 b, c 的值, 再利用余弦定理求得 a , 利用正弦定理求得 $\sin B$;

(2) 由 (1) 可知 $B = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin C = \cos A = \frac{2}{3}$, $\cos C = \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 再结合二倍角公式和差角公式求解即可.

【详解】(1) 因为 $\cos A = \frac{2}{3}$, $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{5}$, 所以 $bc = 6$, 又 $b - c = 1$, 所以 $b = 3$, $c = 2$,

所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A} = \sqrt{9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{5}$, 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{\sin B}$, 所以 $\sin B = 1$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 (1) 可知 $B = \frac{\pi}{2}$, 则 $A + C = \frac{\pi}{2}$,

所以 $\sin C = \cos A = \frac{2}{3}$, $\cos C = \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = \frac{1}{9}$,

所以 $\cos\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2C \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2C \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{5}}{18}$.

18. (2023 天津北辰 统考三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 满足 $(2a - c)\cos B = b \cos C$.

(1) 求角 B 的大小; (2) 设 $a = 4$, $b = 2\sqrt{7}$. (i) 求 c 的值; (ii) 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) (i) $c = 6$; (ii) $-\frac{5\sqrt{3}}{14}$

【详解】(1) 由 $(2a - c)\cos B = b \cos C$, 根据正弦定理得, $(2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B \cos C$,

可得 $2\sin A \cos B = \sin(B + C) = \sin A$, 因为 $0 < A < \pi$, 故 $\sin A \neq 0$, 则 $\cos B = \frac{1}{2}$,

又 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $B = \frac{\pi}{3}$, 且 $a = 4$, $b = 2\sqrt{7}$,

(i) 则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{16 + c^2 - 28}{2 \times 4 \times c}$, 解得 $c = -2$ (舍), $c = 6$. 故 $c = 6$.

(ii) 由 $(2a - c)\cos B = b \cos C$, 得 $(2 \times 4 - 6) \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{7} \cos C$, 解得 $\cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}$, 则 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

则 $\sin 2C = 2\sin C \cos C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{13}{14}$,

$$\text{则 } \sin(2C+B) = \sin 2C \cos B + \cos 2C \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{13}{14}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

19. (2023 天津和平 统考三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\tan B = \sqrt{3}, \cos C = \frac{1}{3}$, 且 $b = 3\sqrt{6}$.

(1) 求 $\cos A$ 的值; (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积; (3) 求 $\sin\left(4B + \frac{C}{2}\right)$. 【答案】(1) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$ (2) $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ (3) $-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

【详解】(1) 因为 $0 < C < \pi, 0 < B < \pi \therefore \tan B = \sqrt{3}, \therefore B = \frac{\pi}{3}, \therefore \cos C = \frac{1}{3}, \sin^2 C + \cos^2 C = 1, \therefore \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore \cos A = -\cos(B+C) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + C\right) = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}$$

$$(2) \text{ 由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 可得 } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{3\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$$

$$\therefore \sin A = \sin(B+C) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}.$$

$$(3) \because \cos C = \frac{1}{3}, \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1 = \frac{1}{3}, 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \therefore \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin\left(4B + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{C}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{C}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

20. (2023 天津 三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 若 $a = \sqrt{7}, c = \sqrt{3}$, 求 b 的值; (2) 若角 A 的平分线交 BC 于点 D , $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}, a=2$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】(1) $b=4$; (2) $\frac{20+8\sqrt{3}}{39}$.

【分析】(1) 由 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 求出 $A = \frac{\pi}{6}$, 再根据余弦定理可求出 b ;

(2) 根据 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$ 得到 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{2}$, 根据角平分线定理得到 $b = 2c$, 根据余弦定理求出 c^2 , 根据三角形面积公式

求出 $S_{\triangle ABC}$, 从而可得 $S_{\triangle ACD}$.

【详解】(1) 因为 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 所以 $7 = b^2 + 3 - 2\sqrt{3}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $b^2 - 3b - 4 = 0$, 解得 $b=4$ 或 $b=-1$ (舍),

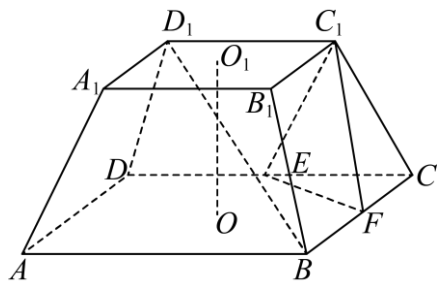
(2) 因为 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$, 因为 $\angle CAD = \angle BAD$, 所以 $\frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$,

即 $b = 2c$, 又因为 $a=2$, 由余弦定理得 $a^2 = c^2 + 4c^2 - 4c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$, 解得 $c^2 = \frac{4}{5-2\sqrt{3}}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} c^2 = \frac{2}{5-2\sqrt{3}}, \text{ 所以 } S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5-2\sqrt{3}} = \frac{20+8\sqrt{3}}{39}.$$

【点睛】关键点睛: 熟练掌握余弦定理、三角形的面积公式是解题关键.

21. (2023 天津和平 统考三模) 如图, 四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面均是正方形, 且侧面是全等的等腰梯形, $AB = 2A_1B_1 = 4$, E, F 分别为 DC, BC 的中点, 上下底面中心的连线 O_1O 垂直于上下底面, 且 O_1O 与侧棱所在直线所成的角为 45° .



(1) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 C_1EF ;

(2) 求点 A_1 到平面 C_1EF 的距离;

(3) 边 BC 上是否存在点 M , 使得直线 A_1M 与平面 C_1EF 所成的角的正弦值为

$\frac{3\sqrt{22}}{22}$, 若存在, 求出线段 BM 的长; 若不存在, 请说明理由. 【答案】(1) 详见解析; (2) $2\sqrt{2}$; (3) 存在点 M , 此时 $BM = 1$

【详解】(1) 因为 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 以点 O 为坐标原点, DA, OF, OO_1 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为侧棱所在直线与上下底面中心的连线 OO_1 所成的角为 45° , 则

$B(2, 2, 0)$, $D_1(-1, -1, \sqrt{2})$, $C_1(-1, 1, \sqrt{2})$, $F(0, 2, 0)$, $E(-2, 0, 0)$, $A_1(1, -1, \sqrt{2})$

所以 $\overrightarrow{BD_1} = (-3, -3, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CE_1} = (-1, -1, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{EF} = (2, 2, 0)$

设平面 C_1EF 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE_1} = x + y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则 $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

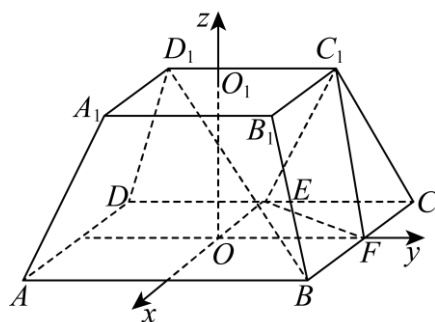
因为 $\overrightarrow{BD_1} = (-3, -3, \sqrt{2})$, 所以 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0$, 所以 $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD_1}$, 又因为 $BD_1 \not\subset$ 平面 C_1EF , 所以 $BD_1 \parallel$ 平面 C_1EF .

(2) 由 (1) 知, $\overrightarrow{A_1E} = (-3, 1, -\sqrt{2})$, 所以点 A_1 到平面 C_1EF 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{A_1E} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

(3) 假设边 BC 上存在点 $M(x, 2, 0)$ 满足条件, $x \in [-2, 2]$, 则 $\overrightarrow{A_1M} = (x-1, 3, -\sqrt{2})$,

设直线 A_1M 与平面 C_1EF 所成角为 θ , 由题意可得 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1M} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1M}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|x-4|}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 - 2x + 12}} = \frac{3\sqrt{22}}{22}$,

化简得 $x^2 - 35x + 34 = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 34$ (舍去), 即存在点 M 符合题意, 此时 $BM = 1$.



22. (2023 天津北辰 统考三模) 如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC ,

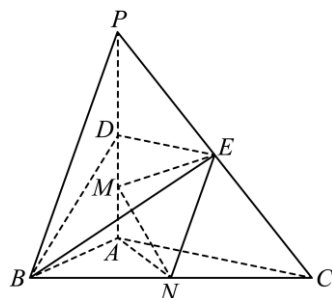
$\angle BAC = 90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点,

$PA = AC = 2$, $AB = 1$.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BDE ;

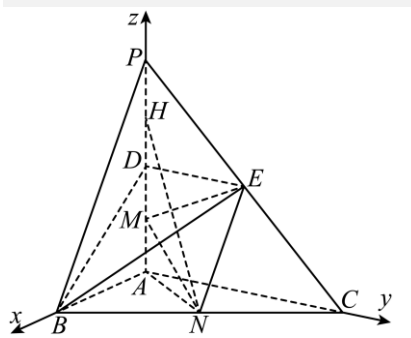
(2) 求点 N 到直线 ME 的距离;

(3) 在线段 PA 上是否存在一点 H , 使得直线 NH 与平面 MNE 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{21}$, 若存在, 求出线段 AH 的值,



若不存在，说明理由. 【答案】(1)证明见解析(2) $\frac{\sqrt{105}}{10}$ (3) $\frac{3}{2}$

【详解】(1) 因为 $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，建立空间直角坐标系如图所示，



则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,2,0), D(0,0,1), E(0,1,1), M(0,0,\frac{1}{2}), N(\frac{1}{2},1,0), P(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{DE} = (0,1,0), \overrightarrow{DB} = (1,0,-1)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, 不妨设 $z = 1$, 可得 $\vec{n} = (1, 0, 1)$, 又 $\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$,

可得 $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0$, 因为 $MN \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE ,

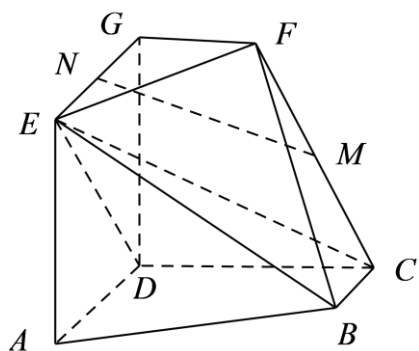
(2) 因为 $\overrightarrow{ME} = (0, 1, \frac{1}{2})$, 所以点 N 到直线 ME 的距离 $d = \sqrt{(\overrightarrow{MN})^2 - \left(\frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{ME}}{|\overrightarrow{ME}|} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^2}{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{105}}{10}$.

(3) 设 $H(0,0,t)$, $t \in [0,2]$, 则 $\overrightarrow{NH} = (-\frac{1}{2}, -1, t)$, 设平面 MNE 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{ME} = b + \frac{1}{2}c = 0 \end{cases}$ 令 $b = 1$, 则 $\vec{m} = (-4, 1, -2)$, 所以 $|\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{NH} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{NH}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{NH}|} = \frac{|1 - 2t|}{\sqrt{5 + t^2} \times \sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{6}}{21}$,

即 $20t^2 - 28t - 3 = 0$, 解得 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = -\frac{1}{10}$ (舍去), 所以 $AH = \frac{3}{2}$.

23. (2023 天津河东 统考二模) 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$. $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.



(1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求平面 EBC 与平面 BCF 的夹角的正弦值;

(3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.

【答案】(1)见解析(2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【详解】(1) 证明: 因为 $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA, DC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DG \perp DA, DG \perp DC$, 因为 $AD \perp CD$, 所以 DA, DC, DG 两两垂直,

所以以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向的空间直角坐标系 (如图), 则 $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0), E(2, 0, 2), F(0, 1, 2), G(0, 0, 2), M(0, \frac{3}{2}, 1), N(1, 0, 2)$. 所以 $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DE} = (2, 0, 2)$.

设 $\vec{n}_0 = (x, y, z)$ 为平面 CDE 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n}_0 \cdot \vec{DC} = 2y = 0 \\ \vec{n}_0 \cdot \vec{DE} = 2x + 2z = 0 \end{cases}$, 令 $z = -1$, 则 $\vec{n}_0 = (1, 0, -1)$.

因为 $\vec{MN} = (1, -\frac{3}{2}, 1)$, 所以 $\vec{MN} \cdot \vec{n}_0 = 1 - 1 = 0$, 因为直线 $MN \not\subset$ 平面 CDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 CDE .

(2) 解: 依题意, 可得 $\vec{BC} = (-1, 0, 0)$, $\vec{BE} = (1, 2, 2)$, $\vec{CF} = (0, -1, 2)$.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BCE 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = -x = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$, 令 $z = 1$, 则 $\vec{n} = (0, 1, 1)$,

设 $\vec{m} = (a, b, c)$ 为平面 BCF 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC} = -a = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CF} = -b + 2c = 0 \end{cases}$, 令 $c = 1$, 则 $\vec{m} = (0, 2, 1)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2+1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以平面 } EBC \text{ 与平面 } BCF \text{ 的夹角的正弦值为 } \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} = \sqrt{1 - \frac{90}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

(3) 解: 设线段 DP 的长为 h ($h \in [0, 2]$), 则点 P 的坐标为 $(0, 0, h)$, 可得 $\vec{BP} = (-1, -2, h)$.

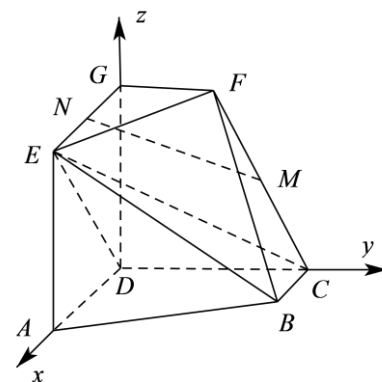
因为 $AD \perp CD$, $DG \cap DA = D, DG \perp DC$, 所以 $DC \perp$ 平面 $ADGE$

所以 $\vec{DC} = (0, 2, 0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量,

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \vec{BP}, \vec{DC} \rangle \right| = \frac{|\vec{BP} \cdot \vec{DC}|}{|\vec{BP}| |\vec{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}}, \text{ 由题意, 可得 } \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

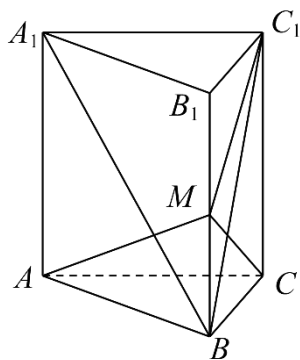
$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2].$$

$$\text{所以线段 } DP \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



24. (2023 天津河西 统考二模) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, M 为棱 BB_1 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$CC_1 = AC = 2BC = 2.$$



(1) 求证: $C_1M \perp$ 平面 AMC ;

(2) 求异面直线 AM 与 BC_1 所成角的余弦值;

(3) 求平面 AMC 与平面 A_1BC_1 的夹角的余弦值. 【答案】(1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{30}}{30}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】(1) 建立空间直角坐标系, 得到各点坐标, 确定 $\vec{C_1M} \perp \vec{CA}$, $\vec{C_1M} \perp \vec{CM}$, 得到

证明.

(2) 确定 $\overrightarrow{AM} = (-2, 1, 1)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0, -1, 2)$, 根据向量的夹角公式计算得到答案.

(3) 确定平面 AMC 的法向量和平面 A_1BC_1 的法向量, 根据向量的夹角公式计算得到答案.

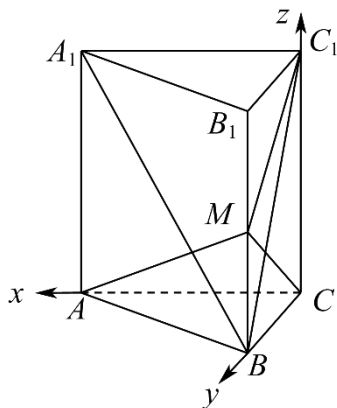
【详解】(1) 如图所示: 以 CA, CB, CC_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $C_1(0, 0, 2)$, $M(0, 1, 1)$,

则 $\overrightarrow{C_1M} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{CM} = (0, 1, 1)$,

则 $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{CA} = (0, 1, -1) \cdot (2, 0, 0) = 0$, $\overrightarrow{C_1M} \perp \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{CM} = (0, 1, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0$, $\overrightarrow{C_1M} \perp \overrightarrow{CM}$.

$CA \cap CM = C$, $CA, CM \subset$ 平面 AMC , 故 $\overrightarrow{C_1M} \perp$ 平面 AMC .



(2) $\overrightarrow{AM} = (-2, 1, 1)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0, -1, 2)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{0 - 1 + 2}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$.

故异面直线 AM 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{30}$.

(3) 设平面 AMC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CA} = 2x = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CM} = y + z = 0 \end{cases}$,

取 $y = 1$ 得到 $\vec{n}_1 = (0, 1, -1)$;

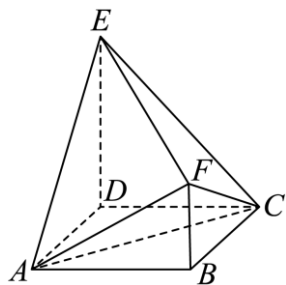
设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\vec{n}_2 = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = 2a = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{C_1B} = b - 2c = 0 \end{cases}$,

取 $c = 1$ 得到 $\vec{n}_2 = (0, 2, 1)$;

平面 AMC 与平面 A_1BC_1 的夹角的余弦值为 $\left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

25. (2023 天津 统考二模) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $DE \parallel BF$,

$AD = DE = 2$, $BF = \frac{1}{2}$.



(1) 求证: $AC \perp EF$;

(2) 求直线 EC 与平面 ACF 所成角的正弦值;

(3) 在线段 DE 上是否存在点 G , 使得直线 BG 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 若存在, 求出点 G 到平面 ACF 的距离, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{5}{6}$ (3) $\sqrt{2}$

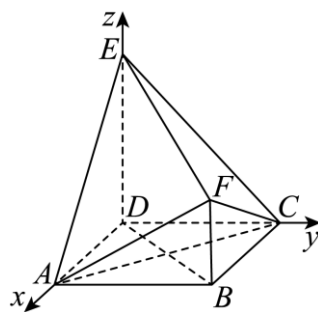
【详解】(1) 依题意, 以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 可

得 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), E(0,0,2), F\left(2,2,\frac{1}{2}\right)$.

依题意, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{EF} = \left(2, 2, -\frac{3}{2}\right)$, 从而 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = -2 \times 2 + 2 \times 2 + 0 = 0$, 所以

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{EF}$, 即 $AC \perp EF$

(2) 依题意, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AF} = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$,

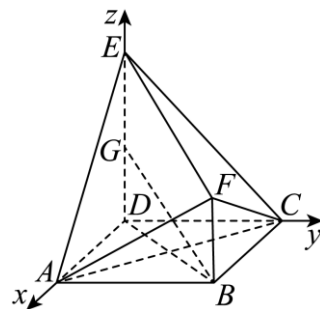


设 $n = (x, y, z)$ 为平面 ACF 的法向量, 则
$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases},$$

不妨设 $x = 1$. 可得 $\vec{n} = (1, 1, -4)$, 因为 $\overrightarrow{EC} = (0, 2, -2)$,

设直线 EC 与平面 ACF 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{EC}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{10}{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} \right| = \frac{5}{6}$,

所以直线 EC 与平面 ACF 所成角的正弦值为 $\frac{5}{6}$.



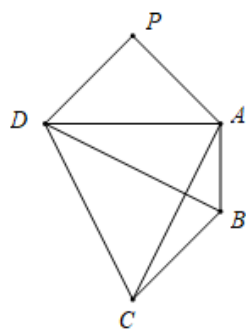
(3) 假设线段 DE 上存在一点 $G(0,0,h)$, 使得直线 BG 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 则 $\overrightarrow{BG} = (-2, -2, h)$.

依题意 $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$ 则, $\left| \cos \langle \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{AD} \rangle \right| = \left| \frac{4}{\sqrt{8+h^2} \times 2} \right| = \frac{2}{3}$, 解得 $h = 1$. 所有存在点 $G(0,0,1)$ 满足条件,

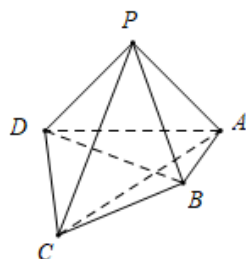
所以可得 $\overrightarrow{AG} = (-2, 0, 1)$, 由 (2) 可知平面 ACF 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 1, -4)$, 所以点 G 到平面 ACF 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(-2, 0, 1) \cdot (1, 1, -4)|}{|3\sqrt{2}|} = \sqrt{2}$$

26. (2023 天津二模) 如图甲所示的平面五边形 $PABCD$ 中, $PD = PA$, $AC = CD = BD = \sqrt{5}$, $AB = 1$, $AD = 2$,



图甲



图乙

$PD \perp PA$, 现将图甲所示中的 $\triangle PAD$ 沿 AD 边折起, 使平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得如图乙所示的四棱锥 $P-ABCD$. 在如图乙所示中,

(1) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的大小;

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M 使得 BM 与平面 PCB 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{3}$? 并说明理由.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{5\pi}{6}$; (3) 存在, 理由见解析.

【详解】(1) $\because AB=1, AD=2, BD=\sqrt{5}, \therefore AB^2+AD^2=BD^2, \therefore AB \perp AD,$

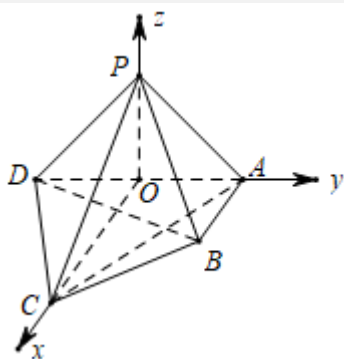
$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD , 又 $\because PD \subset$ 平面 $PAD,$
 $\therefore AB \perp PD$, 又 $\because PD \perp PA, PA \cap AB = A, \therefore PD \perp$ 平面 PAB .

(2) 取 AD 的中点 O , 连结 OP, OC ,

由平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 由 $AC=CD$ 知 $OC \perp OA$,

以 O 为坐标原点, OC 所在的直线为 x 轴, OA 所在的直线为 y 轴建立空间直角坐标系

如图所示,



则易得 $C(2,0,0), P(0,0,1), D(0,-1,0), A(0,1,0), B(1,1,0),$

$\therefore PB=(1,1,-1), PC=(2,0,-1), PD=(0,-1,-1)$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c),$

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{PC} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a+b-c=0 \\ 2a-c=0 \end{cases}$, 令 $a=1$ 得 $b=1, c=2, \therefore \vec{m}=(1,1,2),$

设二面角 $A-PB-C$ 大小为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{DP}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{DP}|} = \frac{-1-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \because 0 \leq \theta \leq \pi,$

$\therefore$ 二面角 $A-PB-C$ 的大小 $\theta = \frac{5\pi}{6}.$

(3) 假设点 M 存在, 其坐标为 $(x,y,z), BM$ 与平面 PBC 所成的角为 $\alpha,$

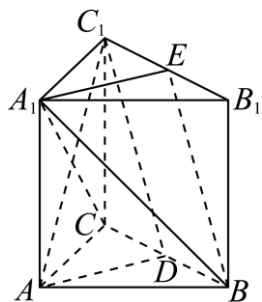
则存在, 有 $AM = \lambda AP$, 即 $(x,y-1,z) = \lambda(0,-1,1), M(0,1-\lambda,\lambda),$ 则 $BM = (-1,-\lambda,\lambda),$

因为 $\sin \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{BM}|} = \frac{|\lambda-1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+2\lambda^2}} = \frac{1}{3}$ 化简得 $\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \pm\sqrt{10} - 3$

$\because \lambda \in [0,1], \therefore \lambda = \sqrt{10} - 3 \therefore$ 在棱 PA 上满足题意的点 M 存在.

27. (2023 天津河北 统考二模) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形,

$AA_1 = AB = 3, D, E$ 分别为 BC, B_1C_1 上的点, 且 $\frac{BD}{BC} = \frac{C_1E}{C_1B_1} = t (0 < t < 1).$



(1) 若 $t = \frac{1}{2}$, 求证: $AD \parallel$ 平面 A_1BE ;

(2) 若 $t = \frac{1}{2}$, 求直线 A_1C 与平面 A_1BE 所成角的正弦值;

(3) 若平面 AC_1D 与平面 ACD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求实数 t 的值.

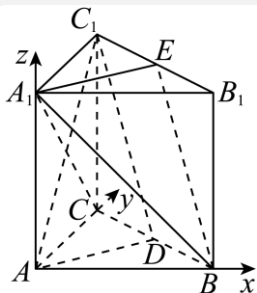
【案】(1)证明见解析；(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ；(3) $2 - \sqrt{2}$

【详解】(1) 当 $t = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{BD}{BC} = \frac{C_1E}{C_1B_1} = \frac{1}{2}$ ，即点 D, E 分别为 BC, B_1C_1 的中点，

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 // BB_1, AA_1 = BB_1$ ，所以四边形 BB_1A_1A 为平行四边形，

连接 DE ，则 $DE // BB_1, DE = BB_1$ ，所以 $DE // AA_1, DE = AA_1$ ，所以四边形 DEA_1A 是平行四边形，

所以 $AD // A_1E$ 。又因为 $AD \not\subset$ 平面 $A_1EB, A_1E \subset$ 平面 A_1EB ，所以 $AD //$ 平面 A_1EB 。



(2)

$AA_1 \perp$ 平面 ABC ，又 $\angle BAC = 90^\circ$ ，

以 $\{AB, AC, AA_1\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $A - xyz$ ，

则点 $A_1(0, 0, 3), B(3, 0, 0), C(0, 3, 0)$ ，

当 $t = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{BD}{BC} = \frac{C_1E}{C_1B_1} = \frac{1}{2}$ ，即点 D, E 分别为 BC, B_1C_1 的中点，则 $E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$ ，

所以 $\vec{A_1C} = (0, 3, -3), \vec{A_1B} = (3, 0, -3), \vec{A_1E} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ 设平面 A_1BE 的一个法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{A_1B} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{A_1E} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 3a - 3c = 0 \\ \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b = 0 \end{cases}$ ，令 $a = 1$ ，则 $b = -1, c = 1$ 所以平面 A_1BE 的一个法向量 $\vec{m} = (1, -1, 1)$ ，

则 $\cos \langle \vec{A_1C}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{A_1C} \cdot \vec{m}}{|\vec{A_1C}| |\vec{m}|} = \frac{0 - 3 - 3}{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

令直线 A_1C 与平面 A_1BE 所成角为 θ ，则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{A_1C}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以直线 A_1C 与平面 A_1BE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(3) 由 (2) 可得 $A(0, 0, 0), C_1(0, 3, 3)$ ，

所以 $\vec{AC_1} = (0, 3, 3), \vec{AB} = (3, 0, 0), \vec{BC} = (-3, 3, 0), \vec{BD} = t\vec{BC} = (-3t, 3t, 0)$ ，

所以 $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = (3 - 3t, 3t, 0)$ 。设平面 AC_1D 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \vec{AC_1} = 0 \\ \vec{n_1} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ 3(1-t)x + 3ty = 0 \end{cases}$ ，取 $\vec{n_1} = (t, t-1, 1-t)$ ，

又平面 ADC 的一个法向量为 $\vec{n_2} = (0, 0, 1)$ ，因为平面 AC_1D 与平面 ACD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，

所以 $\left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| |\vec{n_2}|} \right| = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1-t}{\sqrt{3t^2 - 4t + 2}} = \frac{1}{2}$ ，得 $t^2 - 4t + 2 = 0$ ，又因为 $0 < t < 1$ ，所以 $t = 2 - \sqrt{2}$ 。

28. (2023 天津河北 统考二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足： $\frac{2S_n}{n} = a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^+)$

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(2)若 $a_2 = 5$ ，令 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若不等式 $45(T_{2n+1} - T_n) \leq m^2 - 5m$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【分析】(1)利用 a_n, S_n 关系可得 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - 1$ ，即有 $(n-1)a_{n+1} = na_n - 1$ ，将两式相减并整理有 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$ ，即可证结论.

(2) 由 (1) 结论及题设可得 $b_n = \frac{1}{4n-3}$ ，令 $c_n = T_{2n+1} - T_n$ 、 $c_{n+1} = T_{2n+3} - T_{n+1}$ ，应用作差法比较它们的大小，即可确定 $\{T_{2n+1} - T_n\}$ 的单调性并求其最大值，结合恒成立求 m 的取值范围.

【详解】(1) 由题设， $S_n = \frac{n(a_n+1)}{2}$ ，则 $S_{n-1} = \frac{(n-1)(a_{n-1}+1)}{2}$ ($n \geq 2$)，
所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(a_n+1)}{2} - \frac{(n-1)(a_{n-1}+1)}{2} = \frac{na_n - (n-1)a_{n-1} + 1}{2}$ ，整理得 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - 1$ ，则
 $(n-1)a_{n+1} = na_n - 1$ ，
所以 $(n-1)a_{n+1} - (n-2)a_n = na_n - 1 - (n-1)a_{n-1} + 1$ ，即 $(n-1)(a_{n+1} + a_{n-1}) = 2(n-1)a_n$ ， $n-1 \neq 0$ ，
所以 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$ ，故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，得证.

(2) 由 $2S_1 = a_1 + 1$ ，可得 $a_1 = 1$ ，又 $a_2 = 5$ ，结合 (1) 结论知：公差 $d = a_2 - a_1 = 4$ ，

所以 $a_n = 4n - 3$ ，故 $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{4n-3}$ ，则 $c_n = T_{2n+1} - T_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+5} + \dots + \frac{1}{8n+1}$ ，

所以 $c_{n+1} = T_{2n+3} - T_{n+1} = \frac{1}{4n+5} + \frac{1}{4n+9} + \dots + \frac{1}{8n+1} + \frac{1}{8n+5} + \frac{1}{8n+9}$ ，且 $n \in \mathbb{N}^+$ ，

所以 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{8n+5} + \frac{1}{8n+9} - \frac{1}{4n+1} = -\frac{40n+31}{(4n+1)(8n+5)(8n+9)} < 0$ ，即 $c_{n+1} < c_n$ ，

所以，在 $n \in [1, +\infty)$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$ 上 $T_{2n+1} - T_n$ 递减，则 $(T_{2n+1} - T_n)_{\max} = T_3 - T_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$ ，

要使 $45(T_{2n+1} - T_n) \leq m^2 - 5m$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 恒成立，即 $m^2 - 5m - 14 = (m-7)(m+2) \geq 0$ ，

所以 $m \in (-\infty, -2] \cup [7, +\infty)$.

29. (2023 天津南开 统考二模) 设 $\{a_n\}$ 为等比数列， $\{b_n\}$ 为公差不为零的等差数列，且 $a_1 = b_3 = 3$ ， $a_2 = b_9$ ， $a_3 = b_{27}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2)记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $\frac{T_n}{S_n} \leq \frac{1}{3}$ ；

(3)记 $c_n = \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{2}, n \text{ 为奇数} \\ b_n + 2 \\ \frac{a_n}{2}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $\sum_{i=1}^{2n} c_i$. 【答案】(1) $a_n = 3^n$ ， $b_n = n$ (2) 证明见解析 (3) $\frac{3^{n+1}}{4n+2} - \frac{3}{2}$

【分析】(1) 由等差数列、等比数列的基本量法求得通项公式；

(2) 由等差数列、等比数列的前 n 项和公式求得 T_n, S_n 后，用作差法证明；

(3) 并项 $c_{2n-1} + c_{2n}$ 然后裂项求和.

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$,

依题意, $b_3 \cdot b_{27} = b_9^2$, 即 $3(3 + 24d) = (3 + 6d)^2$, 解得 $d = 1$. 所以 $b_n = n$.

因为 $a_1 = 3$, $a_2 = b_9 = 9$, 所以 $q = 3$, 从而 $a_n = 3^n$.

(2) 由 (1) 知 $S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{T_n}{S_n} = \frac{n(n+1)}{3^{n+1} - 3}$.

因为 $\frac{T_{n+1}}{S_{n+1}} - \frac{T_n}{S_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+2} - 3} - \frac{n(n+1)}{3^{n+1} - 3} = -\frac{2(n+1)[(n-1)3^n + 1]}{3(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} < 0$, 所以 $\frac{T_n}{S_n} < \frac{T_1}{S_1} = \frac{1}{3}$.

(3) $c_n = \begin{cases} \frac{\frac{n+1}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{n+2}, & n \text{ 为奇数}, \\ -\frac{\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}}{(n-1)(n+1)}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 因为 $c_{2n-1} + c_{2n} = \frac{3^n}{2n+1} - \frac{3^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n-2) \cdot 3^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3^{n+1}}{2n+1} - \frac{3^n}{2n-1} \right)$,

所以 $\sum_{i=1}^{2n} c_i = \frac{3}{3} - \frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{3^2}{5} - \frac{3^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^3}{7} - \frac{3^3}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{3^n}{2n+1} - \frac{3^n}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{3^2}{3} - \frac{3^1}{1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3^3}{5} - \frac{3^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3^4}{7} - \frac{3^3}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{3^{n+1}}{2n+1} - \frac{3^n}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3^{n+1}}{2n+1} - 3 \right) = \frac{3^{n+1}}{4n+2} - \frac{3}{2}$.

30. (2023 天津红桥 统考二模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = S_2 + 1, S_3 = a_4 + 2$, 其中 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 递增的等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 1$, 且 $b_1, b_2, b_3 - 4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n

(3) 设 $C_n = \frac{(a_n + 4)}{(S_n + n) \cdot b_{n+1}}$, $\{C_n\}$ 的前 n 项和为 A_n , 若 $A_n > \frac{\lambda}{n+1}$ 恒成立, 求实数 λ 的最大值.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$; $b_n = 3^{n-1}$; (2) $T_n = (n-1) \cdot 3^n + 1$; (3) $\frac{5}{3}$.

【分析】(1) 设等差数列的公差为 d , 由已知条件, 结合等差数列的通项公式和求和公式可得 $\begin{cases} a_1 + 2d = 2a_1 + d + 1 \\ 3a_1 + \frac{3 \times 2d}{2} = a_1 + 3d + 2 \end{cases}$,

从而可求出首项和公差, 即可求出通项公式; 设等比数列 $\{b_n\}$ 公比为 q , 由已知条件结合等比数列的通项公式即可求出公比, 从而可求出 $\{b_n\}$ 的通项公式. (2) 由错位相减法即可求出前 n 项和 T_n .

(3) 由 (1) 可知 $S_n = n^2$, 整理可得 $C_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$, 由裂项相消法可得 $A_n = 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$, 由 $A_n > \frac{\lambda}{n+1}$ 恒成立

可得 $(n+1) - \frac{1}{3^n} > \lambda$ 恒成立, 结合 $\left\{ (n+1) - \frac{1}{3^n} \right\}$ 的单调性即可求出实数 λ 的最大值.

【详解】解: (1) 设等差数列的公差为 d , $\because a_3 = S_2 + 1, S_3 = a_4 + 2$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 2a_1 + d + 1 \\ 3a_1 + \frac{3 \times 2d}{2} = a_1 + 3d + 2 \end{cases}, \therefore a_1 = 1, d = 2, \therefore a_n = 2n - 1. \text{ 设等比数列 } \{b_n\} \text{ 公比为 } q \text{ (其中 } q > 0 \text{)}, \text{ 因为 } b_1 = 1,$$

由 $2b_2 = b_1 + b_3 - 4$, 可得 $q^2 - 2q - 3 = 0$, 解得 $q = 3$ 或 -1 (舍去); 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^{n-1}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a_n \cdot b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1}, \text{ 则 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + \cdots + (2n-3) \times 3^{n-2} + (2n-1) \times 3^{n-1} \text{ ①.}$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-3) \times 3^{n-1} + (2n-1) \times 3^n \text{ ② 由 ① 减去 ② } -2T_n = 1 + 2(3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n,$$

$$\text{则 } -2T_n = 1 + 2 \times \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \cdot 3^n, \text{ 所以 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = (n-1) \cdot 3^n + 1.$$

$$(3) \text{ 由 (1) 可知, } S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2,$$

$$\text{则 } C_n = \frac{(2n+3)}{(n^2+n) \cdot 3^n} = \frac{(2n+3)}{n \cdot (n+1) \cdot 3^n} = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \therefore A_n = 1 - \frac{1}{2 \times 3^1} + \frac{1}{2 \times 3^1} - \frac{1}{3 \times 3^2} + \cdots + \frac{1}{n \times 3^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \times 3^n}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} > \frac{\lambda}{(n+1)} \text{ 恒成立, } \therefore (n+1) - \frac{1}{3^n} > \lambda \text{ 恒成立, } \because \left\{ (n+1) - \frac{1}{3^n} \right\} \text{ 单调递增, } \therefore n=1 \text{ 时, } \left((n+1) - \frac{1}{3^n} \right)_{\min} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \lambda \leq \frac{5}{3}, \therefore \lambda \text{ 最大值为 } \frac{5}{3}.$$

31. (2023 天津二模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 并且 $a_2 = 2$, $S_5 = 15$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = \frac{1}{2}$,

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{2n} b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+), \text{ 记数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } T_n. (1) \text{ 求数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n \text{ 及前 } n \text{ 项和公式 } S_n;$$

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n 及前 n 项和公式 T_n ;

(3) 记集合 $M = \{n \mid \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} > \lambda, n \in \mathbb{N}^+\}$, 若 M 的子集个数为 16, 求实数 λ 的取值范围.

$$\text{【答案】(1) } S_n = \frac{n^2 + n}{2} \text{ (2) } T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \text{ (3) } \frac{15}{16} < \lambda \leq 1$$

【详解】试题分析: (1) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 可把已知用 a_1, d 表示出来, 列出方程组, 解出 a_1, d , 从而得到通项

公式和胶 n 项和 S_n ; (2) 由已知得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$, 这是数列前后项的比值, 因此可用连乘法求得通项 b_n , 即

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1, \text{ 从而有 } b_n = \frac{n}{2^n}, \text{ 它可看作是一个等差数列和一个等比数列的乘积, 因此其前 } n \text{ 项和用乘公比}$$

$$\text{错位相减法求得; (3) 由 (1) (2) 求得 } \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} = \frac{n^2+n}{2^n}, \text{ 不等式 } \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} > \lambda \text{ 恒成立, 即 } \frac{n^2+n}{2^n} > \lambda \text{ 恒成立,}$$

只要求得 $f(n) = \frac{n^2+n}{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的最小值即可, 先求出前面几项 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$, 观察归纳猜想出 $\{f(n)\}$

单调性并给出证明 (可用 $f(n+1) - f(n)$ 证明数列的单调性), 从而可求得最小值, 得范围.

$$\text{试题解析: (1) 设数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 由题意得 } \begin{cases} a_1 + d = 2 \\ 5a_1 + 10d = 15 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = n, \therefore S_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

(2) 由题意得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$

叠乘得 $b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{1}\right) = \frac{n}{2^n}$ 由题意得 $T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$ ①

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{②} \quad \text{②}-\text{①} \text{得: } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(3) 由上面可得 $\frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} = \frac{n^2+n}{2^n}$ 令 $f(n) = \frac{n^2+n}{2^n}$ 则 $f(1)=1, f(2)=\frac{3}{2}, f(3)=\frac{3}{2}, f(4)=\frac{5}{4}, f(5)=\frac{15}{16}$

下面研究数列 $f(n) = \frac{n^2+n}{2^n}$ 的单调性,

$$\because f(n+1) - f(n) = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2^{n+1}} - \frac{n^2 + n}{2^n} = \frac{(n+1)(2-n)}{2^{n+1}}$$

$\therefore n > 3$ 时, $f(n+1) - f(n) < 0, f(n+1) < f(n)$ 即 $f(n)$ 单调递减.

所以不等式 $\frac{n^2+n}{2^n} > \lambda, n \in \mathbf{N}^+$ 解的个数为 4, $\therefore \frac{15}{16} < \lambda < 1$.

考点: 等差数列的通项公式与前 n 项和公式, 数列递推公式求通项公式, 错位相减法求数列的和, 数列的单调性.

32. (2023 天津 统考二模) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = 2b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 + b_1 = 4$, $b_2 = 4$, $a_3 = 5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 若 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{b_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和;

(3) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i \cdot \sqrt{S_i}} < \frac{17}{24} (n \in \mathbf{N}^*)$. 【答案】(1) $a_n = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2}$, $b_n = 2^n$ (2) $\frac{3n^2 + n + 3}{2} - \frac{2n + 3}{2 \cdot 4^n}$

【分析】(1) 分析可知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 确定该数列的公比与首项, 可求得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式, 利用奇偶分组求和法结合等差数列的求和公式、错位相减法即可求得数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和;

(3) 先证明柯西不等式 $(s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2) \geq (s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots + s_nt_n)^2$, 求出 S_n , 然后利用柯西不等式可证得结论成立.

【详解】(1) 解: 由 $b_{n+1} = 2b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 及 $b_2 = 4$ 可知, 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列,

所以, $b_1 = \frac{b_2}{2} = 2$, 故 $b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$,

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $\begin{cases} a_1 + b_1 = a_1 + 2 = 4 \\ a_3 = a_1 + 2d = 5 \end{cases}$, 可得 $a_1 = 2$, $d = \frac{3}{2}$,

所以, $a_n = 2 + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2}$.

(2) 解: $c_n = \begin{cases} \frac{3n}{2} + \frac{1}{2}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{3n+1}{2^{n+1}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$T_{2n} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n} = (c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}) + (c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n}),$$

$$\text{记 } A_n = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}, \quad B_n = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n},$$

$$\text{所以, } A_n = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1} = 2 + 5 + \cdots + (3n-1) = \frac{n(2+3n-1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2},$$

$$B_n = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n} = \frac{7}{2^3} + \frac{13}{2^5} + \frac{19}{2^7} + \cdots + \frac{6n+1}{2^{2n+1}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{4}B_n = \frac{7}{2^5} + \frac{13}{2^7} + \cdots + \frac{6n-5}{2^{2n+1}} + \frac{6n+1}{2^{2n+3}}, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 可得 } \frac{3}{4}B_n = \frac{7}{8} + \left(\frac{6}{2^5} + \frac{6}{2^7} + \cdots + \frac{6}{2^{2n+1}} \right) - \frac{6n+1}{2^{2n+3}} = \frac{7}{8} + \frac{\frac{3}{16} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{6n+1}{2^{2n+3}}$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^n} - \frac{6n+1}{2 \cdot 4^{n+1}} = \frac{9}{8} - \frac{6n+9}{2 \cdot 4^{n+1}}, \text{ 所以, } B_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2 \cdot 4^n},$$

$$\text{因此, } T_{2n} = A_n + B_n = \frac{3n^2+n+3}{2} - \frac{2n+3}{2 \cdot 4^n}.$$

(3) 证明: 先证明柯西不等式 $(s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2) \geq (s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n)^2$,

构造函数 $f(x) = (s_1 x - t_1)^2 + (s_2 x - t_2)^2 + \cdots + (s_n x - t_n)^2 \quad (n \in \mathbf{N}^+)$,

显然 $f(x) \geq 0$ 且 $f(x) = (s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)x^2 - 2(s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n)x + (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2)$,

所以, $\Delta = 4(s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n)^2 - 4(s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2) \leq 0$,

即 $(s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2) \geq (s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n)^2$,

当且仅当 $s_i t_j = s_j t_i \quad (i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})$ 时, 等号成立,

$$\text{本题中, 由 (1) 可得 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \left(2 + \frac{3n+1}{2} \right)}{2} = \frac{3n^2 + 5n}{4},$$

$$\text{所以, } \frac{1}{b_n \sqrt{S_n}} = \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 5n} \cdot 2^{n-1}}, \text{ 且 } \frac{1}{3n^2 + 5n} < \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{所以, } \sum_{i=1}^n \frac{1}{3i^2 + 5i} < \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{3},$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^{i-1}} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) < \frac{4}{3},$$

$$\text{所以, } \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i \cdot \sqrt{S_i}} < \frac{17}{24} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{3i^2 + 5i} \right) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^{i-1}} \right)^2 \right] < \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9},$$

$$\text{但 } \frac{\sqrt{S_n}}{b_n} = \frac{\sqrt{3n^2 + 5n}}{2^n} \text{ 不恒为常数, 所以等号不成立,}$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i \cdot \sqrt{S_i}} < \frac{2}{3} < \frac{17}{24} (n \in \mathbf{N}^+). \text{ 【点睛】方法点睛: 数列求和的常用方法:}$$

(1) 对于等差等比数列, 利用公式法可直接求解; (2) 对于 $\{a_n b_n\}$ 结构, 其中 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 用错位相减法求和; (3) 对于 $\{a_n + b_n\}$ 结构, 利用分组求和法;

$$(4) \text{ 对于 } \left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\} \text{ 结构, 其中 } \{a_n\} \text{ 是等差数列, 公差为 } d (d \neq 0), \text{ 则 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right), \text{ 利用裂项相消法求和.}$$

33. (2023 天津 校联考二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (\forall n \in \mathbf{N}^+)$, 正项数列 $\{b_n\}$ 满足:

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2} (\forall n \in \mathbf{N}^+), \text{ 且 } 2a_1 = b_1 = 2, \quad a_4 = b_2, \quad b_5 = 4b_3. (1) \text{ 求 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ 的通项公式;}$$

$$(2) \text{ 已知 } c_n = \begin{cases} a_{2n-1}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3a_n - 2)b_n - 2}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 求: } \sum_{k=1}^{2n+1} c_k; (3) \text{ 求证: } \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} < \frac{5}{4}.$$

$$\text{【答案】(1) } a_n = n, \quad b_n = 2^n (2) (2n+1)(n+1) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right)$$

【分析】(1) 由题意可得 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 再分别求解公差与公比即可;

$$(2) \text{ 代入化简可得 } c_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^n+1} - \frac{n+2}{2^{n+2}+1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 再分组根据等差数列与裂项相消求和即可;}$$

$$(3) \text{ 放缩可得 } \frac{1}{a_n^3} < \frac{1}{n(n+1)(n-1)} (n \geq 2), \text{ 再裂项相消求和即可.}$$

【详解】(1) 由题意知, $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , $\{b_n\}$ 为等比数列, 设公比为 q ,

$$\text{又 } 2a_1 = b_1 = 2, \quad a_4 = b_2, \quad b_5 = 4b_3, \quad \therefore q^2 = \frac{b_5}{b_3} = 4, \quad \therefore q = 2, \quad b_n = 2^n. \therefore a_4 = b_2 = 4 = a_1 + 3d, \quad d = 1, \quad \therefore a_n = n.$$

$$(2) \text{ 由 } c_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3n-2)2^n - 2}{(2^n+1)(2^{n+2}+1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases} = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^n+1} - \frac{n+2}{2^{n+2}+1}, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n+1} c_k = (c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n+1}) + (c_2 + c_4 + c_6 + \dots + c_{2n}) = [1 + 5 + 9 + \dots + (4n+1)]$$

$$+ \left[\left(\frac{2}{2^2+1} - \frac{4}{2^4+1} \right) + \left(\frac{4}{2^4+1} - \frac{6}{2^6+1} \right) + \left(\frac{6}{2^6+1} - \frac{8}{2^8+1} \right) + \dots + \left(\frac{2n}{2^{2n}+1} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right) \right] = \frac{[1 + (4n+1)](n+1)}{2} + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right)$$

$$= (2n+1)(n+1) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right);$$

$$(3) \frac{1}{a_n^3} = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n \cdot n^2} < \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)} (n \geq 2), = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right] (n \geq 2),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} < 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} (n \geq 2).$$

$$\because \frac{1}{2n(n+1)} > 0, \therefore \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4} \text{ 成立, } n=1 \text{ 时, } 1 < \frac{5}{4} \text{ 也成立, } \therefore \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} < \frac{5}{4}.$$

34. (2023 天津河西 统考二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且满足 $a_1 = b_1 = 1$, $b_3 = a_3 - 1$,

$a_2 - 1 = b_3 - b_2$. (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $T_n \cdot T_{n+2} < T_{n+1}^2$;

$$(3) \text{ 记 } c_n = \begin{cases} \frac{6n+13}{a_n \cdot a_{n+2} \cdot b_{n+2}}, n \text{ 为奇数} \\ \sqrt{\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和为 } K_{2n}, \text{ 求证: } K_{2n} < 5.$$

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$;

【分析】(1) 题意可得出 $\begin{cases} q^2 = 2d \\ d = q^2 - q \end{cases}$, 解方程求出 $q = d = 2$, 再由等差和等比数列的通项公式求解即可;

(2) 由 (1) 可得: $T_n = 2^n - 1$, 证明 $T_n \cdot T_{n+2} - T_{n+1}^2 < 0$ 即可;

$$(3) \text{ 求出 } c_n = \begin{cases} \frac{6n+13}{(2n-1)(2n+3)2^{n+1}}, n \text{ 为奇数} \\ \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{2^n}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 设 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和, 奇数项和为 } P_n, \text{ 偶数项和为 } Q_n, \text{ 由裂项相消法}$$

求出 P_n , 可证得 $P_n < 1$, 对 Q_n 放缩可得 $Q_n < \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}$, 再由错位相减法可证得 $R_n < 4$, 即可证明 $K_{2n} < 5$.

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由 $a_1 = b_1 = 1$, $b_3 = a_3 - 1$, $a_2 - 1 = b_3 - b_2$ 可得: $\begin{cases} q^2 = 2d \\ d = q^2 - q \end{cases}$, 解得: $q = 2$ 或 $q = 0$ (舍去), 则 $d = 2$,

所以 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$;

(2) 由 (1) 可得: $T_n = \frac{1 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$, $T_n \cdot T_{n+2} - T_{n+1}^2 = (2^n - 1)(2^{n+2} - 1) - (2^{n+1} - 1)^2 = -2^n < 0$, 即 $T_n \cdot T_{n+2} < T_{n+1}^2$;

$$(3) \text{ 由 (1) 知, } a_n = 2n - 1, \quad b_n = 2^{n-1}, \text{ 所以 } c_n = \begin{cases} \frac{6n+13}{(2n-1)(2n+3)2^{n+1}}, & n \text{ 为奇数} \\ \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{2^n}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

设 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和, 奇数项和为 P_n , 偶数项和为 Q_n ,

$$P_n = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}, \quad Q_n = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{6n+13}{(2n-1)(2n+3)2^{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+3)2^{n+1}},$$

$$\begin{aligned} P_n &= c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1} = \left(\frac{1}{1 \times 2^0} - \frac{1}{5 \times 2^2} \right) + \left(\frac{1}{5 \times 2^2} - \frac{1}{9 \times 2^4} \right) + \left(\frac{1}{9 \times 2^4} - \frac{1}{13 \times 2^6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(4n-3) \times 2^{2n-2}} - \frac{1}{(4n+1) \times 2^{2n}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(4n+1) \times 2^{2n}} < 1, \end{aligned}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{2^n}} = \sqrt{\frac{n^2-1}{2^n}} < \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}},$$

$$Q_n = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n} < \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \cdots + \frac{2n}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\text{设 } R_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2} R_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} R_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n}{2^n}, \quad R_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} < 4,$$

所以 $K_{2n} < 5$.

35. (2023 天津河东 统考二模) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 且满足 $a_1 + a_2 = 6a_3$, $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项

$$\text{和 } S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(1) \text{ 求数列 } \{a_n\} \text{ 和 } \{b_n\} \text{ 的通项公式; } (2) \text{ 设 } c_n = \begin{cases} \frac{3b_n+8}{b_n b_{n+2}} \cdot a_{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ a_n b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 求数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和 } T_{2n}.$$

$$\text{【答案】} (1) a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad b_n = n, \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad (2) \frac{25}{18} - \left(\frac{1}{4(2n+1)} + \frac{3n+4}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1}.$$

【解析】(1) 根据题干已知条件可列出关于首项 a_1 与公比 q 的方程组, 解出 a_1 与 q 的值, 即可计算出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再根据公式 $b_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 进行计算可得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 先分 n 为奇数和 n 为偶数分别计算出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式, 在求前 $2n$ 项和时, 对奇数项运用裂项相消法求和, 对偶数项运用错位相减法求和, 最后相加进行计算即可得到前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【详解】(1) 依题意, 由 $a_1 + a_2 = 6a_3$, $a_4 = 4a_3^2$, 可得 $\begin{cases} a_1 + a_1q = 6a_1q^2 \\ a_1q^3 = 4(a_1q^2)^2 \end{cases}$, 因为 $q > 0$, 所以解得 $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 对于数列 $\{b_n\}$: 当 $n=1$ 时, $b_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, $\therefore$ 当 $n=1$ 时, $b_1 = 1$ 也满足上式, $\therefore b_n = n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 由题意及 (1), 可知:

当 n 为奇数时, $c_n = \frac{3b_n + 8}{b_n b_{n+2}} a_{n+2} = \frac{3n+8}{n(n+2)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{n \times 2^n} - \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+2}}$, 当 n 为偶数时, $c_n = a_n b_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

令 $A = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}$, $B = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n}$,

则 $A = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1} = \frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{5 \times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}} = \frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}}$,

$B = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$,

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 B = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + (2n-2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$,

两式相减, 可得 $\frac{3}{4}B = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$,

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$, $= \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2^2}} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$,

$= \frac{2}{3} - \left(n + \frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $\therefore B = \frac{8}{9} - \frac{3n+4}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$,

$\therefore T_{2n} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n} = (c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}) + (c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n}) = A + B = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}} - \frac{3n+4}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \frac{8}{9}$

$= \frac{25}{18} - \left(\frac{1}{4(2n+1)} + \frac{3n+4}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$.

36. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $S_{n+1} - 2S_n = 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列; (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{a_{n+1}}$.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; ② 是否存在正整数 n , 使得 $\sum_{i=1}^n b_i = 4 - n$ 成立? 若存在, 求出所有 n 的值; 若不存在,

请说明理由. 【答案】(1) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 首项为 1, 公比为 2. (2) $b_n = \frac{n}{2^{n-1}}$, $n = 2$

【分析】(1) 由题设的递推关系式, 得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ($n \geq 2$), 即可证得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

(2) ① 由 (1) 知, $a_n = 2^{n-1}$, 化简得 $2^n b_{n+1} - 2^{n-1} b_n = 1$, 则数列 $\{2^{n-1} b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 即可求得 $b_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

② 利用乘公比错位相减法, 求得 $T_n = 4 - (2n+4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 进而得到 $\frac{n+2}{n} = 2^{n-1}$, 显然当 $n = 2$ 时, 上式成立, 设

$f(n) = \frac{n+2}{n} - 2^{n-1}$, 由 $f(n+1) - f(n) < 0$, 所以数列 $\{f(n)\}$ 单调递减, 进而得到结论.

【详解】(1) 解: 由 $S_{n+1} - 2S_n = 1$, 得 $S_n - 2S_{n-1} = 1$ ($n \geq 2$), 两式相减, 得 $a_{n+1} - 2a_n = 0$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ($n \geq 2$).

因为 $a_1 = 1$, 由 $(a_1 + a_2) - 2a_1 = 1$, 得 $a_2 = 2$, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,

所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 首项为 1, 公比为 2.

(2) ① 由 (1) 知, $a_n = 2^{n-1}$, 由 $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{a_{n+1}}$, 得 $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{2^n}$,

即 $2^n b_{n+1} = 2^{n-1} b_n + 1$, 即 $2^n b_{n+1} - 2^{n-1} b_n = 1$, 因为 $b_1 = 1$, 所以数列 $\{2^{n-1} b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列.

所以 $2^{n-1} b_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 所以 $b_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

② 设 $T_n = \sum_{i=1}^n b_i$, 则 $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

两式相减, 得 $\frac{1}{2} T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - (n+2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $T_n = 4 - (2n+4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

由 $\sum_{i=1}^n b_i = 4 - n$, 得 $4 - (2n+4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 - n$, 即 $\frac{n+2}{n} = 2^{n-1}$.

显然当 $n = 2$ 时, 上式成立,

设 $f(n) = \frac{n+2}{n} - 2^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 即 $f(2) = 0$.

因为 $f(n+1) - f(n) = \left(\frac{n+3}{n+1} - 2^n\right) - \left(\frac{n+2}{n} - 2^{n-1}\right) = -\left[\frac{2}{n(n+1)} + 2^{n-1}\right] < 0$,

所以数列 $\{f(n)\}$ 单调递减, 所以 $f(n) = 0$ 只有唯一解 $n = 2$, 所以存在唯一正整数 $n = 2$, 使得 $\sum_{i=1}^n b_i = 4 - n$ 成立.

37. (2023 天津北辰 统考三模) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比大于 1. 已

知 $a_1 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 + S_2 = 11$, $b_3 + S_3 = 22$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{(3a_{n+1} - 1)}{a_n(a_n + 1)b_n}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和;

(3) 设 $d_n = a_n b_n$, 求证: $\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_3 - d_2} + \frac{1}{d_4 - d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{n+1} - d_n} < \frac{1}{4}$.

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 2^{n+1}$ (2) $\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} - \frac{1}{2}$

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 1)$, 依题意得到方程组, 求出 d 、 q , 即可

得解; (2) 由 (1) 可得 $c_n = (-1)^n \left[\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right]$, 利用裂项相消法计算可得;

(3) 由 (1) 可得 $d_n = n \times 2^{n+1}$, 即可得到 $\frac{1}{d_{n+1} - d_n} = \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+2}}$, 利用放缩法及等比数列求和公式计算可得.

【详解】(1) 依题意设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 1)$,

则 $S_2 = a_1 + a_2 = d + 2$, $S_3 = 3a_1 + \frac{3(3-1)}{2}d = 3d + 3$,

又 $b_2 + S_2 = 11$, $b_3 + S_3 = 22$, 所以 $\begin{cases} 4q + 2 + d = 11 \\ 4q^2 + 3 + 3d = 22 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} q = 2 \\ d = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q = 1 \\ d = 5 \end{cases}$ (舍去), 所以 $a_n = n$, $b_n = 2^{n+1}$.

(2) 由 (1) 可得 $c_n = (-1)^n \frac{(3a_{n+1} - 1)}{a_n(a_n + 1)b_n} = (-1)^n \frac{(3n + 2)}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = (-1)^n \left[\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right]$,

设 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} , 所以 $T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2n}$

$= -\left(\frac{1}{1 \times 2^1} + \frac{1}{2 \times 2^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{3 \times 2^3}\right) - \left(\frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{4 \times 2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right) = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} - \frac{1}{2}$.

(3) 因为 $d_n = a_n b_n = n \times 2^{n+1}$, 所以 $d_{n+1} - d_n = (n+1) \times 2^{n+2} - n \times 2^{n+1} = (n+2) \times 2^{n+1}$,

所以 $\frac{1}{d_{n+1} - d_n} = \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+1}} < \frac{1}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$, 所以 $\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_3 - d_2} + \frac{1}{d_4 - d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n+1} - d_n}$
 $< \frac{\frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} < \frac{1}{4}$.

38. (2023 天津和平 统考三模) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{n+1} = S_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个等差数列, 记插入的这 n 个数之和为 T_n , 若不等式

$(-1)^n \lambda < 2 - \frac{3n}{T_n}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围;

(3) 记 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n^2}$, 求证: $\frac{b_1 - b_2}{\sqrt{b_1}} + \frac{b_2 - b_3}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{b_n - b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} < \sqrt{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】(1) $a_n = 2^n$ (2) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 当 $n=1$ 时, 有 $a_2 = a_1 + 2$, 则 $a_1 q = a_1 + 2$ ①

当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} a_{n+1} = S_n + 2 \\ a_n = S_{n-1} + 2 \end{cases}$, 两式相减可得: $a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1} = a_n$, 整理得 $a_{n+1} = 2a_n$, 可知 $q = 2$, 代入①可得 $a_1 = 2$,

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2) 由已知在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 组成以 $a_n = 2^n$ 为首项的等差数列,

所以 $T_n = \frac{(n+2)(a_n + a_{n+1})}{2} - a_n - a_{n+1} = \frac{n(a_n + a_{n+1})}{2} = 3n \cdot 2^{n-1}$, 则 $(-1)^n \lambda < 2 - \frac{3n}{T_n} = 2 - \frac{2}{2^n}$,

设 $c_n = 2 - \frac{2}{2^n}$, 则 $\{c_n\}$ 是递增数列,

当 n 为偶数时, $\lambda < 2 - \frac{2}{2^n}$ 恒成立, 即 $\lambda < \left(2 - \frac{2}{2^n}\right)_{\min} = c_2 = \frac{3}{2}$, 所以 $\lambda < \frac{3}{2}$;

当 n 为奇数时, $-\lambda < 2 - \frac{2}{2^n}$ 恒成立, 即 $-\lambda < \left(2 - \frac{2}{2^n}\right)_{\min} = c_1 = 1$, 所以 $\lambda > -1$; 综上所述, λ 的取值范围是 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

(3) 证明: 由 (1) 得 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n^2} = \frac{1}{2n}$,

则有 $\frac{b_n - b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+1)}} < \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+1} + \sqrt{n(n+1)}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$.

$\frac{b_1 - b_2}{\sqrt{b_1}} + \frac{b_2 - b_3}{\sqrt{b_2}} + \cdots + \frac{b_n - b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} < \sqrt{2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right]$

$< \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \sqrt{2}$, 原不等式得证.

39. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 对于给定的

k ($k = 1, 2, 3, \cdots, n$), 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k , 公差为 $2a_k - 1$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 记 $T^{(k)}$ 的第 i 项为 $b_i^{(k)}$. 若 $b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = b_2^{(2)}$, 且

$b_2^{(1)} = b_3^{(2)}$. (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}}$; (3) 求 $\sum_{i=1}^n b_i^{(k)}$.

【答案】(1) $a_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; (2) $\frac{n}{6n+4}$; (3) $3n^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{n(n-1)}{2}$.

【详解】(1) 依题意, $b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i-1)$, ($k = 1, 2, 3, \cdots, n$), $i \in \mathbf{N}$,

$b_1^{(1)} = a_1, b_1^{(2)} = a_2, b_2^{(1)} = a_1 + (2a_1 - 1) = 3a_1 - 1, b_2^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1) = 3a_2 - 1, b_3^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1) \times 2 = 5a_2 - 2$,

由 $b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = b_2^{(2)}$ 及 $b_2^{(1)} = b_3^{(2)}$, 得 $\begin{cases} a_1 + a_2 = 3a_2 - 1 \\ 3a_1 - 1 = 5a_2 - 2 \end{cases}$, 解得 $a_1 = 3, a_2 = 2$, 于是 $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}$,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

(2) 由 (1) 知, $b_i^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1)(i-1) = 2 + 3(i-1) = 3i - 1, b_{i+1}^{(2)} = 3i + 2$,

$$\frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}} = \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3i-1} - \frac{1}{3i+2} \right),$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{6n+4}.$$

$$(3) \text{ 由 (1) 知, } b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i-1) = (2i-1)a_k - (i-1), \quad a_k = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, (k=1, 2, 3, \cdots, n),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{i=1}^n b_i^{(k)} &= \sum_{i=1}^n [(2i-1)a_k - (i-1)] = a_k \sum_{i=1}^n (2i-1) - \sum_{i=1}^n (i-1) = a_k \cdot \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n - \frac{0+(n-1)}{2} \cdot n \\ &= n^2 a_k - \frac{n(n-1)}{2} = 3n^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】关键点睛：涉及数列新定义问题，关键是正确理解给出的定义，由给定的数列结合新定义探求数列的相关性质，并进行合理的计算、分析、推理等方法综合解决.

40. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知数列 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1=1, b_4=10$ 的等差数列，设

$$b_n + 2 = 3 \log_{\frac{1}{4}} a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

(1) 求证: $\{a_n\}$ 是等比数列; (2) 记 $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 在 (2) 的条件下, 记 $d_n = (3n+1) \cdot S_n$, 若对任意正整数 n , 不等式 $\frac{1}{n+d_1} + \frac{1}{n+d_2} + \cdots + \frac{1}{n+d_n} > \frac{m}{24}$ 恒成立, 求整数

m 的最大值. 【答案】(1) 证明见解析. (2) $S_n = \frac{n}{3n+1}$ (3) 11

【分析】(1) 运用等差数列的通项公式, 可得公差 $d=3$, 进而得到 $b_n=3n-2$, 再由对数的运算性质和等比数列的定义, 即可得证;

(2) 由 (1) 得 $c_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$, 再利用裂项相消法求和即可;

(3) 根据题意, 求得 $d_n=n$, 设 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, 判断其为单调递增, 求得最小值为 $f(1)$, 再由恒成立思想可得 m 的范围, 进而得到整数 m 的最大值.

【详解】(1) 解: 由 $b_1=1$ 及 $b_4=10$, 得 $d = \frac{b_4 - b_1}{4-1} = 3$, 所以 $b_n = 3n-2$.

因为 $b_n + 2 = 3 \log_{\frac{1}{4}} a_n = 3n-2+2=3n$, 所以 $\log_{\frac{1}{4}} a_n = n$, 即 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = \frac{1}{4}$, 公比 $q = \frac{1}{4}$ 的等比数列.

(2) 解: 由 (1) 得 $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$, 所以

$$S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{n}{3n+1}$$

(3) 解: 因为 $d_n = (3n+1) S_n = (3n+1) \cdot \frac{n}{3n+1} = n$, 则问题转化为对任意正整数 n 使不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{m}{24}$

恒成立. 设 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, 则

$$f(n+1) - f(n) = \left[\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+1)} \right] - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right] = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0. \text{ 所以 } f(n+1) > f(n), \text{ 故 } f(n) \text{ 的最小值是 } f(1) = \frac{1}{2}.$$

由 $\frac{1}{2} > \frac{m}{24}$, 所以 $m < 12$, 则整数 m 可取最大值为 11.

41. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 欧几里得生活的时期人们就发现了椭圆有如下的光学性质:

由椭圆一焦点射出的光线经椭圆内壁反射后必经过另一焦点. 现有一椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 长轴长为 4, 从

一个焦点 F 发出的一条光线经椭圆内壁上一点 P 反射之后恰好与 x 轴垂直, 且 $PF = \frac{7}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 已知 A 为该椭圆的左顶点, 若斜率为 k 且不经过点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 记直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且满足 $k(k_1 + k_2) = 2$.

① 证明: 直线 l 过定点;

② 若 $|OM|^2 + |ON|^2 = 5$, 求 k 的值. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2) ① $(-\frac{5}{2}, 0)$; ② $k = \pm \frac{\sqrt{34}}{17}$ 或 $k = \pm \frac{1}{2}$.

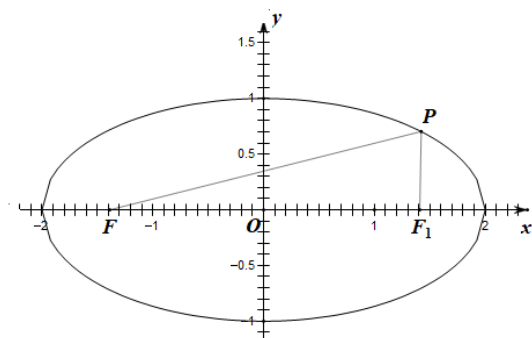
【分析】(1) 利用椭圆的定义得出 $PF_1 = \frac{1}{2}$, 再利用垂直关系和 $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}$ 进行求解;

(2) ① 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 联立直线与椭圆的方程, 得到关于 x 的一元二次方程, 写出两根之和与积, 利用斜率公式及 $k(k_1 + k_2) = 2$ 得到关于 k, m 的关系式, 再利用直线方程的点斜式证明直线过定点;

② 借助上问中 k, m 的关系式, 化简两根之和与积, 利用 $|OM|^2 + |ON|^2 = 5$ 及点在椭圆上得到 $x_1^2 + x_2^2 = 4$, 再进一步化简求解.

【详解】(1) 解: 不妨设 F, F_1 是椭圆的左焦点、右焦点, 则 $PF_1 \perp x$ 轴, 又因为 $PF = \frac{7}{2}$, $2a = 4$,

所以 $PF_1 = 2a - PF = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $b^2 = 1$, 则椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.



(2) ① 证明: 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得: } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2},$$

$$\text{因为 } k(k_1 + k_2) = 2, \text{ 所以 } \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{2}{k},$$

$$\text{即 } \frac{kx_1 + m}{x_1 + 2} + \frac{kx_2 + m}{x_2 + 2} = \frac{(kx_1 + m)(x_2 + 2) + (kx_2 + m)(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{2}{k},$$

$$\text{即 } \frac{2kx_1 x_2 + (2k + m)(x_1 + x_2) + 4m}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{2}{k},$$

$$\text{即 } (2k^2 - 2)x_1 x_2 + (2k^2 + km - 4)(x_1 + x_2) + 4mk - 8 = 0,$$

$$\text{则 } \frac{4(m^2 - 1)(2k^2 - 2)}{1 + 4k^2} - \frac{8km(2k^2 + km - 4)}{1 + 4k^2} + 4mk - 8 = 0,$$

$$\text{即 } 10k^2 - 9km + 2m^2 = 0, \text{ 即 } (2k - m)(5k - 2m) = 0, \text{ 则 } m = 2k \text{ 或 } m = \frac{5}{2}k,$$

当 $m = 2k$ 时, 直线 $l: y = kx + m$ 可化为 $l: y = k(x + 2)$, 即直线 l 过定点 $(-2, 0)$ (与左焦点重合, 舍);

当 $m = \frac{5}{2}k$ 时, 直线 $l: y = kx + m$ 可化为 $l: y = k(x + \frac{5}{2})$, 即直线 l 过定点 $(-\frac{5}{2}, 0)$; 综上所述, 直线 l 过定点 $(-\frac{5}{2}, 0)$;

$$\text{②解: 由①得 } m = \frac{5}{2}k, \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{20k^2}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{25k^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$\text{且 } \Delta = 64k^2m^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) = 64k^2(\frac{5}{2}k)^2 - 16(1 + 4k^2)[(\frac{5}{2}k)^2 - 1] > 0, \text{ 解得 } k^2 < \frac{4}{9};$$

$$\text{因为 } |OM|^2 + |ON|^2 = 5, \text{ 所以 } x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 5, \text{ 即 } x_1^2 + 1 - \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + 1 - \frac{x_2^2}{4} = 5,$$

$$\text{即 } x_1^2 + x_2^2 = 4, \text{ 即 } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4, \text{ 即 } \frac{400k^4}{(1 + 4k^2)^2} - \frac{(50k^2 - 8)(1 + 4k^2)}{(1 + 4k^2)^2} = 4,$$

$$\text{即 } 68k^4 - 25k^2 + 2 = 0, \text{ 即 } (17k^2 - 2)(4k^2 - 1) = 0, \text{ 则 } k^2 = \frac{2}{17} \text{ 或 } k^2 = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } k = \pm \frac{\sqrt{34}}{17} \text{ 或 } k = \pm \frac{1}{2}.$$

【思路点睛】在处理直线与圆锥曲线的综合问题时, 涉及直线过定点问题是常见题型, 证明动直线 l 过定点问题的基本思路是: 设动直线 l 的方程 (斜率存在) 为 $y = kx + m$, 由题设条件将 m 用 k 表示为 $m = kt + n$, 得 $y - n = k(x + t)$, 即直线过定点 $(-t, n)$.

42. (2023 天津和平 统考三模) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上, 下焦点分别为 F_2, F_1 ,

椭圆上的任意一点到下焦点 F_1 的最大距离为 3, 最小距离为 1. (1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $A(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于点 B , 垂直于 l 的直线与 l 交于点 P , 与 x 轴交于点 Q , $\overrightarrow{BF_2} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$, 且

$$\angle POA = \angle PAO, \text{ 求直线 } l \text{ 的方程. 【答案】(1) } \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \text{ (2) } y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x + 2$$

【分析】(1) 根据椭圆的性质得到 $\begin{cases} a + c = 3 \\ a - c = 1 \end{cases}$, 即可求出 a, c , 再求出 b^2 , 即可得解;

(2) 由题意知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, $B(x_1, y_1)$, 联立直线方程, 求出 B 点坐标, 依题意 P 在 OA 的垂直平分线上, 即可求出 B 点坐标, 从而求出 PQ 的方程, 表示出 Q 点坐标, 根据 $\overrightarrow{BF_2} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$ 求出 k , 即可得解.

【详解】(1) 设椭圆的半焦距为 c , 长半轴为 a , 依题意 $\begin{cases} a + c = 3 \\ a - c = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases}$,

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 3, \text{ 所以椭圆方程为 } \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1.$$

(2) 由题意知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, $B(x_1, y_1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 可得 } (3k^2 + 4)x^2 + 12kx = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{12k}{3k^2 + 4}, \text{ 则 } y_1 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 4} + 2 = \frac{-6k^2 + 8}{3k^2 + 4},$$

即 $B\left(-\frac{12k}{3k^2+4}, \frac{-6k^2+8}{3k^2+4}\right)$ ，因为 $\angle POA = \angle PAO$ ，则 P 为 OA 的垂直平分线与 l 的交点，

所以 $\begin{cases} y=1 \\ y=kx+2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} y=1 \\ x=-\frac{1}{k} \end{cases}$ ，所以 $P\left(-\frac{1}{k}, 1\right)$ ，

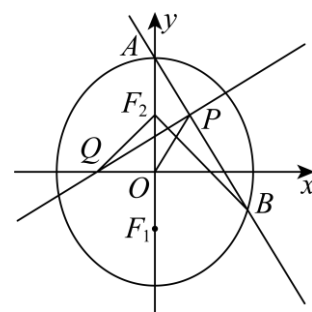
又直线 $PQ \perp l$ ，所以直线 PQ 的方程为 $y-1 = -\frac{1}{k}\left(x+\frac{1}{k}\right)$ ，令 $y=0$ ，解得 $x=k-\frac{1}{k}$ ，所

以 $Q\left(k-\frac{1}{k}, 0\right)$ ，

又 $F_2(0,1)$ ，所以 $\overrightarrow{BF_2} = \left(\frac{12k}{3k^2+4}, \frac{9k^2-4}{3k^2+4}\right)$ ， $\overrightarrow{QF_2} = \left(\frac{1}{k}-k, 1\right)$ ，

因为 $\overrightarrow{BF_2} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$ ，所以 $\left(\frac{12k}{3k^2+4}\right) \cdot \left(\frac{1}{k}-k\right) + \frac{9k^2-4}{3k^2+4} = 0$ ，

解得 $k^2 = \frac{8}{3}$ ，所以 $k = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，所以直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x + 2$ 。



43. (2023 天津北辰 统考三模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ， O 为坐标原点，椭圆内

一点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MA}$ ， $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 。(1) 求椭圆的离心率；

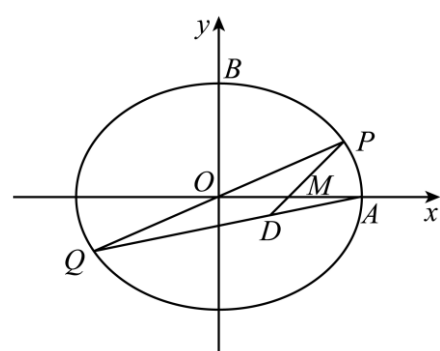
(2) 椭圆上一点 P 在第一象限，且满 $\angle AMP = \frac{\pi}{6}$ ， PO 与椭圆交于点 Q ，直线 AQ 交 PM 的延长线于点 D 。若 $\triangle PDQ$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ ，求椭圆的标准方程。【答案】(1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

【分析】(1) 由已知条件可知， M 为 OA 的中点根据 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，代入距离公式与比例关系可以求得 a, b, c 的关系，即可求得离心率。

(2) 设 MP 所在直线方程与椭圆联立，可以求得 P, Q 的坐标，再有直线 AQ, MP 联立可以求得 D 的坐标，用点到直线的距离与两点间的距离公式既可以求出三角形的面积，即可求得椭圆方程。

【详解】(1) 因为椭圆内一点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MA}$ ，所以 M 为 OA 的中点，则 $M\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ， $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，化简

得 $a^2 = 5b^2$ ，因为 $c^2 = a^2 - b^2$ ，所以 $c^2 = 4b^2$ ，所以椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2b}{\sqrt{5}b} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。



(2) 椭圆上一点 P 在第一象限，且满 $\angle AMP = \frac{\pi}{6}$ ，

所以直线 $k_{MP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，设直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)$ ，

$$\text{由直线方程与椭圆方程联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{a}{2}) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{5}a^2} = 1 \end{cases} \text{得,}$$

$$32x^2 - 20ax - 7a^2 = 0, \text{解得 } x_1 = -\frac{a}{4}, x_2 = \frac{7a}{8}, \text{因为点 } P \text{ 在第一象限, } x_p = \frac{7a}{8}, y_p = \frac{\sqrt{3}a}{8}, \text{因为 } P, Q \text{ 关于原点对称,}$$

$$P\left(\frac{7a}{8}, \frac{\sqrt{3}a}{8}\right), Q\left(-\frac{7a}{8}, -\frac{\sqrt{3}a}{8}\right), \text{因为 } A(a, 0), k_{AQ} = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}a}{8}}{a + \frac{7a}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{15},$$

$$\text{则直线 } AQ \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{15}(x - a), \text{联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{15}(x - a) \\ y = \frac{\sqrt{3}}{15}(x - a) \end{cases} \text{得, } D\left(\frac{3a}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{24}a\right),$$

$$\text{所以 } k_{PQ} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{8}}{\frac{7a}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{7}, \text{所以直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{7}x, \text{即 } \sqrt{3}x - 7y = 0, \text{所以点 } D \text{ 到直线的距离为}$$

$$d = \frac{\left| \frac{3\sqrt{3}a}{8} + \frac{7\sqrt{3}a}{24} \right|}{\sqrt{3+49}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}a, |PQ| = \frac{\sqrt{13}}{2}a, \text{所以 } \triangle PDQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}|PQ| \cdot d = \frac{\sqrt{3}a^2}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{12}, \text{所以 } a^2 = 5,$$

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1. \text{故椭圆方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

44. (2023 天津河东 统考二模) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点与抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 过椭圆右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程; (2) 若 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = -3$, 求直线 l 的方程;

(3) 已知直线 l 斜率存在, 若 AB 是椭圆 C 经过原点 O 的弦, 且 $AB \parallel l$, 求证: $\frac{|AB|^2}{|MN|}$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$ (3) 证明见解析

【分析】(1) 首先求出抛物线的焦点坐标, 依题意可得 $\begin{cases} b = 2 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 a , 即可求出椭圆方程;

(2) 分直线的斜率存在与不存在两种情况讨论, 当斜率不存在时直接求出 M, N 的坐标, 即可判断, 当直线 k 存在时, 设直线 $y = k(x - 1)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆方程, 消元, 列出韦达定理, 由 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = -3$ 得到方程, 求出 k 的值, 即可求出直线方程;

(3) 由弦长公式表示出 $|MN|$, 设直线 $AB: y = kx$, $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 联立求出 x_3, x_4 , 即可表示 $|AB|$, 代入即可得证.

【详解】(1) 抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点为 $(0, 2)$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} b = 2 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{解得 } a = \sqrt{5}, c = 1, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 由 (1) 可得 $F_2(1, 0)$, 由题意知, 直线 l 与椭圆必相交,

$$\text{①当直线斜率 } k \text{ 不存在时, 由 } \begin{cases} x = 1 \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases},$$

不妨令 $M\left(1, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(1, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{11}{5} \neq -3$, 不合题意;

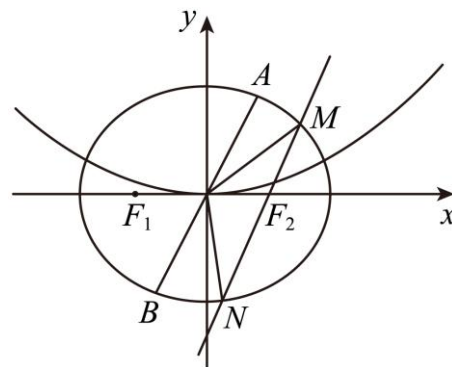
②当直线 k 存在时, 设直线 $y = k(x - 1)$, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 整理得 } (4 + 5k^2)x^2 - 10k^2x + 5k^2 - 20 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{10k^2}{4 + 5k^2}, x_1x_2 = \frac{5k^2 - 20}{4 + 5k^2},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = \frac{-11k^2 - 20}{4 + 5k^2} = -3,$$

解得 $k = \pm\sqrt{2}$, 所以直线方程为 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$ 或 $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.



$$(3) \text{ 证明: 由 (2) 可得 } |MN| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \frac{8\sqrt{5}(1 + k^2)}{4 + 5k^2},$$

$$\text{设直线 } AB: y = kx, \text{ 设 } A(x_3, y_3), B(x_4, y_4), \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } (4 + 5k^2)x^2 - 20 = 0,$$

$$\text{所以 } x_3 = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4 + 5k^2}}, x_4 = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4 + 5k^2}}, \text{ 所以 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_3 - x_4| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\frac{80}{4 + 5k^2}},$$

$$\text{所以 } \frac{|AB|^2}{|MN|^2} = \frac{(1 + k^2) \frac{80}{4 + 5k^2}}{\frac{64 \cdot 5 (1 + k^2)^2}{(4 + 5k^2)^2}} = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } \frac{|AB|}{|MN|} \text{ 为定值.}$$

45. (2023 天津河西 统考二模) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $B(0, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) 求椭圆 E 的标准方程; (2) 若直线 l 与椭圆 E 相切, 过点 $M(1, 0)$ 作直线 l 的垂线, 垂足为 N , O 为坐标原点, 证明:

$|ON|$ 为定值. 【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (2) $\sqrt{2}$

【分析】(1) 利用椭圆过点 $B(0,1)$ ，得到 $b=1$ ，再由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求出 a 的值，从而求到椭圆 E 的标准方程；(2) 对直线 l 的斜率为 0、斜率不存在及斜率存在且不为 0 三种情况讨论，从而求出 $|ON| = \sqrt{2}$ ，得到结论.

【详解】(1) 因为椭圆过点 $B(0,1)$ ，所以 $b=1$ ，又 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，得到 $a = \sqrt{2}$ ，所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 当直线斜率 l 存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y = kx + m (k \neq 0)$ ，

联立直线 l 和椭圆 E 的方程得 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 并整理，得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$ ，

因为直线 l 与椭圆 E 有且只有一个公共点，所以方程有两个相等的根， $\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 2) = 0$ ，

化简整理得 $m^2 = 2k^2 + 1$ 因为直线 MN 与 l 垂直，所以直线 MN 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 1)$ ，

联立得 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x - 1) \\ y = kx + m \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = \frac{1 - km}{1 + k^2} \\ y = \frac{k + m}{1 + k^2} \end{cases}$ ， $\therefore N(\frac{1 - km}{1 + k^2}, \frac{k + m}{1 + k^2})$ ，

所以 $|ON|^2 = \frac{(1 - km)^2 + (k + m)^2}{(1 + k^2)^2} = \frac{k^2m^2 + k^2 + m^2 + 1}{(1 + k^2)^2} = \frac{(k^2 + 1)(m^2 + 1)}{(1 + k^2)^2} = \frac{m^2 + 1}{1 + k^2}$

把 $m^2 = 2k^2 + 1$ 代入上式得， $|ON|^2 = \frac{(2k^2 + 2)}{(1 + k^2)} = 2$ ，所以 $|ON| = \sqrt{2}$ ，为定值；

当直线 l 斜率为 0 时，直线 $l: y = \pm 1$ ，过点 $M(1,0)$ 作直线 l 的垂线，则垂线方程为 $x = 1$ ，

此时 $N(1,1)$ 或 $N(1,-1)$ ， $|ON| = \sqrt{2}$ ，为定值；

当直线 l 斜率不存在时，直线 $l: x = \pm\sqrt{2}$ ，过点 $M(1,0)$ 作直线 l 的垂线，则垂线方程为 $y = 0$ ，

此时 $N(-\sqrt{2},0)$ 或 $N(\sqrt{2},0)$ ， $|ON| = \sqrt{2}$ ，为定值；综上所述， $|ON| = \sqrt{2}$ ，为定值.

46. (2023 天津 校联考二模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点为 F ，已知椭圆短轴长为 4，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆的方程；

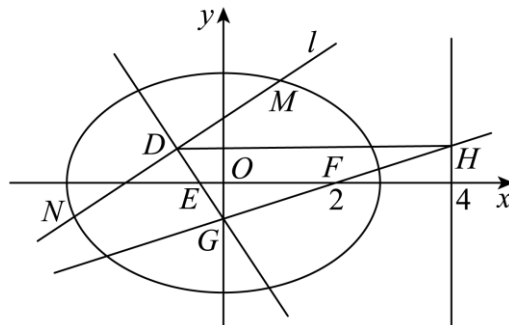
(2) 若直线 $l: y = kx + t (t \neq 0)$ 与椭圆相交于 M, N 两点，线段 MN 垂直平分线与直线 l 及 x 轴和 y 轴相交于点 D, E, G ，直线 GF 与直线 $x = 4$ 相交于点 H ，记三角形 EFG 与三角形 GDH 的面积分别为 S_1, S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $\frac{1}{4}$

【分析】(1) 由椭圆短轴长为 4，可得 $b = 2$ ，结合 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可求出 $a = 2\sqrt{2}$ ， $c = 2$ ，即可求出椭圆的方程；

(2) 由 (1) 可得右焦点 $F(2,0)$ ，再由线段 MN 的垂直平分线与 x, y 轴都相交，得 $k \neq 0$ ，联立方程组得

$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-8=0$ ，设出 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$ ， $y_1+y_2=\frac{2t}{1+2k^2}$ ，由中点坐标公式可得 $D\left(\frac{-2kt}{1+2k^2}, \frac{t}{1+2k^2}\right)$ ，再由两直线互相垂直可得直线 DG 的方程，即可求得 $E\left(\frac{-kt}{1+2k^2}, 0\right)$ ， $G\left(0, \frac{-t}{1+2k^2}\right)$ ，同理可得 $H\left(4, \frac{t}{1+2k^2}\right)$ ，由对称性可知 $|DE|=|EG|$ ， $|GF|=|FH|$ ，结合三角形的面积公式即可求出结果.



【详解】(1) 由题意可得 $2b=4$ ，即 $b=2$ ，

$$\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{解得: } a = 2\sqrt{2}, c = 2,$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2)

由(1)知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，所以右焦点 $F(2,0)$ ，

由直线 $l: y = kx + t (t \neq 0)$ ，且线段 MN 的垂直平分线与 x, y 轴都相交，所以 $k \neq 0$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并化简得: } (1+2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 8 = 0,$$

此时需满足 $\Delta = 8(8k^2 - t^2 + 4) > 0$ ，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2t = \frac{2t}{1+2k^2}, \text{ 所以 } D\left(\frac{-2kt}{1+2k^2}, \frac{t}{1+2k^2}\right),$$

$$\text{线段 } MN \text{ 的垂直平分线的方程为 } y - \frac{t}{1+2k^2} = -\frac{1}{k} \cdot \left(x + \frac{2kt}{1+2k^2}\right), \text{ 令 } y = 0, \text{ 解得 } x_E = \frac{-kt}{1+2k^2}, \text{ 则有 } E\left(\frac{-kt}{1+2k^2}, 0\right),$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 解得 } y_G = \frac{-t}{1+2k^2}, \text{ 则有 } G\left(0, \frac{-t}{1+2k^2}\right), \therefore D, G \text{ 关于 } E \text{ 点对称, 所以 } |DE| = |EG|,$$

$$\text{直线 } GF \text{ 的方程为 } y - 0 = \frac{0 - \frac{-t}{1+2k^2}}{2 - 0}(x - 2), \text{ 即 } y = \frac{t(x-2)}{2+4k^2}, \text{ 令 } x = 4, \text{ 解得 } y_H = \frac{t}{1+2k^2}, \text{ 则有 } H\left(4, \frac{t}{1+2k^2}\right),$$

$$\text{所以 } G, H \text{ 关于 } F \text{ 对称, 所以 } |GF| = |FH|, \text{ 所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}GE \cdot GF \cdot \sin \angle EGF}{\frac{1}{2}GD \cdot GH \cdot \sin \angle DGH} = \frac{1}{4}.$$

47. (2023 天津 统考二模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且 $|AF| = 3$ 。

(1) 求椭圆的方程；(2) 过点 A 作斜率为 $k (k < 0)$ 的直线与椭圆交于另一点 B ， C 是 y 轴上一点，且满足 $FC \perp AB$ ，若

$$\text{直线 } BC \text{ 的斜率为 } -\frac{3}{10}k, \text{ 求直线 } AB \text{ 的方程. 【答案】(1) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ (2) } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{15}}{2}x + \sqrt{15}$$

【分析】(1) 根据已知条件可得出关于 a, c 的值，求出这两个量的值，可求得 b 的值，进而可得出椭圆的方程；

(2) 求出点 B, C 的坐标，根据 $k_{BC} = -\frac{3}{10}k$ 可得出关于 k 的方程，结合 $k < 0$ 可求得 k 的值，进而可得出直线 AB 的方程.

【详解】(1) 解：由题意可得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ c + a = 3 \end{cases}$ ，解得 $a = 2$ ， $c = 1$ ，所以， $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$ ，

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 解：设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 2)$ ，设点 $B(x_0, y_0)$ ，

联立 $\begin{cases} y = k(x - 2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 可得 $(4k^2 + 3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$ ，

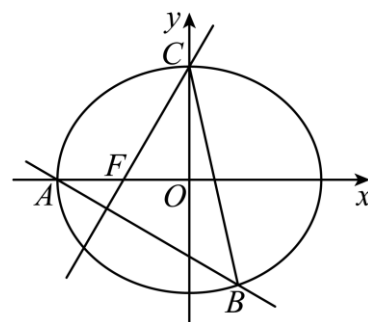
则 $x = 2$ 为方程 $(4k^2 + 3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$ 的一根，

所以， $2x_0 = \frac{16k^2 - 12}{4k^2 + 3}$ ，可得 $x_0 = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}$ ，则 $y_0 = k\left(\frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3} - 2\right) = -\frac{12k}{4k^2 + 3}$ ，即点 $B\left(\frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}, -\frac{12k}{4k^2 + 3}\right)$ ，

由 $FC \perp AB$ ，得 $k_{FC} = -\frac{1}{k}$ ，所以，直线 FC 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + 1)$ ，在直线 FC 的方程中，令 $x = 0$ 可得 $y = -\frac{1}{k}$ ，即

点 $C\left(0, -\frac{1}{k}\right)$ ，所以， $k_{BC} = \frac{-\frac{12k}{4k^2 + 3} + \frac{1}{k}}{\frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}} = -\frac{3}{10}k$ ，即 $12k^4 - 49k^2 + 15 = 0$ ，解得 $k^2 = \frac{1}{3}$ 或 $k^2 = \frac{15}{4}$ ，

因为 $k < 0$ ，解得 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = -\frac{\sqrt{15}}{2}$ ，所以，直线 AB 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{15}}{2}x + \sqrt{15}$ 。



48. (2023 天津二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$ 。(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点，在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$ ，使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$ ，若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由。【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (2) $m \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

【分析】(1) 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离最大值为 $a + c$ ，再结合离心率可得 a 和 c 的值，再由 $b^2 = a^2 - c^2$ 可得椭圆方程；(2) 将直线方程代入椭圆方程，利用弦长公式求得 $|MN|$ ，由 $|MP| = |NP|$ ， P 在线段 MN 的中垂线上，利用韦达定理求出 MN 中点 D 的坐标，写出直线 PD 的方程，令 $x = 0$ 得 $m = \frac{-t}{2k^2 + 1}$ ，平方后即可求得 m 范围；

【详解】(1) 由题设条件可得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $a + c = \sqrt{2} + 1$ ，解得 $a = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ，所以， $b^2 = a^2 - c^2 = 1$ ，

椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) 设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 $\begin{cases} y = kx + t, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 整理得： $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$ ，

则 $\Delta = 16k^2t^2 - 8(1 + 2k^2)(t^2 - 1) > 0$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1 + 2k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}$ ，

假设存在点 $P(0, m)$ 满足题意， $|MN| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ ，则 $|MN| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{2k^2 + 1 - t^2}}{2k^2 + 1} = 2$ ，

化简整理得 $t^2 = \frac{2k^2 + 1}{2(k^2 + 1)}$ ，此时判别式 $\Delta = 8(2k^2 + 1 - t^2) = 8\left[2k^2 + 1 - \frac{2k^2 + 1}{2(k^2 + 1)}\right] > 0$ 恒成立，

所以 $k \in \mathbb{R}$ 且 $k \neq 0$ ，设 MN 中点 $D(x_0, y_0)$ ，则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2kt}{2k^2 + 1}$ ， $y_0 = \frac{t}{2k^2 + 1}$ ，

由 $|MP| = |NP|$ ，则 P 在线段 MN 的中垂线上. 因为 $k \neq 0$ ，直线 PD 的方程为： $y - \frac{t}{2k^2 + 1} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{2kt}{2k^2 + 1}\right)$ ，

令 $x = 0$ ，则 $m = \frac{-t}{2k^2 + 1} \therefore m^2 = \frac{t^2}{(2k^2 + 1)^2} \therefore m^2 = \frac{1}{2(2k^2 + 1)(k^2 + 1)} \therefore k \neq 0, \therefore k^2 > 0, \therefore (2k^2 + 1)(k^2 + 1) > 1$

$\therefore 0 < m^2 < \frac{1}{2} \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 0$ 或 $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 即： $m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

49. (2023 天津红桥 统考二模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 在椭圆上，

(1) 求椭圆的离心率. (2) 设 A 为椭圆的右顶点， O 为坐标原点，若 Q 在椭圆上且满足 $|AQ| = |AO|$ ，求直线 OQ 的斜率的值.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (2) $\pm\sqrt{5}$

【分析】(1) 根据椭圆过点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ ，代入方程即可化简求出离心率；

(2) 设直线 OQ 的斜率为 k ，点 Q 坐标为 (x_0, y_0) ，联立椭圆方程可得 x_0 ，再由 $|AQ| = |AO|$ 得出 x_0 ，即可建立关于 k 的方程求解即可.

【详解】(1) $\because$ 点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 在椭圆上， $\therefore \frac{a^2}{5a^2} + \frac{a^2}{2b^2} = 1$ 整理得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{8} \therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2) 由题意可知，点 A 坐标为 $(-a, 0)$ ， $|AO| = a$. 设直线 OQ 的斜率为 k ，则其方程为 $y = kx$ ，

设点 Q 坐标为 (x_0, y_0) ，则 $\begin{cases} y_0 = kx_0 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ ，消去 y_0 ，整理得 $x_0^2 = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2}$ ①

由 $|AQ| = |AO|$ 得 $(x_0 + a)^2 + k^2 x_0^2 = a^2$. 整理得 $(1 + k^2)x_0^2 + 2ax_0 = 0$. 由于 $x_0 \neq 0$ ， $x_0 = -\frac{2a}{1 + k^2}$ ②

把②代入①得 $\frac{4a^2}{(1 + k^2)^2} = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2}$ ，整理得 $(1 + k^2)^2 = 4k^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 4$

由(1)知 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{8}{5}$ ，故 $(1 + k^2)^2 = \frac{32}{5}k^2 + 4$ 即 $5k^4 - 22k^2 - 15 = 0$ ，解得 $k^2 = 5 \therefore$ 直线 OQ 的斜率 $k = \pm\sqrt{5}$.

50. (2023 天津南开 统考二模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，左、右顶点分别为 A, B ，上顶点

为 D ，坐标原点 O 到直线 AD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (1) 求椭圆的方程；

(2) 过 A 点作两条互相垂直的直线 AP, AQ 与椭圆交于 P, Q 两点，求 $\triangle BPQ$ 面积的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2) $\frac{64}{25}$

【分析】(1) 由已知条件列方程组求得 a, b, c 得椭圆方程;

(2) 设 PQ 的直线方程为 $x = ty + m$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 直线方程代入椭圆方程得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$, 由垂直求得 m ,

再把 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ 代入 $S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{6}{5}\right) |y_1 - y_2|$, 换元后利用基本不等式得最大值.

【详解】(1) 由已知可得,
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ ab = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}, \text{解得, } a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}, \text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

(2) 设 PQ 的直线方程为 $x = ty + m$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 联立方程 $\begin{cases} x = ty + m, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ 整理得

$$(t^2 + 4)y^2 + 2mty + m^2 - 4 = 0, \text{ 所以 } y_1 + y_2 = \frac{-2mt}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 4}{t^2 + 4} \text{ 因为 } AP \perp AQ, A(-2, 0)$$

$$\text{所以 } (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 = 0, (ty_1 + m)(ty_2 + m) + 2(ty_1 + ty_2 + 2m) + 4 + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{即 } (t^2 + 1)y_1 y_2 + (mt + 2t)(y_1 + y_2) + (m + 2)^2 = 0. \text{ 所以 } (t^2 + 1) \cdot \frac{m^2 - 4}{t^2 + 4} + (mt + 2t) \cdot \frac{-2mt}{t^2 + 4} + (m + 2)^2 = 0.$$

$$\text{整理得 } 5m^2 + 16m + 12 = 0, \text{ 解得 } m = -\frac{6}{5} \text{ 或 } m = -2 \text{ (舍去),}$$

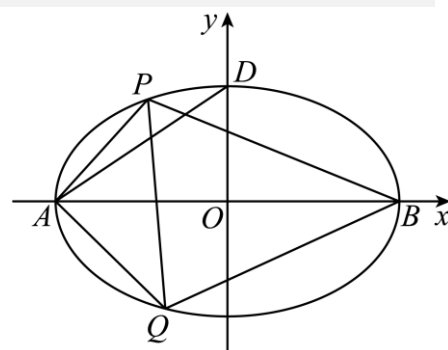
$$\text{所以 } \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{12t}{5(t^2 + 4)}, \\ y_1 y_2 = \frac{-64}{25(t^2 + 4)}. \end{cases} \text{ 所以 } S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{6}{5}\right) |y_1 - y_2| = \frac{8}{5} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{32}{25} \cdot \frac{\sqrt{25t^2 + 64}}{t^2 + 4},$$

$$\text{令 } \sqrt{25t^2 + 64} = u (u \geq 8), \text{ 则 } S_{\triangle BPQ} = \frac{32}{25} \cdot \frac{u}{\frac{u^2 - 64}{25} + 4} = \frac{32u}{u^2 + 36} = \frac{32}{u + \frac{36}{u}} \leq \frac{32}{8 + \frac{36}{8}} = \frac{64}{25},$$

$$\text{此时 } \triangle BPQ \text{ 最大值为 } \frac{64}{25}.$$

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中最值求法：

引入参数设出动直线方程，代入圆锥曲线方程后应用韦达定理，用点的坐标表示出待求最值的量的表达式，如果只有一个参数，则直接代入韦达定理的结果后，利用函数知识、不等式知识或导数知识求得最值，如果有两个参数，则利用韦达定理的结果和题中条件求出一个参数值或两个参数关系，消去一个参数，然后再求得最值.



51. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $A(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过点 A 且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆交于点 D 与 y 轴交于点 E .

(1) 求椭圆的方程; (2) 设点 P 为 AD 的中点.

(i) 若 x 轴上存在点 Q , 对于任意的 $k (k \neq 0)$, 都有 $OP \perp EQ$ (O 为原点), 求出点 Q 的坐标;

(ii) 射线 PO (O 为原点) 与椭圆 C 交于点 M , 满足 $\frac{\sqrt{1+4k^2} \tan \angle AMD}{MA \cdot MD} = \frac{6}{MA \cdot MD}$, 求正数 k 的值.

【答案】(I) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (II) (i) 见解析; (ii) $k = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

【分析】(I) 根据椭圆的左顶点为 $A(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 结合性质 $a^2 = b^2 + c^2$, 列出关于 a 、 b 、 c 的方程组, 求出 a 、 b , 即可得结果; (II) (i) 假设 x 轴上存在着点 $Q(m, 0)$ 使得 $OP \perp EQ$, 设 $AD: y = k(x+2)$, 与椭圆方程联立, 求得 $P\left(\frac{-8k^2}{1+4k^2}, \frac{2k}{1+4k^2}\right)$, 利用斜率公式, 结合 $k_{EQ} \cdot k_{OP} = -1$ 可求得 $m = -\frac{1}{2}$; (ii) 设 PO 所在直线方程为 $y = -\frac{1}{4k}x$,

与椭圆方程联立, 利用弦长公式、点到直线距离公式结合韦达定理求出 $S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+4k^2} + 2k}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{4\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1} = \frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}$,

再由 $\frac{\sqrt{1+4k^2} \tan \angle AMD}{MA \cdot MD} = \frac{6}{MA \cdot MD}$ 可得 $S_{\triangle AMD} = \frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}$, 解方程即可得结果.

【详解】(I) 由已知得 $a = 2$ 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore b = 1$ 椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

(II) (i) 假设 x 轴上存在着点 $Q(m, 0)$ 使得 $OP \perp EQ$, 设 AD 所在的直线方程为: $y = k(x+2)$, 点 $D(x_1, y_1)$

由 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = k(x+2) \end{cases}$ 解得 $(4k^2+1)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$, $\Delta = 16 > 0$,

$-2 + x_1 = \frac{-16k^2}{4k^2+1}$ $x_P = \frac{-2+x_1}{2} = \frac{-8k^2}{1+4k^2}$, $\therefore P\left(\frac{-8k^2}{1+4k^2}, \frac{2k}{1+4k^2}\right)$, $E(0, 2k)$ $\therefore k_{EQ} = \frac{2k}{-m}$, $k_{OP} = \frac{-1}{4k}$,

$\because OP \perp EQ, \therefore k_{EQ} \cdot k_{OP} = -1$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$ $\therefore x$ 轴上存在着点 $Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 使得 $OP \perp EQ$ 成立,

(ii) 设 PO 所在直线方程为 $y = -\frac{1}{4k}x$, 则

$\begin{cases} y = -\frac{1}{4k}x \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{16k^2}{4k^2+1}, \therefore M\left(\frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$, M 到直线 l 的距离: $d = \frac{\sqrt{1+4k^2} + 2k}{\sqrt{k^2+1}}$ $|AD| = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}$,

$\frac{\sqrt{1+4k^2} \tan \angle AMD}{MA \cdot MD} = \frac{6}{MA \cdot MD}, \therefore \frac{\sqrt{1+4k^2} \sin \angle AMD}{\cos \angle AMD} = \frac{6}{|MA| |MD| \cos \angle AMD}$

即 $\therefore \frac{1}{2} \sqrt{1+4k^2} \sin \angle AMD |MA| |MD| = 3, \therefore S_{\triangle AMD} = \frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}$,

$\therefore S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+4k^2} + 2k}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{4\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1} = \frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}$

$$\text{解得 } \sqrt{1+4k^2} = 4k, \because k > 0 \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

【点睛】本题主要考查待定系数法求椭圆的标准方程、以及解析几何中的存在性问题，属于难题.解决存在性问题，先假设存在，推证满足条件的结论，若结论正确则存在，若结论不正确则不存在，注意：①当条件和结论不唯一时要分类讨论；②当给出结论而要推导出存在的条件时，先假设成立，再推出条件；③当条件和结论都不知，按常规方法题很难时采取另外的途径.

52. (2023 天津河北 统考二模) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B ，上顶点为 D ，点 P 是椭圆 C 上异于顶点的动点，已知椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，短轴长为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程；(2) 若直线 AD 与直线 BP 交于点 M ，直线 DP 与 x 轴交于点 N ，求证：直线 MN 恒过某定点，并求出该定点. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2) 证明见解析，定点为 $(2, 1)$

【分析】(1) 利用椭圆的离心率及其短轴长联立方程组即可求解；

(2) 设直线 BP 和直线 DP 的方程，并求出直线 AD 的方程，再求出点 M, N 的坐标，及其直线 MN 的方程，即可求出直线 MN 恒过某定点.

【详解】(1) 由已知可得 $\begin{cases} 2b = 2 \\ e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；

(2) 设直线 BP 的方程为 $y = k_1(x - 2)$ ($k_1 \neq 0$ 且 $k_1 \neq \pm \frac{1}{2}$)，直线 DP 的方程为 $y = k_2x + 1$ ($k_2 \neq 0$ 且 $k_2 \neq \pm \frac{1}{2}$)，

则直线 DP 与 x 轴的交点为 $N\left(-\frac{1}{k_2}, 0\right)$ ，直线 AD 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，则直线 BP 与直线 AD 的交点为

$$M\left(\frac{4k_1 + 2}{2k_1 - 1}, \frac{4k_1}{2k_1 - 1}\right), \text{ 将 } y = k_2x + 1 \text{ 代入方程 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ 得 } (4k_2^2 + 1)x^2 + 8k_2x = 0,$$

$$\text{则点 } P \text{ 的横坐标为 } x_P = \frac{-8k_2}{4k_2^2 + 1}, \text{ 点 } P \text{ 的纵坐标为 } y_P = k_2 \cdot \frac{-8k_2}{4k_2^2 + 1} + 1 = \frac{1 - 4k_2^2}{4k_2^2 + 1},$$

将点 P 的坐标代入直线 BP 的方程 $y = k_1(x - 2)$ ，整理得 $(1 + 2k_2)(1 - 2k_2) = -2k_1(1 + 2k_2)^2$ ，

$\therefore 1 + 2k_2 \neq 0, \therefore 2k_1 + 4k_1k_2 = 2k_2 - 1$ ，由 M, N 点坐标可得直线 MN 的方程为：

$$y = \frac{4k_1k_2}{4k_1k_2 + 2k_2 + 2k_1 - 1} \left(x + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{2k_1k_2x + 2k_1}{2k_2 - 1} = \frac{2k_1k_2x + 2k_2 - 1 - 4k_1k_2}{2k_2 - 1},$$

$$\text{即 } y = \frac{2k_1k_2}{2k_2 - 1}(x - 2) + 1, \text{ 则直线 } MN \text{ 过定点 } (2, 1).$$

53. (2023 天津河北 统考二模) 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = x \ln a - a \ln x + (x - e)^2$ ，其中 e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2)当 $a = e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3)求证: 函数 $f(x)$ 存在极值点, 并求极值点 x_0 的最小值.

【答案】(1) $(1-2e)x - y + e^2 = 0$ (2)单调增区间为 $(e, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, e)$ (3)证明见解析, x_0 的最小值是 e .

【详解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = -\ln x + (x - e)^2$, $f(1) = -\ln 1 + (1 - e)^2 = (1 - e)^2$,

$f'(x) = -\frac{1}{x} + 2(x - e)$, $f'(1) = -1 + 2(1 - e) = 1 - 2e$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程

$y - (1 - e)^2 = (1 - 2e)(x - 1)$, 切线方程 $(1 - 2e)x - y + e^2 = 0$.

(2) 当 $a = e$ 时, $f(x) = x - e\ln x + (x - e)^2$,

则 $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} + 2(x - e) = \frac{2x^2 + (1 - 2e)x - e}{x} = \frac{(2x + 1)(x - e)}{x}$, ($x > 0$) 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > e$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < e$;

所以, 函数 $y = g(x)$ 的单调增区间为 $(e, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, e)$.

(3) $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} + 2(x - e) = \frac{2x^2 + (\ln a - 2e)x - a}{x}$

令 $t(x) = 2x^2 + (\ln a - 2e)x - a = 0$, 因为 $\Delta = (\ln a - 2e)^2 + 8a > 0$,

所以方程 $2x^2 + (\ln a - 2e)x - a = 0$, 有两个不相等的实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),

又因为 $x_1 x_2 = -\frac{a}{2} < 0$, 所以 $x_1 < 0 < x_2$, 令 $x_0 = x_2$, 列表如下:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以 $f(x)$ 存在极值点 x_0 . 所以存在 x_0 使得 $2x_0^2 + (\ln a - 2e)x_0 - a = 0$ 成立, 所以存在 x_0 使得 $2x_0^2 - 2ex_0 = a - x_0 \ln a$,

所以存在 x_0 使得 $a - x_0 \ln a = 2x_0^2 - 2ex_0$ 对任意的 $a > 0$ 有解, 因此需要讨论等式左边的关于 a 的函数,

记 $u(t) = t - x_0 \ln t$, 所以 $u'(t) = 1 - \frac{x_0}{t}$,

当 $0 < t < x_0$ 时, $u'(t) < 0$, $u(t)$ 单调递减; 当 $t > x_0$ 时, $u'(t) > 0$, $u(t)$ 单调递增.

所以当 $t = x_0$ 时, $u(t) = t - x_0 \ln t$ 的最小值为 $u(x_0) = x_0 - x_0 \ln x_0$.

所以需要 $2x_0^2 - 2ex_0 = a - x_0 \ln a \geq x_0 - x_0 \ln x_0$, 即需要 $2x_0^2 - (2e + 1)x_0 + x_0 \ln x_0 \geq 0$,

即需要 $2x_0 - (2e + 1) + \ln x_0 \geq 0$, 即需要 $2x_0 + \ln x_0 - (2e + 1) \geq 0$

因为 $v(t) = 2t + \ln t - (2e + 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $v(x_0) \geq v(e) = 0$,

所以需要 $x_0 > e$ ，故 x_0 的最小值是 e 。

54. (2023 天津南开 统考二模) 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1$ ， $g(x) = m \ln x + e^{-x}$ ($m \in \mathbf{R}$)。

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；(2) 若 $0 < a < 1$ ，且 $b e^{\frac{1-a}{a}} = 1$ ，求证： $\log_a b > 1$ ；

(3) 若 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，证明： $|g(x_1) - g(x_2)| < 1$ 。

【分析】(1) 利用导数确定函数的单调性，从而即可求得最小值；

(2) 由(1)知 $f(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$ ，即 $x \ln x \geq x - 1$ ($x > 0$)，由 $b e^{\frac{1-a}{a}} = 1$ ，得 $b \ln b = -\frac{1}{a}$ ，即 $b \ln b = -a$ ，从而 $0 < b < a < 1$ ，

再由对数函数的性质可得 $\log_a b > \log_a a = 1$ ，从而得证；

(3) 依题意可得 $g'(x) = \frac{m}{x} - \frac{1}{e^x} = 0$ 有两个不等正根 x_1, x_2 ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，由 $g'(x) = 0$ ，得 $m = \frac{x}{e^x}$ ，设 $\varphi(x) = \frac{x}{e^x}$ ，

利用导数可得 $x_1 \in (0, 1)$ ， $x_2 \in (1, +\infty)$ ，令 $h(x) = \frac{x \ln x + 1}{e^x}$ ，由导数可得 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，结合(2)可得

$x \ln x + 1 < x(x-1) + 1$ ，令 $m(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$ ($x \in (0, 1)$)，利用导数得 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，从而得 $\frac{1}{e} < g(x_1) < 1$ ，

$0 < g(x_2) < \frac{1}{e}$ ，即可得证。

【详解】(1) 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \ln x$ ，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时取得最小值 0。

(2) 证明：由(1)知 $f(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$ ，所以 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 0$)。由 $b e^{\frac{1-a}{a}} = 1$ ，得 $b > 0$ 且 $\ln b = 1 - \frac{1}{a}$ ，

所以 $\ln b - \ln a = 1 - \frac{1}{a} - \ln a < 0$ ，即 $\ln b < \ln a$ ，从而 $0 < b < a < 1$ 。所以 $\log_a b > \log_a a = 1$ 。

(3) 证明：依题意， $g'(x) = \frac{m}{x} - \frac{1}{e^x} = 0$ 有两个不等正根 x_1, x_2 ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，

由 $g'(x) = \frac{m}{x} - \frac{1}{e^x} = 0$ ，得 $m = \frac{x}{e^x}$ 。设 $\varphi(x) = \frac{x}{e^x}$ ，由 $\varphi'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ ，知 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。

且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $\varphi(x) > 0$ ，可得 $x_1 \in (0, 1)$ ， $x_2 \in (1, +\infty)$ 。

$g(x_1) = m \ln x_1 + e^{-x_1} = \frac{x_1 \ln x_1 + 1}{e^{x_1}}$ ， $g(x_2) = m \ln x_2 + e^{-x_2} = \frac{x_2 \ln x_2 + 1}{e^{x_2}}$ ，令 $h(x) = \frac{x \ln x + 1}{e^x}$ ，则 $h'(x) = \frac{(1-x) \ln x}{e^x}$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $(1-x) \ln x < 0$ ，所以 $h'(x) < 0$ ，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $(1-x) \ln x < 0$ ，所以 $h'(x) < 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递减。因为 $0 < x_1 < 1$ ， $x_2 > 1$ ，所以 $h(x_1) > h(1) = \frac{1}{e}$ ， $0 < h(x_2) < h(1) = \frac{1}{e}$ 。

由(2)当 $x > 0$ 时，有 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ ，所以 $\ln \frac{1}{x} > 1 - x$ ，即 $-\ln x > 1 - x$ ，

所以 $\ln x < x - 1$ ，从而 $x \ln x + 1 < x(x-1) + 1$ 。

令 $m(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$ ($x \in (0, 1)$)， $m'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x} < 0$ 所以 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减。

所以 $m(x) < m(0) = 1$ ，即 $x(x-1) + 1 < e^x$ 。所以 $g(x_1) = \frac{x_1 \ln x_1 + 1}{e^{x_1}} < \frac{x_1^2 - x_1 + 1}{e^{x_1}} < 1$ 。

所以 $\frac{1}{e} < g(x_1) < 1$, $0 < g(x_2) < \frac{1}{e}$. 所以 $|g(x_1) - g(x_2)| < 1$.

55. (2023 天津红桥 统考二模) 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x} (a > 0)$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值; (2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间;

(3) 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围. 【答案】(1) 极小值为 1, 无极大值

(2) 单调递增区间为 $(1+a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1+a)$. (3) $\left(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty\right)$

【分析】(1) 研究 $f(x) = x - \ln x$ 的单调区间, 进而求出 $f(x)$ 的极值; (2) 先求 $h'(x)$, 再解不等式 $h'(x) > 0$ 与 $h'(x) < 0$, 求出单调区间, 注意题干中的 $a > 0$ 的条件; (3) 先把题干中的问题转化为在 $x \in [1, e]$ 上有 $h(x)_{\min} < 0$, 再结合第二问研究的 $h(x)$ 的单调区间, 对 a 进行分类讨论, 求出不同范围下的 $h(x)_{\min}$, 求出最后结果

【详解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

令 $f'(x) = 0$ 得: $x = 1$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 故 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = 1$, 无极大值

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x} (a > 0)$, 定义域为 $(0, +\infty)$

$$h'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2} = \frac{x^2 - ax - 1 - a}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1-a)}{x^2}$$

因为 $a > 0$, 所以 $1+a > 0$, 令 $h'(x) > 0$ 得: $x > 1+a$, 令 $h'(x) < 0$ 得: $0 < x < 1+a$, 所以 $h(x)$ 在 $(1+a, +\infty)$ 单调递增, 在 $(0, 1+a)$ 单调递减.

综上: $h(x)$ 单调递增区间为 $(1+a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1+a)$.

(3) 存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 等价于存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $h(x_0) < 0$, 即在 $x \in [1, e]$ 上有 $h(x)_{\min} < 0$

由 (2) 知, $h(x)$ 单调递增区间为 $(1+a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1+a)$, 所以

当 $1+a > e$, 即 $a > e-1$ 时, $h(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上单调递减, 故 $h(x)$ 在 $x = e$ 处取得最小值, 由

$$h(x)_{\min} = h(e) = e - a + \frac{1+a}{e} < 0 \text{ 得: } a > \frac{e^2+1}{e-1}, \text{ 因为 } \frac{e^2+1}{e-1} > e-1, \text{ 故 } a > \frac{e^2+1}{e-1}.$$

当 $1 < 1+a < e$, 即 $0 < a < e-1$ 时, 由 (2) 知: $h(x)$ 在 $x \in (1, 1+a)$ 上单调递减, 在 $x \in (1+a, e)$ 上单调递增, $h(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上的最小值为

$$\text{令 } h(1+a) = 2 + a - a \ln(1+a)$$

因为 $0 < \ln(1+a) < 1$, 所以 $0 < a \ln(1+a) < a$, 则 $2 + a - a \ln(1+a) > 2$, 即 $h(1+a) > 2$, 不满足题意, 舍去

综上所述： a 的取值范围为 $\left(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty\right)$

【点睛】导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题．注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理．

56. (2023 天津二模) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ， $g(x) = x(e^x - x)$ ．

(1) 若直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切，求实数 a 的值；

(2) 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$ ， $x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ，使 $f(x_1) = g(x_2) = 0$ ，且 $x_1 - x_2 > 1$ ，求实数 a 的取值范围；

(3) 当 $a = -1$ 时，求证： $f(x) \leq g(x) + x^2$ ．

【答案】(1) $a = -1$ ；(2) $0 < a < 1$ ；(3) 详见解析．

【分析】(1) 由 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - a$ ．可得切线方程为： $y = \left(\frac{1}{x_0} - a\right)x + \ln x_0$ ，与直线 $y = 2x$ 完全相同，可得 $\frac{1}{x_0} - a = 2$ ， $\ln x_0 = 0$ ．即可得出 a ．

(2) 设 $t(x) = e^x - x$ ， $x \in \mathbf{R}$ ． $t'(x) = e^x - 1$ ，利用导数研究其单调性可得 0 是函数 $t(x)$ 的极小值点，可得 $t(x) \geq 0$ ．再由 $g(x_2) = 0$ ，解得 x_2 ，可得 x_1 的范围．从而问题可转化为函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上有零点．由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$ ．对 a 分类讨论，研究其单调性即可得出．

(3) 构造函数 $F(x) = x^2 + g(x) - f(x)$ ，利用导数研究其单调性极值与最值即可得出．

【详解】(1) 设切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$ ，

由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ ，得 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - a$ ，所以切线方程为： $y - (\ln x_0 - ax_0 + 1) = \left(\frac{1}{x_0} - a\right)(x - x_0)$ ，即 $y = \left(\frac{1}{x_0} - a\right)x + \ln x_0$ ．

因为直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切，所以 $\begin{cases} \frac{1}{x_0} - a = 2 \\ \ln x_0 = 0 \end{cases}$ ，解得 $a = -1$ ．

(2) 设 $t(x) = e^x - x$ ，则 $t'(x) = e^x - 1$ ，令 $t'(x) = 0$ ，得 $x = 0$ ，

且当 $x < 0$ 时， $t'(x) < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $t'(x) > 0$ ，

所以 $t(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $t(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极小值为 0 ，即 $t(x) \geq 0$ ．

由 $g(x_2) = x_2(e^{x_2} - x_2) = 0$ ，可得 $x_2 = 0$ ，

所以 $x_1 - x_2 > 1$ 即为 $x_1 > 1$ ，

由题意可得：函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上有零点．

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(1) = 1 - a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$. ①若 $\frac{1}{a} \geq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x) < f(1) = 1 - a \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点;

②若 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$ 时, 当 $x \in \left(1, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} > 0$,

因为 $f(1) = 1 - a > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上无零点; 又 $f\left(\frac{4}{a^2}\right) = \ln \frac{4}{a^2} - a \cdot \frac{4}{a^2} + 1 = \ln 4 - 2 \ln a - \frac{4}{a} + 1$,

令 $h(a) = \ln 4 - 2 \ln a - \frac{4}{a} + 1$, 则 $h'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4-2a}{a^2} > 0$ 在 $a \in (0, 1)$ 上恒成立, 所以 $h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以 $h(a) < h(1) = \ln 4 - 3 < 0$, 即 $f\left(\frac{4}{a^2}\right) < 0$, 所以 $f\left(\frac{1}{a}\right) \cdot f\left(\frac{4}{a^2}\right) < 0$, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 的图象连续不断,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a^2}\right)$ 上有且只有一个零点, 即函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上有零点. 综上所述, $0 < a < 1$.

(3) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x + x + 1$, 令 $F(x) = g(x) - f(x) = xe^x - \ln x - x - 1$ ($x > 0$), 则

$$F'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x+1}{x}(xe^x - 1), \text{ 令 } G(x) = xe^x - 1, \text{ 则当 } x > 0 \text{ 时, } G'(x) = (x+1)e^x > 0,$$

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $G(0) = -1 < 0$, $G(1) = e - 1 > 0$, 所以函数 $G(x)$ 存在唯一的零点

$x_0 \in (0, +\infty)$, 且当 $x_0 \in (0, x_0)$ 时, $G(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $G(x) > 0$.

所以当 $x_0 \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$.

所以函数 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增, 故 $F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - 1$,

由 $G(x_0) = 0$ 得: $x_0 e^{x_0} - 1 = 0$, 两边取对数得: $\ln x_0 + x_0 = 0$, 故 $F(x_0) = 0$,

所以 $g(x) - f(x) \geq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$.

57. (2023 天津 统考二模) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = x + a \sin x + b \ln x$.

(1) 当 $a = 0, b = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = -\frac{1}{2}, b \neq 0$ 时, 设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x) > 0$ 恒成立, 求证: 存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < -1$;

(3) 设 $0 < a < 1, b < 0$, 若存在 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$), 证明: $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 2\sqrt{\frac{-b}{a+1}}$.

【分析】(1) 当 $a = 0, b = -1$ 时, 求得 $f'(x) = \frac{x-1}{x}$, 结合导数的符号, 即可求解;

(2) 当 $a = -\frac{1}{2}, b \neq 0$ 时, 求得 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{b}{x}$, 根据题意 $1 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{b}{x} > 0$ 恒成立, 取 $x_0 = e^{-\frac{3}{b}}$, 得到 $f(x_0) < -1$,

即可求解;

(3) 设 $x_1 < x_2$, 得到 $(x_2 - x_1) + a(\sin x_2 \sin x_1) = -b(\ln x_2 - \ln x_1)$, 转化为 $-b \ln \frac{x_2}{x_1} < (a+1)(x_2 - x_1)$, 设 $h(x) = \ln x - 2 \times \frac{x-1}{x+1}$,

求得 $h'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$, 根据 $h(x) > h(1) = 0$, 得到 $\ln \sqrt{x} > 2 \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, 进而得到 $\ln \frac{x_2}{x_1} > 4 \times \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$, 进而证得结论.

【详解】(1) 解: 由函数 $f(x) = x + a \sin x + b \ln x$, 可得其定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a = 0, b = -1$ 时, 可得 $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 可得 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 可得 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间 $(0, 1)$.

(2) 解: 当 $a = -\frac{1}{2}, b \neq 0$ 时, 可得 $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x + b \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{b}{x}$,

因为 $f'(x) > 0$ 恒成立, 即 $1 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{b}{x} > 0$ 恒成立, 令 $h(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{b}{x}, x > 0$,

若 $b < 0$, 则 $\frac{b}{x} < 0$, 存在 $x = -\frac{b}{2}$, 使得 $h(-\frac{b}{2}) = 1 - \frac{1}{2} \cos(-\frac{b}{2}) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 不符合题意, 所以 $b > 0$,

取 $x_0 = e^{-\frac{3}{b}}$, 则 $0 < x_0 < 1$, 可得 $f(x_0) = e^{-\frac{3}{b}} + a \sin e^{-\frac{3}{b}} + b \ln e^{-\frac{3}{b}} = e^{-\frac{3}{b}} - \frac{1}{2} \sin e^{-\frac{3}{b}} - 3 < -1$, 即存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < -1$.

(3) 解: 由函数 $f(x) = x + a \sin x + b \ln x$, 可得 $f'(x) = 1 + a \cos x + \frac{b}{x}$,

设 $x_1 < x_2$, 因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 可得 $x_1 + a \sin x_1 + b \ln x_1 = x_2 + a \sin x_2 + b \ln x_2$ 则

$(x_2 - x_1) + a(\sin x_2 \sin x_1) = -b(\ln x_2 - \ln x_1)$ 又由 $y = x - \sin x$, 可得 $y' = 1 - \cos x \geq 0$, 所以函数 $y = x - \sin x$ 为单调递增

函数, 所以 $x_2 - \sin x_2 > x_1 - \sin x_1$, 即 $\sin x_2 - \sin x_1 < x_2 - x_1$,

所以 $-b(\ln x_2 - \ln x_1) < (a+1)(x_2 - x_1)$, 即 $-b \ln \frac{x_2}{x_1} < (a+1)(x_2 - x_1)$, 设 $h(x) = \ln x - 2 \times \frac{x-1}{x+1}$, 可得

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $h(x) > h(1) = 0$, 即 $\ln x > 2 \times \frac{x-1}{x+1}$, 所以 $\ln \sqrt{x} > 2 \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$,

即 $\ln x > 4 \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, 所以 $\ln \frac{x_2}{x_1} > 4 \times \frac{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-1}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+1} = 4 \times \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$, 代入可得:

$4 \cdot (-b) \times \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}} < (a+1)(x_2 - x_1) = (a+1)(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})$,

则 $4 \cdot \frac{-b}{a+1} < (\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})^2$, 所以 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} > 2\sqrt{\frac{-b}{a+1}}$.

58. (2023 天津 校联考二模) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{x} - 1$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程; (2) 若函数 $g(x) = f(x) - \frac{a}{x}$ 有两个零点 x_1, x_2 (其中 $x_1 < x_2$).

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 若存在实数 n , 当 $n \leq 3$ 时, 使不等式 $m < x_1 e^{x_1} + n x_2 e^{x_2}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $(e-1)x - y = 0$ (2) (i) $a > 1$; (ii) $(-\infty, 4]$

【详解】(1) 由 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{x} - 1$, 则 $f'(x) = e^x - \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

所以 $f(1) = e - 1$, 即切点坐标为 $(1, e - 1)$, 切线斜率 $k = f'(1) = e - 1$,

故切线方程为 $y - (e - 1) = (e - 1)(x - 1)$, 即 $(e - 1)x - y = 0$;

(2) (i) 由题意 $g(x) = 0$ 有两个不等的正根, 等价于 $xe^x - \ln x - x = a$ 有两个不等的实根,

设 $h(x) = xe^x - \ln x - x (x > 0)$, 则 $h'(x) = (x + 1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = (x + 1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$,

设 $m(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $m'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 则 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, $m\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $m(1) = e - 1 > 0$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $m(x_0) = 0$, 得 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ ①.

当 $x \in (0, x_0)$ 时 $m(x) < 0$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为单调减函数;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时 $m(x) > 0$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为单调增函数.

所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0$, 代入①式得 $h(x_0) = 1$, 当 x 趋向于 0 或 $+\infty$ 时 $h(x)$ 趋向 $+\infty$,

所以 $a > 1$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个零点, 即函数 $g(x)$ 有两个零点.

(ii) 设 $\varphi(n) = x_1 e^{x_1} + n x_2 e^{x_2}$, 而 $x_2 e^{x_2} > 0$, 所以 $\varphi(n)$ 在 $(-\infty, 3]$ 为单调递增函数,

由题意, $m < \varphi(n)_{\max} = \varphi(3) = x_1 e^{x_1} + 3 x_2 e^{x_2}$ 恒成立即可,

令 $g(x) = 0$, 得 $xe^x - \ln x - x - a = 0$, 即 $xe^x - \ln(xe^x) = a$ 有两正根 x_1, x_2 , $0 < x_1 < x_2$,

设 $t = xe^x$ 且 $x > 0$, 则 $t - \ln t = a$ 有两个正根 $t_1 = x_1 e^{x_1}$, $t_2 = x_2 e^{x_2}$,

由 $t' = (x + 1)e^x > 0$ 恒成立, 故 $t = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $t > 0$,

由 $0 < x_1 < x_2$, 得 $0 < t_1 < t_2$, 得 $\begin{cases} t_1 - \ln t_1 - a = 0 \\ t_2 - \ln t_2 - a = 0 \end{cases}$, 则 $\ln \frac{t_2}{t_1} = t_2 - t_1$,

令 $u = \frac{t_2}{t_1} > 1$, 由 $\begin{cases} u = \frac{t_2}{t_1} \\ \ln \frac{t_2}{t_1} = t_2 - t_1 \end{cases}$, 整理得 $\begin{cases} t_1 = \frac{\ln u}{u - 1} \\ t_2 = \frac{u \ln u}{u - 1} \end{cases}$,

对于 $x_1 e^{x_1} + 3 x_2 e^{x_2} = t_1 + 3 t_2 = \frac{(3u + 1) \ln u}{u - 1} > m$ 等价于 $m < \frac{(3u + 1) \ln u}{u - 1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

等价于 $(3u + 1) \ln u - m(u - 1) > 0$ 在 $u \in (1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $k(u) = (3u + 1) \ln u - m(u - 1) (u > 1)$, 则 $\phi(u) = k'(u) = 3 \ln u + \frac{1}{u} + 3 - m$,

注意到 $k(1) = 0$, 则 $k'(1) = 4 - m \geq 0$, 解得 $m \leq 4$,

当 $m \leq 4$ 时, 当 $u > 1$ 时 $\phi'(u) = \frac{3u - 1}{u^2} > 0$ 恒成立, 所以 $\phi(u) = k'(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $k'(u) > k'(1) = 4 - m \geq 0$,

所以 $k(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $k(u) > k(1) = 0$, 所以 $m \leq 4$ 符合题意;

当 $m > 4$ 时, $k'(1) = 4 - m < 0$, $k'(e^m) = 2m + \frac{1}{e^m} + 3 > 0$, 存在 $u_0 \in (1, e^m)$ 使 $k'(u_0) = 0$, 又 $k'(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $u \in (1, u_0)$ 时 $k'(u) < 0$, $k(u)$ 为单调递减, 则 $k(u_0) < k(1) = 0$, 不合题意.

综上: 实数 m 的取值范围 $(-\infty, 4]$.

59. (2023 天津河西 统考二模) 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{e}$, 求函数 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时的 x 值; (2) 求证: $\ln x < e^x - 1$;

(3) 若函数 $f(x) \leq xe^x - (a+1)\ln x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【分析】(1) 根据导数研究函数单调性求解函数最值即可;

(2) 结合 (1) 将问题转化为证明 $\frac{1}{e}x < e^x - 1, x > 0$, 进而构造函数证明即可;

(3) 由题知 $xe^x - a(x + \ln x) \geq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 进而构造函数 $h(x) = xe^x - a(x + \ln x), x > 0$, 结合函数性质, 分当 $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$ 时三种情况讨论求解即可.

【详解】(1) 解: 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = \frac{1}{e}x - \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e$,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得最小值, $f(x)_{\min} = f(e) = 0$.

(2) 解: 由 (1) 知, 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$, 即 $\frac{1}{e}x \geq \ln x$, 所以, 要证 $\ln x < e^x - 1$ 成立, 只需证 $\frac{1}{e}x < e^x - 1, x > 0$,

令 $g(x) = e^x - \frac{1}{e}x - 1, x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - \frac{1}{e}$, 所以, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$ 恒成立,

所以, 函数 $g(x) = e^x - \frac{1}{e}x - 1, x > 0$ 为单调递增函数, 所以, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $e^x - \frac{1}{e}x - 1 > 0$,

所以 $\frac{1}{e}x < e^x - 1, x > 0$, 所以 $\ln x < e^x - 1$ 成立

(3) 解: 因为函数 $f(x) \leq xe^x - (a+1)\ln x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立所以 $xe^x - a(x + \ln x) \geq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

令 $h(x) = xe^x - a(x + \ln x), x > 0$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x - a(1 + \frac{1}{x}) = (x+1)(e^x - \frac{a}{x})$,

当 $a = 0$ 时, $h'(x) = (x+1)e^x > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以, 由 $h(x) = xe^x$ 可得 $h(x) > 0$, 即满足 $xe^x - a(x + \ln x) \geq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立;

当 $a < 0$ 时, 则 $-a > 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为当 x 趋近于 0^+ 时, $h(x)$ 趋近于负无穷, 不成立, 故不满足题意;

当 $a > 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$ 得 $a = xe^x$

令 $k(x) = e^x - \frac{a}{x}$, $k'(x) = e^x + \frac{a}{x^2} > 0$ 恒成立, 故 $k(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为当 x 趋近于正无穷时, $k(x)$ 趋近于正无穷, 当 x 趋近于 0 时, $k(x)$ 趋近于负无穷,

所以 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h'(x_0) = 0$, $a = x_0 e^{x_0}$,

所以, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

所以, 只需 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} - a(x_0 + \ln x_0) = x_0 e^{x_0} (1 - x_0 - \ln x_0) \geq 0$ 即可;

所以, $1 - x_0 - \ln x_0 \geq 0$, $1 \geq x_0 + \ln x_0$, 因为 $x_0 = ae^{-x_0}$, 所以 $\ln x_0 = \ln a - x_0$,

所以 $\ln x_0 + x_0 = \ln a \leq 1 = \ln e$, 解得 $0 < a \leq e$, 所以, $a \in (0, e]$, 综上, 实数 a 的取值范围为 $[0, e]$

60. (2023 天津河东 统考二模) 已知函数 $f(x) = x(\ln x - m - 1)$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $m = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 当 $x > 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(3) 若对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $x + y + e = 0$; (2) 单调减区间是 $(1, e^m)$, 单调增区间是 $(e^m, +\infty)$, 极小值为 $-e^m$, 无极大值; (3) $\left(1 - \frac{8}{e^2}, +\infty\right)$.

【分析】(1) 求导, 代值, 算出斜率即可求出切线方程;

(2) 分 $m \leq 0$ 和 $m > 0$ 讨论导函数的符号, 研究单调性, 从而得到极值;

(3) 问题转化为 $(x - 4) \ln x - (m + 1)x < 0$ 对于 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 再分离变量研究函数的最值即可.

【详解】(1) $f(x) = (\ln x - 3)x$, $f(e) = -2e$ $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x - 3 = \ln x - 2$, 则 $k = f'(e) = -1$

所以 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y + 2e = -(x - e)$ 即 $x + y + e = 0$

(2) 因为 $f(x) = (\ln x - m - 1)x (m \in \mathbf{R})$, 所以 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x - m - 1 = \ln x - m$

① 当 $m \leq 0$ 时, 因为 $x > 1$, 所以 $f'(x) = \ln x - m > 0$, 函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1, +\infty)$, 无单调减区间, 无极值

② 当 $m > 0$ 时, 令 $\ln x - m = 0$, 解得 $x = e^m$, 当 $1 < x < e^m$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > e^m$, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, e^m)$, 单调增区间是 $(e^m, +\infty)$, 在区间 $(1, +\infty)$ 上的极小值为

$f(e^m) = (m - m - 1)e^m = -e^m$, 无极大值. 综上,

当 $m \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1, +\infty)$, 无单调减区间, 无极值

当 $m > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, e^m)$, 单调增区间是 $(e^m, +\infty)$, 极小值为 $-e^m$, 无极大值.

(3) 因为对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 所以 $f(x) - 4 \ln x < 0$,

即问题转化为 $(x-4)\ln x - (m+1)x < 0$ 对于 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 即 $m+1 > \frac{(x-4)\ln x}{x}$ 对于 $x \in [e, e^2]$ 恒成立,

令 $g(x) = \frac{(x-4)\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{4\ln x + x - 4}{x^2}$, 令 $t(x) = 4\ln x + x - 4$, $x \in [e, e^2]$, 则 $t'(x) = \frac{4}{x} + 1 > 0$,

所以 $t(x)$ 在区间 $[e, e^2]$ 上单调递增, 故 $t(x)_{\min} = t(e) = e - 4 + 4 = e > 0$, 进而 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $[e, e^2]$ 上单调递增, 函数 $g(x)_{\max} = g(e^2) = 2 - \frac{8}{e^2}$,

要使 $m+1 > \frac{(x-4)\ln x}{x}$ 对于 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 只要 $m+1 > g(x)_{\max}$,

所以 $m+1 > 2 - \frac{8}{e^2}$, 即实数 m 的取值范围是 $\left(1 - \frac{8}{e^2}, +\infty\right)$.

61. (2023 天津北辰 统考三模) 已知函数 $f(x) = x \ln x - a(x-1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 上的切线方程. (其中 e 为自然对数的底数)

(2) 已知关于 x 的方程 $\frac{f(x)}{x} + a = ax + \frac{a}{x}$ 有两个不相等的正实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

(i) 求实数 a 的取值范围; (ii) 设 k 为大于 1 的常数, 当 a 变化时, 若 $x_1^k x_2$ 有最小值 e^e , 求 k 的值.

【答案】(1) $x - y - e + 1 = 0$ (2) (i) $(0, \frac{1}{e})$; (ii) $e^2 - 2e$.

【分析】(1) 对函数求导数, 求出在点 $(e, f(e))$ 处的斜率, 最后求切线方程即可;

(2) (i) 方程 $\frac{f(x)}{x} + a = ax + \frac{a}{x}$ 有两个不相等的正实根, 等价于函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个交点, 利用函数导数求出极值, 再结合图象求出 a 的取值范围即可;

(ii) 结合 (i) 及指对互化得 $\ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$, $\ln x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$, 从而把 $x_1^k x_2$ 最小值化为 $\frac{(k+t)\ln t}{t-1}$ 的最小值, 多次构造函数, 求导, 研究函数的单调性及最值, 利用最值即可求解.

【详解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x \ln x - (x-1)$, 所以 $f'(x) = \ln x$, 所以 $f'(e) = \ln e = 1$, 又 $f(e) = e - (e-1) = 1$,

所以函数 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 上的切线方程为 $y - 1 = x - e$, 即 $x - y - e + 1 = 0$;

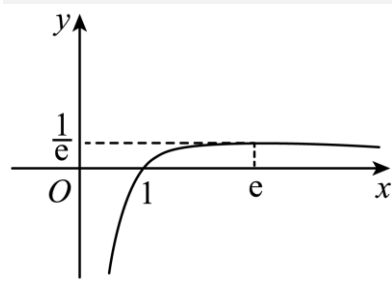
(2) (i) $\frac{f(x)}{x} + a = ax + \frac{a}{x}$ 即 $\ln x = ax$, 则有 $a = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$,

设 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $F'(x) = 0$, 得 $x = e$,

令 $F'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$, 令 $F'(x) < 0$, 得 $x > e$, 所以函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

又 x 趋向于 0 时, $F(x)$ 趋向负无穷, x 趋向于正无穷大时, $F(x)$ 无限趋向 0, 且 $F(e) = \frac{1}{e}$,

函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象如下:



由题意, 方程 $\frac{f(x)}{x} + a = ax + \frac{a}{x}$ 有两个不相等的正实根,

即方程 $a = \frac{\ln x}{x}$ 有两个不相等的正实根，所以函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个交点，

由图知， $0 < a < \frac{1}{e}$ ，故实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e})$ ；

(ii) 因为 $F(1) = 0$ ，由 (i) 得 $1 < x_1 < e < x_2$ ，则 $a = \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$ ，

所以 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$ ，设 $\frac{x_2}{x_1} = t (t > 1)$ ，则 $t = \frac{\ln t + \ln x_1}{\ln x_1}$ ，即 $\ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$ ， $\ln x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$ ，

由题意 $x_1^k x_2$ 有最小值 e^e ，即 $k \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(k+t) \ln t}{t-1}$ 有最小值 e ，

设 $g(t) = \frac{(k+t) \ln t}{t-1}$ ， $t > 1$ ，则 $g'(t) = \frac{-(k+1) \ln t + t - \frac{k}{t} + k - 1}{(t-1)^2}$ ，

记 $G(t) = -(k+1) \ln t + t - \frac{k}{t} + k - 1$ ，则 $G'(t) = -\frac{k+1}{t} + 1 + \frac{k}{t^2} = \frac{(t-1)(t-k)}{t^2}$ ，

由于 $t > 1$ ， $k > 1$ ， $t \in (1, k)$ 时， $G'(t) < 0$ ，则 $G(t)$ 在 $(1, k)$ 上单调递减，

$t \in (k, +\infty)$ 时， $G'(t) > 0$ ，则 $G(t)$ 在 $(k, +\infty)$ 上单调递增，

又 $G(1) = 0$ ， $G(k) < G(1) = 0$ ，且 t 趋向于正无穷大时，趋向于正无穷大，

故存在唯一 $t_0 \in (k, +\infty)$ ，使得 $G(t_0) = 0$ ，

$1 < t < t_0$ 时， $G(t) < 0$ ，即 $g'(t) < 0$ ，所以 $g(t)$ 在 $(1, t_0)$ 上单调递减，

$t > t_0$ 时， $G(t) > 0$ ，即 $g'(t) > 0$ ，所以 $g(t)$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $k > 1$ 时， $g(t)$ 有最小值 $g(t_0)$ ，

而 $g'(t_0) = 0$ ，则 $-(k+1) \ln t_0 + t_0 - \frac{k}{t_0} + k - 1 = 0$ ，即 $k = \frac{-\ln t_0 + t_0 - 1}{\ln t_0 + \frac{1}{t_0} - 1}$ ，所以 $g(t_0) = \frac{(k+t_0) \ln t_0}{t_0-1} = \frac{(\ln t_0)^2}{\ln t_0 + \frac{1}{t_0} - 1}$ ，

由题意知 $g(t_0) = e$ ，令 $x = \ln t_0$ ，

设 $h(x) = \frac{x^2}{x + e^{-x} - 1}$ ($x > 0$)，则 $h'(x) = \frac{x[(x+2)e^{-x} + x - 2]}{(x + e^{-x} - 1)^2}$ ，设 $H(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$ ，则 $H'(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ ，

设 $u(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ ，则 $u'(x) = xe^{-x} > 0$ ，

故 $H'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $H'(x) > H'(0) = 0$ ，此时 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

有 $H(x) > H(0) = 0$ ，此时 $h'(x) > 0$ ，故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，又 $h(1) = e$ ，故 $h(x) = e$ 的唯一解是 $x = 1$ ，

故 $g(t_0) = e$ 的唯一解是 $\ln t_0 = 1$ ，即 $t_0 = e$ ，综上所述， $k = e^2 - 2e$ 。

【点睛】方法点睛：导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题，注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理。

62. (2023 天津和平 统考三模) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - a \ln x$ ， $g(x) = (\cos x - 1)e^{-x}$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线 l_1 与曲线 $y = g(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线 l_2 平行，求 a 的值；

(2)若 $x \in (0, \pi)$ 时, 求函数 $g(x)$ 的最小值; (3)若 $f(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 证明: 当 $a \in (0, +\infty)$ 时, $h(a) \leq 1$. 【答案】

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ (3) 证明见解析

【详解】(1) 因为 $f(x) = \sqrt{x} - a \ln x$, $g(x) = (\cos x - 1)e^{-x}$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2a}{2x}$, $g'(x) = -\sin x \cdot e^{-x} + (\cos x - 1)(-e^{-x}) = (-\sin x - \cos x + 1)e^{-x}$, 所以 $f'(1) = \frac{1-2a}{2}$,

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 因为两条切线平行, 所以 $\frac{1-2a}{2} = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$

(2) 由 (1) 可知 $g'(x) = (-\sin x - \cos x + 1)e^{-x}$, 令 $g'(x) > 0$, 即 $\sin x + \cos x < 1$,

即 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 1$, 即 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $x \in (0, \pi)$, 解得 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$,

令 $g'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增,

所以 $x \in (0, \pi)$ 时, 函数 $g(x)$ 的最小值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

(3) 证明: 因为 $f(x) = \sqrt{x} - a \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2a}{2x}$,

令 $f'(x) > 0$, 则 $\sqrt{x} - 2a > 0$, 即 $\sqrt{x} > 2a$, 所以当 $a > 0$ 时解得 $x > 4a^2$, 所以 $f(x)$ 在 $(4a^2, +\infty)$ 上单调递增,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 4a^2$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 4a^2)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x = 4a^2$ 处取得极小值即最小值,

所以 $h(a) = f(4a^2) = 2a - a \ln(4a^2) = 2a[1 - \ln(2a)]$, 即 $f(x)$ 的最小值为 $h(a)$ 的解析式为 $h(a) = 2a[1 - \ln(2a)]$,

$a \in (0, +\infty)$, 则 $h'(a) = -2 \ln(2a)$, 令 $h'(a) > 0$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$,

所以当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时 $h'(a) > 0$, 即 $h(a)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时 $h'(a) < 0$, 即 $h(a)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $h(a)$ 在 $a = \frac{1}{2}$ 处取得极大值即最大值, 即 $h(a)_{\max} = h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$,

所以 $h(a) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 即当 $a \in (0, +\infty)$ 时, 总有 $h(a) \leq 1$.

63. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 设 $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \sin x + \cos x$.

(1) 求函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$, $x \in (0, 3\pi)$ 的单调区间和极值;

(2) 若关于 x 不等式 $f(x) + h(x) > ax + 2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的值;

(3) 若存在直线 $y = t$, 其与曲线 $y = \frac{x}{f(x)}$ 和 $y = \frac{g(x)}{x}$ 共有 3 个不同交点 $A(x_1, t)$, $B(x_2, t)$, $C(x_3, t)$ ($x_1 < x_2 < x_3$),

求证: x_1, x_2, x_3 成等比数列.

【

【分析】(1) 求出函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 的导数, 解不等式 $y' > 0$ 得函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 的递增区间, 解不等式 $y' < 0$ 得函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$

的递减区间, 再求出极值作答.

(2) 令 $F(x) = e^x + \sin x + \cos x - ax - 2$, 问题转化为 $F(x) \geq F(0)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 证明当 $a \leq 2$ 时, 函数 $F(x)$ 单调递增, 再判断 $a > 2$ 时, 不满足要求, 由此确定 a 的范围.

(3) 利用导数研究函数 $y = \frac{x}{f(x)}$, $y = \frac{g(x)}{x}$ 的单调性, 作出函数的图象, 证明曲线 $y = F_1(x)$ 与 $y = G_1(x)$ 有唯一交点 (μ, t) , 结合图象证明 $x_2 = \mu$, 再证明 $x_1 = \ln x_2$, $x_3 = e^{x_2}$, $x_2^2 = e^{x_2} \ln x_2$, 由此完成证明.

【详解】(1) 依题意, $y = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$, 求导得 $y' = \frac{(\cos x - \sin x)e^x - (\sin x + \cos x)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{2\sin x}{e^x}$,

由 $y' > 0$, 得 $\sin x < 0$, 解得 $(2k-1)\pi < x < 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 在区间 $((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ 上单调递增;

由 $y' < 0$, 得 $\sin x > 0$, 解得 $2k\pi < x < (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$, 函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 在区间 $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 上单调递减;

由 $y' = 0$, 得 $\sin x = 0$, 解得 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

而 $x \in (0, 3\pi)$, 函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增, 在 $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ 上单调递减,

所以函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 在 $(0, 3\pi)$ 上的递增区间为 $(\pi, 2\pi)$; 递减区间为: $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$,

当 $x = \pi$ 时, 函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 取极小值, 极小值为 $-\frac{1}{e^\pi}$, $x = 2\pi$ 时, 函数 $y = \frac{h(x)}{f(x)}$ 取极大值, 极大值为 $\frac{1}{e^{2\pi}}$.

(2) 关于 x 的不等式 $f(x) + h(x) \geq ax + 2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

即: $e^x + \sin x + \cos x - ax - 2 \geq 0$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

令 $F(x) = e^x + \sin x + \cos x - ax - 2$, 求导得 $F'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$,

令 $G(x) = F'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$, 求导得 $G'(x) = e^x - \sin x - \cos x$,

由 (1) 知: $\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的极大值为 $\frac{1}{e^{2k\pi}} (k \in \mathbb{N}^*)$, 又 $\frac{h(0)}{f(0)} = 1 > \frac{1}{e^{2k\pi}} (k \in \mathbb{N}^*)$,

从而 $\frac{h(x)}{f(x)}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值为 1, 即 $\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \leq 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

于是 $G'(x) = e^x - \sin x - \cos x \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $y = F'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

从而 $F'(x) \geq F'(0) = 2 - a$, 当 $a \leq 2$ 时, $F'(x) \geq 0$, 当且仅当 $a = 2, x = 0$ 时等号成立,

因此 $y = F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $F(x) \geq F(0) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

则当 $a \leq 2$ 时, $F(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立;

当 $a > 2$ 时, 令 $u(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 则 $u'(x) = e^x - 1 > 0$, 即函数 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

$u(x) > u(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $e^x > x + 1$,

于是 $F'(a+1) = e^{a+1} + \cos(a+1) - \sin(a+1) - a > a + 2 + \sqrt{2} \cos(a + 2 + \frac{\pi}{4}) - a > 0$,

又 $F'(0) = 2 - a < 0$, 则存在 $\lambda \in (0, a+1)$, 使得 $F'(\lambda) = 0$, 当 $x \in (0, \lambda)$ 时, $F'(x) < 0$,

函数 $y = F(x)$ 在 $(0, \lambda)$ 上单调递减, 又 $F(0) = 0$, 即当 $x \in (0, \lambda)$ 时, $F(x) < 0$, 与已知矛盾, 所以 $a \leq 2$.

(3) 对于函数 $y = \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{e^x}$, 令 $F_1(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $F_1'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

从而当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $F_1'(x) > 0$, 函数 $y = F_1(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F_1'(x) < 0$, 函数 $y = F_1(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

则当 $x = 1$ 时, $y = F_1(x)$ 取最大值, 最大值为 $F_1(1) = \frac{1}{e}$,

对于函数 $y = \frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x}{x}$, 令 $G_1(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $G_1'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

从而当 $x \in (0, e)$ 时, $G_1'(x) > 0$, 函数 $y = G_1(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $G_1'(x) < 0$, 函数 $y = G_1(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $x = e$ 时, $G_1(x)$ 取最大值, 最大值为 $G_1(e) = \frac{1}{e}$,

因此, 函数 $y = F_1(x)$ 与 $y = G_1(x)$ 有相同的最大值, 其图象如下图所示,

下面先证明: 曲线 $y = F_1(x)$ 与 $y = G_1(x)$ 有唯一交点,

由 $F_1(x) = G_1(x)$, 得 $\frac{x}{e^x} = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 即证明方程 $\frac{x^2}{e^x} - \ln x = 0$ 有唯

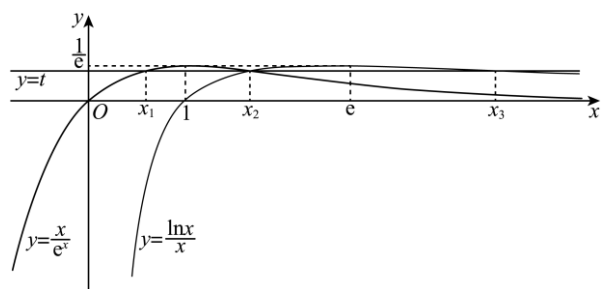
一实数根 μ ,

因为当 $x \in (0, 1]$ 时, $F_1(x) > 0$, $G_1(x) \leq 0$, 则曲线 $y = F_1(x)$ 与 $y = G_1(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上没有交点, 即方程 $\frac{x^2}{e^x} - \ln x = 0$

在 $(0, 1]$ 上没有实根, 令 $\varphi(x) = \frac{x^2}{e^x} - \ln x (x > 0)$, 求导得 $\varphi'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2(2-x) - e^x}{x^2 e^x}$,

令 $m(x) = x^2(2-x) - e^x, x > 1$, 求导得 $m'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$,

令 $v(x) = 4x - 3x^2 - e^x, x > 1$, 求导得 $v'(x) = 4 - 6x - e^x$, 显然 $v'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减,



$v'(x) < v'(1) < 0$ ，函数 $m'(x) = v(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减， $m'(x) < m'(1) = 1 - e < 0$ ，

函数 $m(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减， $m(x) < m(1) = 1 - e < 0$ ，于是当 $x > 1$ 时， $\varphi'(x) < 0$ ，

函数 $y = \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，由 $\varphi(1) = \frac{1}{e} > 0$ ， $\varphi(e) = \frac{e^2}{e^e} - 1 < 0$ ，

从而函数 $y = \varphi(x)$ 在 $(1, e)$ 上存在唯一零点，

则方程 $\varphi(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有唯一实数根 μ ，且 $\mu \in (1, e)$ ，

由于直线 $y = t$ 与曲线 $y = F_1(x)$ ， $y = G_1(x)$ 共有 3 个不同交点，则直线 $y = t$ 必过点 (μ, t) ，

且 $F_1(x_1) = F_1(x_2) = G_1(x_2) = G_1(x_3) = t$ ， $0 < x_1 < 1 < x_2 < e < x_3$ ， $0 < t < \frac{1}{e}$ ，

由 $F_1(x_1) = G_1(x_2)$ ，得 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_2}{e^{\ln x_2}}$ ，即 $F_1(x_1) = F_1(\ln x_2)$ ，

而函数 $y = F_1(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增， $x_1 \in (0, 1)$ ， $\ln x_2 \in (0, 1)$ ，则 $x_1 = \ln x_2$ ①，

由 $F_1(x_2) = G_1(x_3)$ ，得 $\frac{x_2}{e^{x_2}} = \frac{\ln x_3}{x_3} = \frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}$ ，即 $G_1(x_3) = G_1(e^{x_2})$ ，

而函数 $y = G_1(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上递减， $x_3 \in (e, +\infty)$ ， $e^{x_2} \in (e, +\infty)$ ，则 $x_3 = e^{x_2}$ ②，

由①②得： $x_1 x_3 = e^{x_2 \ln x_2}$ ③，由 $F_1(x_2) = G_1(x_2)$ ，得 $\frac{x_2}{e^{x_2}} = \frac{\ln x_2}{x_2}$ ，于是有 $x_2^2 = e^{x_2 \ln x_2}$ ④，

所以由③④得 $x_2^2 = x_1 x_3$ ，即 x_1, x_2, x_3 成等比数列。

64. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = x - (a+b) \ln x - \frac{ab}{x}$ ， $a, b \in \mathbb{R}$ 。

(1) 若 $b = -1$ ，求 $f(x)$ 的单调区间；(2) 若 $f(x)$ 不单调，且 $f(1) < 0$ 。(i) 证明： $f(a) + f(b) < -2 \ln ab$ ；

(ii) 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，证明 $x_1 + x_3 + ab \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} \right) > 3(a+b) - \frac{6ab(a+b)}{b^2 + 2ab + 3a^2}$ 。

(2) 根据 $f(1) < 0$ 求出 $ab > 1$ ，再根据 $f(x)$ 不单调求出 $a > 0, b > 0$ ，再根据 $a+b > \frac{1}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot b} = 2$ 证明。

【详解】(1) 若 $b = -1$ ，即 $f(x) = x - (a-1) \ln x + \frac{a}{x}$ ，定义域为 $(0, +\infty)$

$$\therefore f'(x) = 1 - \frac{a-1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + (1-a)x - a}{x^2} = \frac{(x-a)(x+1)}{x^2}$$

当 $a \leq 0$ 时，又因为 $x > 0$ ，所以 $f'(x) = \frac{(x-a)(x+1)}{x^2} > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a > 0$ 时， $f'(x) = \frac{(x-a)(x+1)}{x^2} > 0 \Rightarrow x \in (a, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{(x-a)(x+1)}{x^2} < 0 \Rightarrow x \in (0, a)$

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减，在 $(a, +\infty)$ 上单调递增。

综上： $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ，无减区间；

$a > 0$ 时 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, a)$ ，单调递增区间为 $(a, +\infty)$ 。

(2) (i) $\because f(1) < 0 \therefore 1 - ab < 0$ ，即 $ab > 1$

又因为 $f(x)$ 不单调，即 $f'(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x^2}$ 在 $(0, \infty)$ 上有零点，又 $ab > 1 > 0$ 所以 $a > 0$ 且 $b > 0$ ，所以 $ab > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{b}$

所以 $a + b > \frac{1}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot b} = 2$ ，即 $a + b > 2$ 又因为 $f(a) = a - (a+b)\ln a - b$ ， $f(b) = b - (a+b)\ln b - a$ ，

所以 $f(a) + f(b) = -(a+b)\ln ab$ 又因为 $a + b > 2$ 所以 $-(a+b)\ln ab < -2\ln ab$ ，即 $f(a) + f(b) < -2\ln ab$ 。

(ii) 设 $a < b$ ，则 $x_1 < a < b < x_3$ ，故 $\frac{x_3}{x_1} > \frac{b}{a} > 1$ ，由 $f(x_1) = f(x_3)$ 即

$$x_1 - (a+b)\ln x_1 - \frac{ab}{x_1} = x_3 - (a+b)\ln x_3 - \frac{ab}{x_3} \text{ 即 } (x_1 - x_3) - (a+b)(\ln x_1 - \ln x_3) = \frac{ab}{x_1} - \frac{ab}{x_3} = \frac{ab(x_3 - x_1)}{x_1 x_3} \text{ 可知}$$

$$x_1 - x_3 - (a+b)\ln \frac{x_1}{x_3} = \frac{ab}{x_1 x_3} (x_3 - x_1)，\text{ 则 } 1 + \frac{ab}{x_1 x_3} = \frac{a+b}{x_3 - x_1} \ln \frac{x_3}{x_1}。$$

要证 $x_1 + x_3 + ab \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} \right) > 3(a+b) - \frac{6ab(a+b)}{b^2 + 2ab + 3a^2}$ ，也就是证明 $x_1 + x_3 + ab \left(\frac{x_1 + x_3}{x_1 x_3} \right) > 3(a+b) - \frac{6ab(a+b)}{b^2 + 2ab + 3a^2}$ 成立，

$$\text{即证 } (x_1 + x_3) \left(1 + \frac{ab}{x_1 x_3} \right) > 3(a+b) - \frac{6ab(a+b)}{b^2 + 2ab + 3a^2}，\text{ 把 } 1 + \frac{ab}{x_1 x_3} = \frac{a+b}{x_3 - x_1} \ln \frac{x_3}{x_1} \text{ 代入，}$$

$$\text{即证明：} (a+b) \cdot \frac{x_1 + x_3}{x_3 - x_1} \cdot \ln \frac{x_3}{x_1} > 3(a+b) - \frac{6ab(a+b)}{b^2 + 2ab + 3a^2} \text{ 即可。}$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \ln x, g'(x) = \frac{x - \frac{1}{2} - 2\ln x}{(x-1)^2}。$$

$$\text{即 } h(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x, h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} > 0$$

所以 $h(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，又 $h(1) = 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，又因为 $\frac{x_3}{x_1} > \frac{b}{a} > 1$ ，故

$$g\left(\frac{x_3}{x_1}\right) > g\left(\frac{b}{a}\right)，\text{ 即 } \frac{\frac{x_3}{x_1} + 1}{\frac{x_3}{x_1} - 1} \cdot \ln \frac{x_3}{x_1} > \frac{\frac{b}{a} + 1}{\frac{b}{a} - 1} \cdot \ln \frac{b}{a}，\text{ 也就是证}$$

$$\text{明 } \frac{x_1 + x_3}{x_3 - x_1} \cdot \ln \frac{x_3}{x_1} > \frac{a+b}{b-a} \ln \frac{b}{a} > 3 - \frac{6ab}{b^2 + 2ab + 3a^2}，\text{ 令 } \frac{b}{a} = t (t > 1)，$$

$$\text{即证：} \frac{t+1}{t-1} \ln t > 3 - \frac{6t}{t^2 + 2t + 3} (*)，\text{ 易知 } t \geq 1, t^2 + 2t + 3 \leq t^2 + 4t + 1，(*) \text{ 原不等式等价于先证明：当}$$

$$t > 1, \frac{t+1}{t-1} \ln t > 3 - \frac{6t}{t^2 + 4t + 1} \text{ 成立。即 } \frac{t+1}{t-1} \ln t > \frac{3(t+1)^2}{t^2 + 4t + 1}，$$

$$\text{等价于 } \ln t > \frac{3t^2 - 3}{t^2 + 4t + 1}，\text{ 即 } h(t) = \ln t - \frac{3t^2 - 3}{t^2 + 4t + 1}，\text{ 则 } h'(t) = \frac{(t-1)^4}{t(t^2 + 4t + 1)} \geq 0，$$

故 $h(t) > h(1) = 0$ ，所以不等式 $\ln t > \frac{3t^2 - 3}{t^2 + 4t + 1}$ 成立，故 $(*)$ 成立，原不等式得证。

【点睛】本题的关键是将 $\frac{x_1+x_3}{x_3-x_1} \cdot \ln \frac{x_3}{x_1}$ 变形 $\frac{1+\frac{x_3}{x_1}}{\frac{x_3}{x_1}-1} \cdot \ln \frac{x_3}{x_1}$ ，然后通过换元转化为 $\frac{t+1}{t-1} \ln t$ ，这样将双变量问题转化为单

变量问题，构造函数解决问题.

65. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{ax} + \ln x$, $g(x) = \frac{x}{e^{ax}} + \frac{1}{2} - \ln a$ (e 为自然对数的底数)

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) $a>0$ 时, 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个公共点.

(i) 求实数 a 的集合;

(ii) 设经过点 (b, c) 有且仅有 3 条直线与函数 $y=f(x)$ 的图象相切, 求证: 当 $b>e$ 时, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{e}\right)+c < f(b) < c$.

【分析】(1) 直接利用导函数求单调区间, 需注意定义域;

(2) (i) 根据 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的单调性可判断, 只有 $f\left(\frac{1}{a}\right)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 时, 两函数图象有且只有一个公共点;

(ii) 经过点 (b, c) 有且仅有 3 条直线与函数 $y=f(x)$ 的图象相切, 可转化为切点为 $(x_0, f(x_0))$ 经过点 (b, c) 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切的的直线有 3 条, 即将 (b, c) 代入切线方程后, 关于 x_0 的方程有 3 个根.

进而转化为 $u(x) = \ln x - \frac{eb}{2x^2} + \frac{b+e}{x} - 1 - c$ 有且仅有 3 个零点, 根据 $u(x)$ 的单调性研究其零点, 可得到不等关系, 进而可证明不等式成立.

【详解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $x>0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$,

当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减, 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 所以当 $a=1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$, 单调递减区间为 $(0,1)$.

(2) (i) $f'(x) = -\frac{1}{ax^2} + \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x^2}$, 因 $a>0$, 当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,

当 $x>\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最小值; $g'(x) = \frac{e^{ax} - axe^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{1-ax}{e^{ax}}$,

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,

当 $x>\frac{1}{a}$ 时, $g'(x)<0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最大值,

故若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个公共点, 当且仅当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=g\left(\frac{1}{a}\right)$,

得 $1 + \ln \frac{1}{a} = \frac{1}{ae} + \frac{1}{2} - \ln a$, 得 $a = \frac{2}{e}$, 故实数 a 的集合为 $\left\{\frac{2}{e}\right\}$.

(ii) 因 $a = \frac{2}{e}$, 所以 $f(x) = \frac{e}{2x} + \ln x$, $f'(x) = \frac{2x-e}{2x^2}$

设点 $(x_0, f(x_0))$ 为经过点 (b, c) 的直线与函数 $y=f(x)$ 的图象相切的切点,

则 $f(x_0) = \frac{e}{2x_0} + \ln x_0$, $f'(x) = \frac{2x_0 - e}{2x_0^2}$, 故切线方程为 $y - \left(\frac{e}{2x_0} + \ln x_0 \right) = \frac{2x_0 - e}{2x_0^2}(x - x_0)$,

因 (b, c) 在切线上, 故 $c - \left(\frac{e}{2x_0} + \ln x_0 \right) = \frac{2x_0 - e}{2x_0^2}(b - x_0)$, 整理得 $\ln x_0 - \frac{eb}{2x_0^2} + \frac{b+e}{x_0} - 1 - c = 0$,

因经过点 (b, e) 有且仅有 3 条直线与函数 $y = f(x)$ 的图象相切

则设 $u(x) = \ln x - \frac{eb}{2x^2} + \frac{b+e}{x} - 1 - c$, $u(x)$ 有且仅有 3 个零点. $u'(x) = \frac{1}{x} + \frac{eb}{x^3} - \frac{b+e}{x^2} = \frac{x^2 - (b+e)x + eb}{x^3} = \frac{(x-b)(x-e)}{x^3}$,

因 $b > e$, 故当 $0 < x < e$, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调增, 当 $e < x < b$, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 在区间 (e, b) 上单调

减, 当 $x > b$, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 在区间 $(b, +\infty)$ 上单调增, 故 $u(x)$ 有且仅有 3 个零点时, $u(e) > 0$, $u(b) < 0$,

由 $u(e) = \ln e - \frac{eb}{2e^2} + \frac{b+e}{e} - 1 - c > 0$ 得 $1 + \frac{b}{2e} - c > 0$ 由 $u(b) = \ln b - \frac{eb}{2b^2} + \frac{b+e}{b} - 1 - c < 0$ 得 $\ln b + \frac{e}{2b} - c < 0$,

要证 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) + c < f(b) < c$ 成立, 只需证 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) + c < \frac{e}{2b} + \ln b < c$ 成立, 即证 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) < \frac{e}{2b} + \ln b - c < 0$,

因 $\ln b + \frac{e}{2b} - c < 0$, 故只需证 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) < \frac{e}{2b} + \ln b - c$, 因 $1 + \frac{b}{2e} - c > 0$, 所以 $\frac{b}{e} > 2c - 2$,

故只需证 $\frac{e}{2b} + \ln b > \frac{3}{2}$, 因 $f'(x) = \frac{2x - e}{2x^2}$, 故当 $x > \frac{e}{2}$ 时, $f(x) = \frac{e}{2x} + \ln x$ 在 $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$ 单调递增,

因 $b > e > \frac{e}{2}$, 所以 $f(b) = \frac{e}{2b} + \ln b > f(e) = \frac{e}{2e} + \ln e = \frac{3}{2}$, 即证. 故当 $b > e$ 时, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) + c < f(b) < c$.

【点睛】关键点点睛: 不等式 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{e}\right) + c < f(b) < c$ 中, 考虑到 $u(x) = \ln x - \frac{eb}{2x^2} + \frac{b+e}{x} - 1 - c$ 为切线方程得到, 故在 $x = b$ 时, $u(b)$ 和 $f(b)$ 有量上的关系, 通过代入发现 $u(b) = f(b) - c$, 结合不等式特点, 右边不等式即证 $u(b) < 0$.

66. (2023 天津津南 天津市咸水沽第一中学校考模拟预测) 已知 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$, 其中 $e=2.71828\ldots$

为自然对数的底数. (I) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点; (II) 记 x_0 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的

零点, 证明: (i) $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$; (ii) $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

【答案】(I) 证明见解析, (II) (i) 证明见解析, (ii) 证明见解析.

【分析】(I) 方法一: 先利用导数研究函数单调性, 再结合零点存在定理证明结论;

(II) (i) 先根据零点化简不等式, 转化求两个不等式恒成立, 构造差函数, 利用导数求其单调性, 根据单调性确定最值, 即可证得不等式;

(ii) 方法一: 先根据零点条件转化: $x_0 f(e^{x_0}) = x_0 f(x_0 + a)$, 再根据 $1 < a \leq 2$ 放缩, 转化为证明不等式

$4(e^a - 2)^2 \geq (e-1)^2(a-1)$, 最后构造差函数, 利用导数进行证明.

【详解】(I) 【方法一】: 单调性+零点存在定理法

Q $f'(x) = e^x - 1$, Q $x > 0$, $\therefore e^x > 1$, $\therefore f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

Q $1 < a \leq 2$, $\therefore f(2) = e^2 - 2 - a \geq e^2 - 4 > 0$, $f(0) = 1 - a < 0$,

所以由零点存在定理得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点.

[方法二]【最优解】：分离常数法

函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点等价于方程 $e^x - x = a$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根，又等价于直线 $y = a$ 与 $g(x) = e^x - x (x > 0)$ 只有 1 个交点.

记 $y = a, g(x) = e^x - x (x > 0)$ ，由于 $g'(x) = e^x - 1 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，故 $g(x) > g(0) = 1$.

因此，当 $1 < a \leq 2$ 时，直线 $y = a$ 与 $g(x) = e^x - x (x > 0)$ 只有 1 个交点.

(II) (i) Q $f(x_0) = 0, \therefore e^{x_0} - x_0 - a = 0$,

$$\therefore \sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)} \Leftrightarrow e^{x_0} - x_0 - 1 \leq x_0^2 \leq 2(e^{x_0} - x_0 - 1),$$

$$\text{令 } g(x) = e^x - x - 1 - x^2 (0 < x < 2), h(x) = e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2} (0 < x < 2),$$

一方面： $h'(x) = e^x - 1 - x = h_1(x), h_1'(x) = e^x - 1 > 0$,

$\therefore h'(x) > h'(0) = 0, \therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增， $\therefore h(x) > h(0) = 0$,

$$\therefore e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2} > 0, 2(e^x - x - 1) > x^2,$$

另一方面： Q $1 < a \leq 2 \therefore a - 1 \leq 1$,

所以当 $x_0 \geq 1$ 时， $\sqrt{a-1} \leq x_0$ 成立，

因此只需证明当 $0 < x < 1$ 时， $g(x) = e^x - x - 1 - x^2 \leq 0$,

因为 $g'(x) = e^x - 1 - 2x = g_1(x), g_1'(x) = e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$

当 $x \in (0, \ln 2)$ 时， $g_1'(x) < 0$ ，当 $x \in (\ln 2, 1)$ 时， $g_1'(x) > 0$ ，

所以 $g'(x) < \max\{g'(0), g'(1)\}$, Q $g'(0) = 0, g'(1) = e - 3 < 0, \therefore g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减， $\therefore g(x) < g(0) = 0$ ， $\therefore e^x - x - 1 < x^2$ ，

综上， $\therefore e^{x_0} - x_0 - 1 \leq x_0^2 \leq 2(e^{x_0} - x_0 - 1), \therefore \sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$.

(ii) [方法一]：分析+构造函数法

$$t(x_0) = x_0 f(e^{x_0}) = x_0 f(x_0 + a) = x_0[(e^a - 1)x_0 + a(e^a - 2)],$$

$$Q t'(x_0) = 2(e^a - 1)x_0 + a(e^a - 2) > 0, \sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)},$$

$\therefore t(x_0) \geq t(\sqrt{a-1}) = \sqrt{a-1}[(e^a - 1)\sqrt{a-1} + a(e^a - 2)] = (e^a - 1)(a-1) + a\sqrt{a-1}(e^a - 2)$ ，因为 $1 < a \leq 2$ ，所以

$$e^a > e, a \geq 2(a-1),$$

$$\therefore t(x_0) \geq (e-1)(a-1) + 2(a-1)\sqrt{a-1}(e^a - 2),$$

只需证明 $2(a-1)\sqrt{a-1}(e^a-2) \geq (e-1)(a-1)^2$,

即只需证明 $4(e^a-2)^2 \geq (e-1)^2(a-1)$,

令 $s(a) = 4(e^a-2)^2 - (e-1)^2(a-1)$, $(1 < a \leq 2)$,

则 $s'(a) = 8e^a(e^a-2) - (e-1)^2 \geq 8e(e-2) - (e-1)^2 > 0$,

$\therefore s(a) > s(1) = 4(e-2)^2 > 0$, 即 $4(e^a-2)^2 \geq (e-1)^2(a-1)$ 成立,

因此 $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

[方法二] 【最优解】: 放缩转化法

$x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a \Leftrightarrow x_0 f(x_0+a) \geq (e-1)(a-1)a$.

设 $h(x_0) = x_0 f(x_0+a) (\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)})$, 则由 $e^{x_0+a} \geq 1+x_0+a$ 得

$h'(x_0) = (x_0+1)e^{x_0+a} - 2(x_0+a) > (x_0+1)(x_0+a+1) - 2(x_0+a) > 0$.

从而只要证 $h(\sqrt{a-1}) - (e-1)(a-1)a \geq 0$.

上式左边 $= e^{\sqrt{a-1}+a} - 2a + \sqrt{a-1}(a-ae-1)$.

使用不等式 $e^x \geq x+1, e^x \geq ex$ 可得 $e^{\sqrt{a-1}+a} - 2a + \sqrt{a-1}(a-ae-1) \geq (1+\sqrt{a-1})ae - 2a + \sqrt{a-1}(a-ae-1)$

$= a(e-2) + (a-1)\sqrt{a-1} > 0$

【整体点评】(I) 方法一: 直接研究函数的单调性, 并根据零点存在定理证得结论, 为通性通法; 方法二: 先分离常数, 转化为证明水平直线 $y=a$ 与函数 $g(x) = e^x - x (x > 0)$ 的图象交点个数问题, 为最优解;

(II) (i) 通过分析, 转化, 然后构造函数证得;

(ii) 方法一: 构造函数 $t(x_0) = x_0[(e^a-1)x_0 + a(e^a-2)]$, 利用导数研究单调性, 求得最小值, 然后根据条件放缩转化为证明不等式 $2(a-1)\sqrt{a-1}(e^a-2) \geq (e-1)(a-1)^2$. 利用作差法构造关于实数 a 的函数, 利用导数证得此不等式, 为该题的通性通法; 方法二: 利用 $e^{x_0+a} \geq 1+x_0+a$ 放缩判定 $h(x_0) = x_0 f(x_0+a)$ 的导函数大于零, 确定单调性, 得到其最小值, 转化为 $e^{\sqrt{a-1}+a} - 2a + \sqrt{a-1}(a-ae-1) \geq 0$, 然后利用不等式 $e^x \geq x+1, e^x \geq ex$ 放缩证明, 运算相对简洁, 为最优解.