

2023 年天津高考模拟试题分类一模小题答案

一、单选题

1. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知 $3^a = 5^b$ 且 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 a 的值为 ()

- A. $\log_3 15$ B. $\log_5 15$ C. $\log_3 45$ D. $\log_5 45$

【详解】令 $3^a = 5^b = k > 0$,

则 $a = \log_3 k, b = \log_5 k$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_3 k} = \log_k 3, \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_5 k} = \log_k 5$, 又 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$,

$\therefore 2 \log_k 3 + \log_k 5 = \log_k 45 = 1$, 即 $k = 45$, $\therefore a = \log_3 45$. 故选: C.

2. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知 $x \in (e^{-1}, 1)$, 记 $a = \ln x, b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x}, c = e^{\ln x}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【详解】解: 因为 $x \in (e^{-1}, 1)$, 所以 $a = \ln x \in (-1, 0), b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} \in (1, 2), c = e^{\ln x} \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$,

所以 $a < c < b$, 故选: A

3. (2023 天津河西 统考一模) 设 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{1.6}, b = \log_3 6, c = 8^{-\frac{2}{3}}$, 则 ()

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

【详解】 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{1.6} = 2^{-1.6}, c = 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2}$, 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 且 $-2 < -1.6 < 0$,

所以 $0 < 2^{-2} < 2^{-1.6} < 2^0 = 1$, 即 $0 < c < a < 1$, 因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $6 > 3$,

所以 $\log_3 6 > \log_3 3 = 1$, 即 $b > 1$, 所以 $c < a < b$, 故选: C

4. (2023 天津河西 统考一模) 已知 $3^a = 4^b = m, \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = 2$, 则 m 的值为 ()

- A. 36 B. 6 C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt[4]{6}$

【详解】 $\because 3^a = 4^b = m > 0, \therefore a = \log_3 m, b = \log_4 m, \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = \log_m 3 + \frac{1}{2} \log_m 4 = \log_m 6 = 2$,

$\therefore m^2 = 6$, 即 $m = \sqrt{6}$ 或 $m = -\sqrt{6}$ (舍去) 故选: C

5. (2023 天津 校联考一模) 已知 $4^x = 3^y = m$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$, 则 $m = ()$.

- A. 3 B. 6 C. 12 D. 18

【详解】由 $4^x = 3^y = m > 0$ 得: $x = \log_4 m, y = \log_3 m$,

由换底公式可得: $\frac{1}{x} = \log_m 4, \frac{1}{y} = \log_m 3$,

则 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \log_m 4 + 2 \log_m 3 = \log_m 4 \times 3^2 = 2$ ，所以 $m^2 = 4 \times 3^2 = 36$ ，因为 $m > 0$ ，所以 $m = 6$ 故选：B

6. (2023 天津 校联考一模) 已知 $a = \log_3 2$ ， $b = 6^{0.03}$ ， $c = 4^{-\frac{1}{2}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

【详解】因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 $a = \log_3 2 \in (\log_3 \sqrt{3}, \log_3 3) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，

而 $y = 6^x$ 单调递增，故 $b = 6^{0.03} > 6^0 = 1$ ， $c = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ，所以 $c < a < b$ 故选：D

7. (2023 天津河北 统考一模) 已知 a, b, c, d 均为正实数，且 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = c^2 + d^2 = 2$ ，则 $a + \frac{b}{cd}$ 的最小值为 ()

A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

【详解】因为 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = c^2 + d^2 = 2$ ，所以 $cd \leq \frac{c^2 + d^2}{2} = 1$ ，即 $\frac{1}{cd} \geq 1$ ，当且仅当 $c = d = 1$ 时取等号，所以 $a + \frac{b}{cd}$ 的最小值为

$a + b$ 的最小值，所以 $\frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b}\right) > \frac{1}{2}\left(3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}}\right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ ，当且仅当 $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{b}{a} = \frac{2a}{b} \end{cases}$ 时取等号，所以

$a + \frac{b}{cd}$ 的最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ 故选：D

【点睛】利用基本不等式求解最小值时，注意运用“一正二定三相等”的原则。

8. (2023 天津河北 统考一模) 若 $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ ， $c = \log_3 7$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【详解】依题意， $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = \log_2 5 > \log_2 2^2 = 2$ ，而 $1 = \log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9 = 2$ ，即 $1 < c < 2$ ，

所以 a, b, c 的大小关系为 $b > c > a$ 故选：B

9. (2023 天津 校联考一模) 已知 $f(x)$ 是偶函数，当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单调递减，设 $a = -2^{1.2}$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}$ ， $c = 2 \log_5 2$ ，

则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系是

A. $f(c) < f(b) < f(a)$ B. $f(c) < f(a) < f(b)$ C. $f(c) > f(b) > f(a)$ D. $f(c) > f(a) > f(b)$

【详解】 $a = -2^{1.2}$ ，所以 $a < 0$ $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} = 2^{0.8}$ ，所以 $1 < b < 2^{1.2}$ $c = 2 \log_5 2 = \log_5 4$ ，所以 $0 < c < 1$

因为 $f(x)$ 是偶函数，当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单调递减，所以 $f(a) = f(-a) = f(2^{1.2})$ ，所以 $f(c) > f(b) > f(a)$

故选：C

10. (2023 天津南开 统考一模) 已知 $e^a = \lg 2$ ， $b = \lg(\ln 2)$ ， $c = \ln \frac{1}{2}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

【答案】C

【分析】先求出 $a = \ln(\lg 2)$ ，再根据对数函数的单调性结合中间量分别比较 a, c 和 b, c 的大小即可.

【详解】由 $e^a = \lg 2$ ，得 $a = \ln(\lg 2)$ ，因为 $\lg 2 < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\ln(\lg 2) < \ln \frac{1}{2}$ ，即 $a < c$ ，因为 $\frac{1}{2} = \ln \sqrt{e} < \ln 2 < 1$ ，所以 $-1 < c = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < -\frac{1}{2}$ ，

则 $\lg(\ln 2) > \lg \frac{1}{2} > \lg \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\lg(\ln 2) > \ln \frac{1}{2}$ ，即 $b > c$ ，

所以 $a < c < b$. 故选：C.

11. (2023 天津 大港一中校联考一模) 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^2$ ，则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

【答案】B 【分析】 a, b, c 分别和 0, 1 比较大小，得到 a, b, c 的大小关系.

【详解】 $a = \log_2 0.2 < 0$ ， $b = 2^{0.2} > 1$ ， $0 < 0.2^2 < 1$ ， $\therefore a < c < b$. 故选 B

【点睛】本题考查指对数比较大小，一般可以判断函数类型，根据单调性比较大小，或是和中间值 0 或 1 比较大小.

12. (2023 天津红桥 统考一模) 设 $a > 1$ ，且 $m = \log_a(a^2 + 1)$, $n = \log_a(a - 1)$, $p = \log_a(2a)$ ，则 m, n, p 的大小关系为

- A. $n > m > p$ B. $m > p > n$ C. $m > n > p$ D. $p > m > n$

【答案】B 【分析】由函数单调性进行判定，继而比较出大小

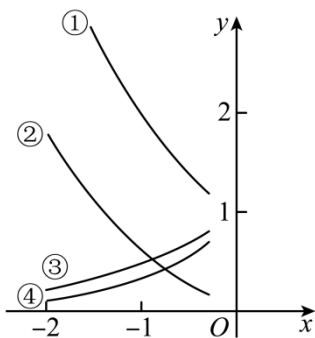
【详解】当 $a > 1$ 时，易知 $a^2 + 1 > 2a$ ，再由以 a 为底对数函数在定义域上单调递增，从而可知 $m > p$

又 $\because (a^2 + 1) - (a - 1) = a^2 - a + 2$ 恒大于 0 (二次项系数大于 0, 根的判别式小于 0, 函数值恒大于 0), 即 $a^2 + 1 > a - 1$ ，再由以 a 为底对数函数在定义域上单调递增，从而可知 $m > n$

又 $\because$ 当 $a > 1$ 时 $2a$ 显然大于 $a - 1$ ，同上，可知 $p > n$. 综上 $\therefore m > p > n$. 故选 B.

【点睛】本题考查了运用对数函数的单调性比较函数值的大小，需要熟练掌握并能求解结果，本题较为基础.

13. (2023 天津河东 一模) 如图中，①②③④中不属于函数 $y = 3^x$ ， $y = 2^x$ ， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 中一个的是 ()



- A. ① B. ② C. ③ D. ④

【答案】B 【分析】根据指数函数的图象的特征即可得答案. 【详解】解：由指数函数的性质可知：

①是 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的部分图象；③是 $y = 2^x$ 的部分图象；④是 $y = 3^x$ 的部分图象；

所以只有②不是指数函数的图象. 故选：B.

14. (2023 天津 统考一模) 已知 $a=2^{1.3}$, $b=4^{0.7}$, $c=\log_3 8$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】C

【分析】利用指数函数 $y=2^x$ 与对数函数 $y=\log_3 x$ 的性质即可比较 a, b, c 的大小.

【详解】 $\because c=\log_3 8 < 2 < a=2^{1.3} < b=4^{0.7}=2^{1.4}$,

$\therefore c < a < b$.

故选: C.

【点睛】本题考查了指数函数与对数函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

15. (2023 天津 统考一模) 已知 $a=\log_{0.1} 2, b=\log_{50} 2$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】B

【分析】先取倒数, 再应用对数运算律计算即可.

【详解】因为 $a=\log_{0.1} 2, b=\log_{50} 2$, 所以 $\frac{1}{a}=\log_2 0.1, \frac{1}{b}=\log_2 50$,

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \log_2 0.01 + \log_2 50 = \log_2 0.5 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$.

故选: B.

16. (2023 天津和平 统考一模) 已知 $a=\log_{0.2} 0.3, b=\log_{0.3} 0.2, c=\log_2 3$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b < c < a$ B. $c < b < a$
C. $a < b < c$ D. $a < c < b$

【答案】C 【分析】利用对数函数的单调性结合二次函数的性质即得.

【详解】 $\because 0 < a=\log_{0.2} 0.3 < 1, b=\log_{0.3} 0.2 > 1, c=\log_2 3 > 1$, 又 $\frac{b}{c}=\log_{0.3} 0.2 \cdot \log_3 2 = \frac{\lg 2 - 1}{\lg 3 - 1} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 3} = \frac{\lg^2 2 - \lg 2}{\lg^2 3 - \lg 3}$,

因为函数 $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0$, 又因为 $\frac{1}{2} > \lg 3 > \lg 2 > 0$,

所以 $f(\lg 3) < f(\lg 2) < 0$, 所以 $\frac{f(\lg 2)}{f(\lg 3)} < 1$, 即 $\frac{\lg^2 2 - \lg 2}{\lg^2 3 - \lg 3} < 1$, 所以 $\frac{b}{c} < 1$,

$\therefore b < c$, 即 $a < b < c$. 故选: C.

17. (2023 天津和平 统考一模) 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 其准线与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线相交于 A, B

两点, 若 $\triangle ABF$ 的周长为 $4\sqrt{2}$, 则 $p =$ ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. 4

【答案】A 【分析】利用双曲线的渐近线、抛物线的焦点和准线以及两点的距离公式进行计算求解.

【详解】由题知，双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm\sqrt{2}x$ ，抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ，准线方程为 $y = -\frac{p}{2}$ ，

由 $\begin{cases} y = -\frac{p}{2} \\ y = \pm\sqrt{2}x \end{cases}$ 得 A, B 两点坐标为 $\left(-\frac{p}{2\sqrt{2}}, -\frac{p}{2}\right), \left(\frac{p}{2\sqrt{2}}, -\frac{p}{2}\right)$ ，所以 $|AF| = |BF| = \sqrt{p^2 + \left(\frac{p}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3p}{2\sqrt{2}}$ ，因为 $\triangle ABF$

的周长为 $4\sqrt{2}$ ，所以 $2 \times \frac{3p}{2\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ ，解得 $p = 2$ 。故 B, C, D 错误。故选：A。

18. (2023 天津 统考一模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A ，以 A 为圆心， b 为半径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N 两点。若 $\angle MAN = 120^\circ$ ，则 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】A 【分析】根据已知条件及点到直线的距离公式，结合双曲线的离心率公式即可求解。

【详解】双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 $A(a, 0)$ ，以 A 为圆心， b 为半径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N 两点。当 $\angle MAN = 120^\circ$ 时，可得点 $A(a, 0)$ 到渐近线 $bx + ay = 0$ 的距离为 $b \sin 30^\circ = \frac{1}{2}b$ ，

即 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}b$ ，整理可得 $\frac{c}{a} = 2$ ，即 $e = \frac{c}{a} = 2$ 所以 C 的离心率为 2 故选：A。

19. (2023 天津河东 一模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴为 4，抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线过双曲线的左顶点，抛物线与双曲线的一个交点为 $P(4, m)$ ，则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm \frac{2}{3}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}x$

【答案】A 【分析】求出 $a = 2$ ， $p = 4$ ，将 $P(4, m)$ 代入双曲线和抛物线，求出 $m^2 = 8p = 32$ ， $b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，进而求出渐近线方程。【详解】由题意得 $2a = 4$ ， $a = 2$ ，故双曲线左顶点坐标为 $(-a, 0)$ ，

抛物线的准线为 $x = -\frac{p}{2}$ ，故 $a = \frac{p}{2}$ ，解得 $p = 4$ ，

点 $P(4, m)$ 为抛物线与双曲线的一个交点，故 $m^2 = 8p = 32$ ， $\frac{16}{4} - \frac{m^2}{b^2} = 1$ ，

即 $4 - \frac{32}{b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = \frac{32}{3}$ ，解得 $b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，故双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}}{2}x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ 。故选：A

20. (2023 天津红桥 统考一模) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【答案】C 【解析】求出抛物线的焦点坐标以及双曲线的渐近线方程，利用点到直线的距离求出 $\frac{b}{a}$ 的值，再利用离心率公式可求得双曲线的离心率的值。

【详解】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$ ，双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，由题意得 $d = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解得

$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，因此，该双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 2$ 。故选：C。

21. (2023 天津 大港一中校联考一模) 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点， P 为双曲线右支上一点，满足 $\angle PF_2F_1 = \frac{\pi}{2}$ ，连接 PF_1 交 y 轴于点 Q ，若 $|QF_2| = \sqrt{2}c$ ，则双曲线的离心率是 ()

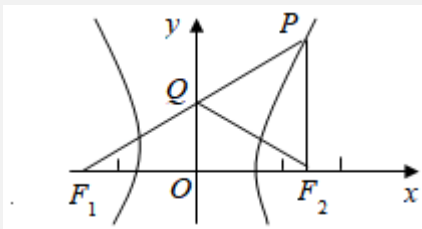
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. $1 + \sqrt{3}$

【详解】解：由题意可得 PF_2 垂直于 x 轴， $OQ \parallel PF_2$ ，因为 O 为 F_1F_2 的中点，则 Q 为 PF_1 的中点，

可得 $|PF_1| = 2|QF_2| = 2\sqrt{2}c$ ，由 $x = c$ 可得 $y = \pm b\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b^2}{a}$ ，即有 $|PF_2| = \frac{b^2}{a}$ ，

在直角三角形 PF_1F_2 中，可得 $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2$ ，即有 $8c^2 = \frac{b^4}{a^2} + 4c^2$ ，可得 $b^4 = 4a^2c^2$ ，

即 $b^2 = 2ac = c^2 - a^2$ ，由 $e = \frac{c}{a}$ 可得， $e^2 - 2e - 1 = 0$ ，解得 $e = 1 + \sqrt{2}$ ($1 - \sqrt{2}$ 舍去)，故选：C。



22. (2023 天津南开 统考一模) 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 上一点 $A(m, n)$ 到准线的距离为 5， F 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左焦点， P 是双曲线右支上的一动点，则 $|PF| + |PA|$ 的最小值为 ()

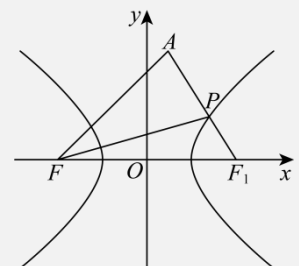
- A. 12 B. 11 C. 10 D. 9

【答案】D 【分析】先根据题意求出点 A 的坐标，设 F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点，根据双曲线的定义可得

$|PF| + |PA| = |PA| + |PF_1| + 2a > |AF_1| + 2a$ ，从而可得出答案。

【详解】抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线为 $x = -4$ ，则点 $A(m, n)$ 到准线的距离为 $m + 4 = 5$ ，所以 $m = 1$ ，

则 $n = \pm 4$ ，故 $A(1, 4)$ ，设 F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点， $F_1(4, 0)$ 则 $|PF| - |PF_1| = 2a = 4$ ，



则 $|PF| = |PF_1| + 4$ ，故 $|PF| + |PA| = |PA| + |PF_1| + 4 > |AF_1| + 4 = \sqrt{9 + 16} + 4 = 9$ ，当且仅当 A, P, F_1 三点共线时取等号，所以

$|PF| + |PA|$ 的最小值为 9。故选：D。

23. (2023 天津 校联考一模) 由伦敦著名建筑事务所 Steyn Studio 设计的南非双曲线大教堂惊讶世界, 该建筑是数学与建筑完美结合造就的艺术品. 若将如图所示的大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{4} = 1 (a > 0)$ 下支的一部分, 以原点为圆心, 双曲线虚半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线分别相交于 A、B、C、D 四点, 四边形 ABCD 的面积为 $2a$, 则双曲线的方程为 ()



- A. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$
C. $\frac{9y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ D. $\frac{2y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

【答案】B

【分析】不妨设点 A、B、C、D 分别为第一、二、三、四象限内的点, 写出双曲线的渐近线方程, 将渐近线方程与圆的方程联立, 求出点 A、B、C、D 的坐标, 利用矩形的面积公式可求得 a^2 的值, 即可得出该双曲线的方程.

【详解】双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{ax}{2}$,

以原点为圆心, 双曲线虚半轴长为半径长的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{ax}{2} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}} \\ y = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}} \\ y = -\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}} \end{cases},$$

不妨设点 A、B、C、D 分别为第一、二、三、四象限内的点,

$$\text{则 } A\left(\frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}}, \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}}\right), B\left(-\frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}}, \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}}\right), C\left(-\frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}}, -\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}}\right),$$

$$D\left(\frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}}, -\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}}\right), \text{ 易知四边形 } ABCD \text{ 为矩形, 且 } |AB| = \frac{8}{\sqrt{a^2 + 4}}, |AD| = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 4}},$$

故四边形 ABCD 的面积为 $|AB| \cdot |AD| = \frac{32a}{a^2 + 4} = 2a$, 可得 $a^2 = 12$, 因此, 该双曲线的方程为 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$, 故选: B.

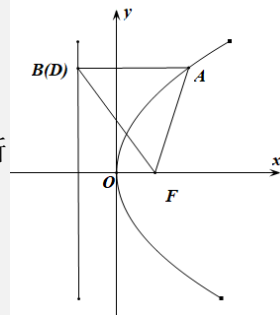
24. (2023 天津河北 统考一模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于点 A, 点 B 是抛物线的准线上一点, 抛物线的焦点 F 为双曲线的一个焦点, 且 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$ B. $\frac{7x^2}{4} - \frac{7y^2}{3} = 1$ C. $\frac{3x^2}{7} - \frac{4y^2}{7} = 1$ D. $\frac{7x^2}{12} - \frac{7y^2}{16} = 1$

【答案】A 【分析】根据题意得 $AB \perp l$, 设 $A(\frac{t^2}{4}, t)$, 列方程可得点 A 的坐标, 然后求解得 $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 再由 $c^2 = a^2 + b^2 = 1$, 即可求出双曲线的方程.

【详解】由题意, 点 $F(1, 0)$, 抛物线的准线方程为 $x = -1$, 作 $AD \perp l$, 由抛物线的定义可知, $|AD| = |AF|$, 又 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 所以 $|AB| = |AF|$, 所以 $|AB| = |AD|$, 即点 B、D 重合, 所以 $AB \perp l$, 设 $A(\frac{t^2}{4}, t)$, 不妨设 $t > 0$, 则

$$t = \frac{p}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}, \text{ 得 } t = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } A(3, 2\sqrt{3}), \text{ 所以 } \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 又因为 } c^2 = a^2 + b^2 = 1, \text{ 所}$$



以得 $a^2 = \frac{3}{7}, b^2 = \frac{4}{7}$, 所以双曲线的方程为 $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$. 故选: A

25. (2023 天津 校联考一模) 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 抛物线 $C_2: y^2 = 4cx$ 的准线与 C_1 交于 M, N 两点, 且 $\triangle MNF_2$ 为正三角形, 则双曲线 C_1 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【答案】A 【分析】求出抛物线准线方程, 进而得到 $|MN| = \frac{2b^2}{a}$, 由等边三角形得到边长之间的比例关系, 得到齐次式, 化为 $\sqrt{3}e^2 - 2e - \sqrt{3} = 0$, 求出离心率. 【详解】 $C_2: y^2 = 4cx$ 的准线方程为 $x = -c$, 经过点 $F_1(-c, 0)$, $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, 令 $x = -c$ 得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 故 $|MN| = \frac{2b^2}{a}$, 因为 $\triangle MNF_2$ 为正三角形, 所以 $|F_1F_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$, 即 $2c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2b^2}{a}$, 联立 $b^2 = c^2 - a^2$, 解得 $\sqrt{3}c^2 - 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0$, 方程两边同时除以 a^2 得 $\sqrt{3}e^2 - 2e - \sqrt{3} = 0$, 解得 $e = \sqrt{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍去), 故双曲线 C_1 的离心率为 $\sqrt{3}$. 故选: A

26. (2023 天津河西 统考一模) 已知抛物线 $y^2 = -4\sqrt{5}x$, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 抛物线的准线过双曲线的右焦点 F_2 , 与双曲线的渐近线交于点 A, 若 $\angle F_2F_1A = \frac{\pi}{4}$, 则双曲线的标准方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$

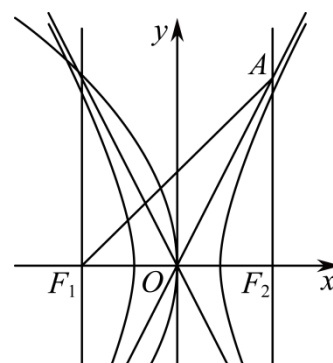
【答案】A 【分析】由抛物线方程确定准线, 即知 $F_2(\sqrt{5}, 0)$, 再由双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 令 $A(\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}b}{a})$, 结合

已知有 $|AF_2| = |F_1F_2|$, 进而求出双曲线参数, 即可得方程. 【详解】由题设, 抛物线准线

为 $x = \sqrt{5}$, 则 $F_2(\sqrt{5}, 0), F_1(-\sqrt{5}, 0)$,

双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 不妨令 $A(\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}b}{a})$,

又 $\angle F_2F_1A = \frac{\pi}{4}$, 易知: $\triangle AF_1F_2$ 为等腰直角三角形, 即 $|AF_2| = |F_1F_2|$,



所以 $\frac{\sqrt{5}b}{a} = 2c = 2\sqrt{5}$ ，即 $\frac{b}{a} = 2$ ，又 $a^2 + b^2 = 5$ ，可得 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$ ，故双曲线为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 。故选：A

27. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，抛物线 E 的准线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 A, B ，若 $\triangle ABF$ 为正三角形，则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ C. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

【答案】C 【分析】根据双曲线方程，把渐近线表示出来，推出 A, B 两点坐标，利用 $\triangle ABF$ 为正三角形，列方程解系数既可。【详解】双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

抛物线 E 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线方程为 $x = -1$ ，不妨取 $A\left(-1, -\frac{b}{a}\right)$ ， $B\left(-1, \frac{b}{a}\right)$ ，

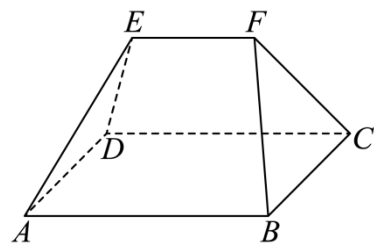
$\triangle ABF$ 为正三角形，由对称性可知，直线 AF 的倾斜角为 30° ，则 $k_{AF} = \frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ 。故选：C

28. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 在中国古代数学经典著作《九章算术》中，称图中的多面体 $ABCDEF$ 为“刍甍”，书中描述了刍甍的体积计算方法：求积术曰，倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一，即

$V = \frac{1}{6}(2AB + EF) \cdot AD \cdot h$ ，其中 h 是刍甍的高，即点 F 到平面 $ABCD$ 的距离。若底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形， $EF = 2$

且 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是等腰三角形， $\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$ ，则该刍甍的体积为 ()



A. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

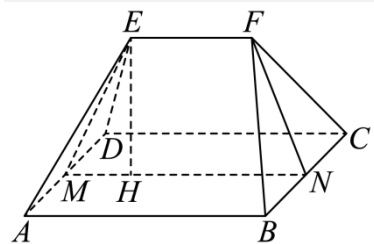
C. $10\sqrt{3}$

D. $\frac{40}{3}$

【答案】B

【分析】根据给定的几何体，取 AD, BC 中点 M, N ，证明平面 $EMNF \perp$ 平面 $ABCD$ ，求出点 F 到平面 $ABCD$ 的距离，再求出刍甍的体积作答。

【详解】取 AD, BC 中点 M, N ，连接 EM, MN, NF ，如图，



由正方形 $ABCD$ 知， $MN \parallel AB$ ， $MN \perp AD$ ，而 $\triangle ADE$ 为等腰三角形，且 $\angle AED = 90^\circ$ ，即有 $EM \perp AD$ ， $EM \cap MN = M$ ， $EM, MN \subset$ 平面 EMN ，则 $AD \perp$ 平面 EMN ，

同理 $BC \perp$ 平面 MNF ，而 $AD \parallel BC$ ，于是 $AD \perp$ 平面 MNF ，则点 F 在平面 EMN 内，

而 $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，于是平面 $EMNF \perp$ 平面 $ABCD$ ，在平面 $EMNF$ 内过 E 作 $EH \perp MN$ 于 H ，

而平面 $EMNF \cap$ 平面 $ABCD = MN$ ，因此 $EH \perp$ 平面 $ABCD$ ，

因为 $\angle BFC = 90^\circ$ ， $\triangle BCF$ 是等腰三角形，则 $EM = FN = \frac{1}{2}BC = 2$ ，

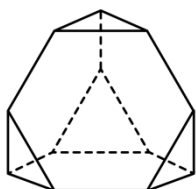
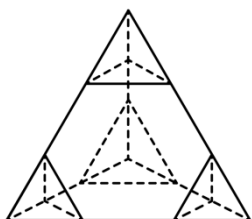
因为 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ ，平面 $EMNF \cap$ 平面 $ABCD = MN$ ， $EF \subset$ 平面 $EMNF$ ，

则 $EF \parallel MN$ ，四边形 $EMNF$ 为等腰梯形， $MN = AB = 4$ ，

因此 $EH = \sqrt{EM^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，所以该刍甍的体

$$V = \frac{1}{6}(2AB + EF) \cdot AD \cdot EH = \frac{1}{6} \times (2 \times 4 + 2) \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选: B}$$

29. (2023 天津河西 统考一模) 截角四面体是一种半正八面体，可由四面体经过适当的截角而得到. 如图，将棱长为 6 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面截角得到所有棱长均为 2 的截角四面体，则该截角四面体的体积为 ()



A. $6\sqrt{2}$

B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{46\sqrt{2}}{3}$

D. $16\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】求出棱长为 1 的正四面体的体积结合条件即得.

【详解】截角四面体的体积为大正四面体的体积减去四个相等的小正四面体体积，

因为棱长为 1 的正四面体的高 $h = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则棱长为 1 的正四面体的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ ，

所以该截角四面体的体积为 $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}$. 故选: C.

30. (2023 天津 校联考一模) 攒尖是古代中国建筑中屋顶的一种结构形式，常见的有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等，多见于亭阁式建筑，某园林建筑为四角攒尖，它主要部分的轮廓可近似看作一个正四棱锥，若这个正四棱锥的棱长均为 2，则该正四棱锥的体积为 ()



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. $4\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】根据题意，结合正四棱锥的性质，即可求得 AO 、 PO 的长，根

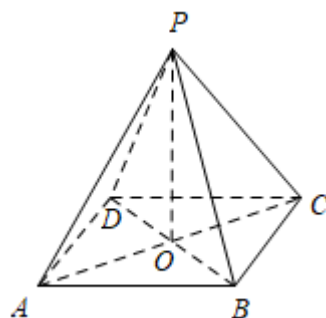
据椎体体积公式，即可得答案. 【详解】如图所示，正四棱锥 $P-ABCD$ 棱长均为 2，

连接 AC 、 BD 交于点 O ，连接 PO

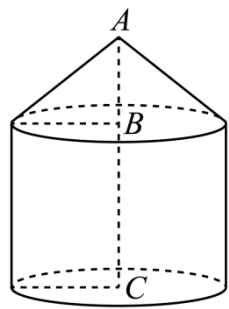
根据正四棱锥的性质，可得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AO = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$ ， $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{2}$ ，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 故选: C



31. (2023 天津 校联考一模) 如图, 几何体 Ω 为一个圆柱和圆锥的合体, 圆锥的底面和圆柱的一个底面重合, 圆锥的顶点为 A , 圆柱的上、下底面的圆心分别为 B 、 C , 若该几何体 Ω 存在外接球 (即圆锥的顶点与底面圆周在球面上, 且圆柱的底面圆周也在球面上). 已知 $BC = 2AB = 4$, 则该组合体的体积等于 ()



A. 56π

B. $\frac{70}{3}\pi$

C. 48π

D. 64π

【答案】A

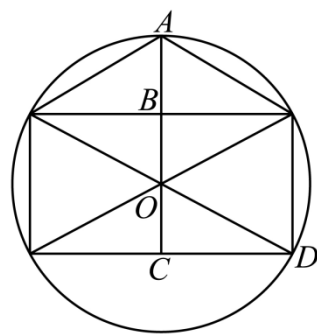
【分析】由组合体的特征确定球心在 BC 中点, 再由 R 得出底面半径, 进而得出组合体体积.

【详解】设该组合体外接球的球心为 O , 半径为 R , 易知球心在 BC 中点, 则

$$R = AO = 2 + 2 = 4.$$

则圆柱的底面半径为 $r = \sqrt{4^2 - (4 - 2)^2} = 2\sqrt{3}$,

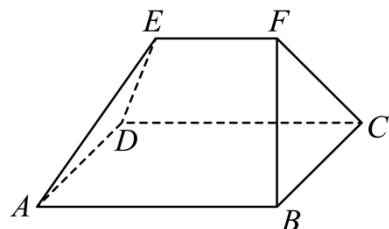
则该组合体的体积等于 $V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \times 2 + \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 4 = 56\pi$. 故选: A



32. (2023 天津 大港一中校联考一模) 在中国古代数学经典著作《九章算术》中, 称图中的多面体 $ABCDEF$ 为“刍甍”. 书中描述了刍甍的体积计算方法: 求积术曰, 倍下袤, 上袤从之, 以广乘之, 又以高乘之, 六而一, 即

$V = \frac{1}{6}(2AB + EF) \times AD \times h$, 其中 h 是刍甍的高, 即点 F 到平面 $ABCD$ 的距离. 若底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,

$EF = 2$, 且 $EF \parallel AB$, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是等腰三角形, $\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$, 则该刍甍的体积为 ()



A. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

C. $10\sqrt{3}$

D. $\frac{40}{3}$

【答案】B 【分析】作出图形, 如图, 计算点 F 到平面 $ABCD$ 的距离 FG , 并代入

公式求解即可.

【详解】如图所示,

设点 F 在底面的射影为 G , H, M 分别为 BC, AD 的中点,

连接 EM, FH, MH , 则 FG 即为刍甍的高,

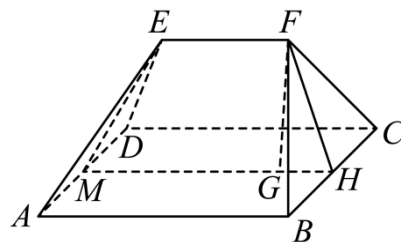
由 $EF \parallel AB$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$,

又 $EF \subset$ 平面 $EFHM$, 且平面 $ABCD \cap$ 平面 $EFHM = MH$, 所以 $EF \parallel MH$,

在“刍甍”中, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是等腰三角形, 所以 G 一定在 MH 上,

由题意底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $EF = 2$, 可知 $GH = 1$, 在 $\triangle BCF$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle BFC = 90^\circ$,

所以 $FH = \frac{1}{2}BC = 2$, 所以 $FG = \sqrt{FH^2 - GH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以 $V = \frac{1}{6} \times (2 \times 4 + 2) \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$. 故选: B.



33. (2023 天津 统考一模) 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥侧面积的一半, 那么其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

()

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

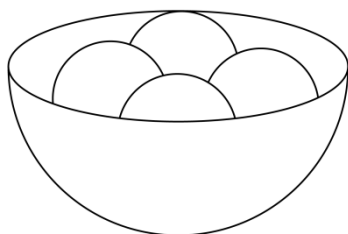
【答案】D 【分析】根据正四棱锥的几何性质列出等量关系，进而即可求解。

【详解】设正四棱锥的高为 h ，底面边长为 a ，侧面三角形底边上的高为 h' ，则

由题意可知，
$$\begin{cases} h^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a h' \\ h^2 = h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$
，因此有 $h^2 = h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a h'$ ，即 $\left(\frac{h'}{a}\right)^2 - \frac{h'}{a} - \frac{1}{4} = 0$ ，解得 $\frac{h'}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ ，

因为 $\frac{h'}{a} > 0$ ，所以 $\frac{h'}{a} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ 。所以侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 故选：D。

34. (2023 天津和平 统考一模) 为庆祝国庆，立德中学将举行全校师生游园活动，其中有一游戏项目是夹弹珠。如图，四个半径都是 1cm 的玻璃弹珠放在一个半球面形状的容器中，每颗弹珠的顶端恰好与容器的上沿处于同一水平面，则这个容器的容积是 ()



A. $\frac{2(5+3\sqrt{3})\pi}{3} \text{ cm}^3$

B. $\frac{4(5+3\sqrt{3})\pi}{3} \text{ cm}^3$

C. $2(5+3\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$

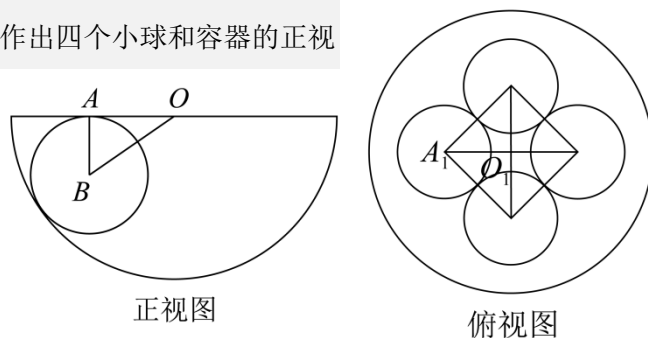
D. $\frac{8(5+3\sqrt{3})\pi}{3} \text{ cm}^3$

【答案】B 【分析】根据四个小球和容器的相切关系，作出对应的正视图和俯视图，建

立球心和半径之间的关系即可得到容器的半径。【详解】分别作出四个小球和容器的正视图和俯视图，如图所示：

正视图中小球球心 B ，半球球心 O 与切点 A 构成直角三角形，则有 $OA^2 + AB^2 = OB^2$ ，

俯视图中，四个小球球心的连线围成正方形，正方形的中



心到球心的距离 O_1A_1 与正视图中的 OA 相等，设半球半径为 R ，已知小球半径 $r=1$ ， $\therefore OA = \sqrt{2}$ ， $AB = 1$ ， $OB = \sqrt{3}$ ，

$R = OB + r = \sqrt{3} + 1$ 。半球面形状的容器的容积是 $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3} + 1)^3 = \frac{4(5+3\sqrt{3})\pi}{3}$ 。故选：B

35. (2023 天津南开 统考一模) 已知直线 $y = kx - 1$ 与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 16$ 相交于 A, B 两点，则 AB 的长度可能为 ()

A. 6

B. 7

C. 12

D. 14

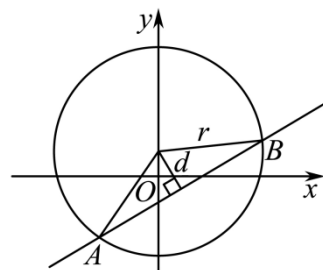
【答案】B 【分析】由直线过定点可知圆心到直线的最大距离，从而可判定相交弦的最小长度，而最大长度为直径，

可得结果。【详解】由条件可知：直线 $y = kx - 1$ 过定点 $(0, -1)$ ，圆心为 $(0, 1)$ ，半径 $r = 4$ ，

如下图所示, 则圆心到该直线的最大距离 $d_{\max} = 1 - (-1) = 2$, 而当该直线过圆心时, 圆心到该直线的距离最小为 0;

由弦长公式可得: $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} \in [4\sqrt{3}, 8]$.

故选: B



【点睛】本题考察直线与圆相交弦的取值范围, 属于中档题. 关键在于找出圆心到过定点直线的距离范围, 以及弦长公式要熟记.

36. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足

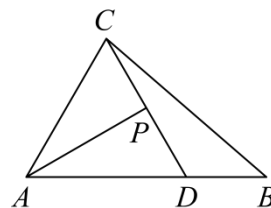
$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 3

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{2}$



【答案】A

【分析】设 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD}$, 可得出 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$, 可得出关于 λ 、 m 的方程组, 即可解得实数 m 的值; 利用数量积得出 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 8$, 利用平面向量数量积的运算性质结合基本不等式可求得 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值.

【详解】设 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD}$, 则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \lambda(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$$= \overrightarrow{AC} + \lambda \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right) = \frac{2}{3}\lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以, } \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{3} \\ m = 1-\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } m = \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 4, \therefore |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 8,$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{3} > 2\sqrt{\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2} + \frac{4}{3} = 4,$$

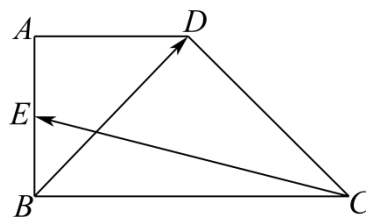
当且仅当 $\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ 时, 即当 $|\overrightarrow{AB}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{AC}|$ 时, 等号成立. 所以, $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 2.

故选: A.

37. (2023 天津 校联考一模) 如图所示, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 为 AB

的中点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$, 若向量 $\overrightarrow{CE}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的模为 4, 设 M 、 N 分别为线段 CD 、 AD 上的动点, 且 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CD}$,

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}$ 的取值范围是 ()



A. $\left[\frac{11}{9}, +\infty\right)$

B. $\left[\frac{11}{9}, \frac{13}{9}\right]$

C. $\left[\frac{13}{9}, \frac{61}{9}\right]$

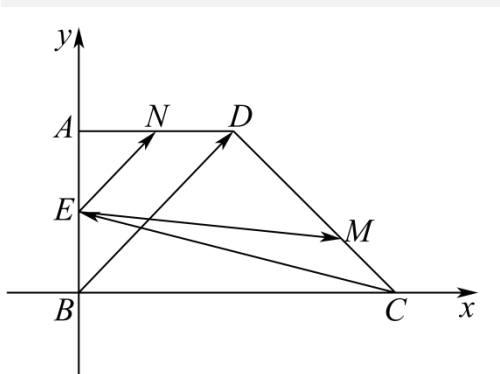
D. $\left[\frac{11}{9}, \frac{61}{9}\right]$

【答案】D 【分析】由向量的运算及投影向量的模求出梯形的直角边长，再建立平面直角坐标系，利用坐标运算得出关于 λ 的函数，利用对勾函数单调性求最值即可得解.

【详解】 $\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\therefore BA \perp BC$, $\therefore$ 梯形 $ABCD$ 为直角梯形,

$\because \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 = 4$, $\therefore |\overrightarrow{BA}| = 2$, 即 $BA = 2$, 由 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$, 同理可得 $AD = 2$,

又向量 $\overrightarrow{CE}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的模为 4, 所以 $BC = 4$, 以 B 为坐标原点, 建立如图所示平面直角坐标系,



则 $E(0,1), A(0,2), D(2,2), C(4,0)$,

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = (0,-1) + (4,0) + \lambda(-2,2) = (4-2\lambda, -1+2\lambda)$$

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = (0,1) + \frac{1}{9\lambda}(2,0) = \left(\frac{2}{9\lambda}, 1\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = (4-2\lambda, -1+2\lambda) \cdot \left(\frac{2}{9\lambda}, 1\right) = \frac{8}{9\lambda} + 2\lambda - \frac{13}{9},$$

由 $0 \leq \lambda \leq 1$ 且 $0 < \frac{1}{9\lambda} \leq 1$ 可得 $\frac{1}{9} \leq \lambda \leq 1$, 令 $f(\lambda) = 2\left(\lambda + \frac{4}{\lambda}\right) - \frac{13}{9}$, 则由对勾函数单调性知,

当 $\lambda \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right]$ 时单调递减, $\lambda \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 时单调递增, 故 $f(\lambda)_{\min} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{9}$, 由 $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{61}{9}, f(1) = \frac{13}{9}$ 知, $f(\lambda)_{\max} = \frac{61}{9}$,

故 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} \in \left[\frac{11}{9}, \frac{61}{9}\right]$, 故选: D

38. (2023 天津和平 统考一模) 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 ()

A. $|g(x)|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称

C. $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24}\right)$ 上单调递增 D. $g(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{5\pi}{24}, 0\right)$ 对称

【答案】C 【分析】利用图象的伸缩变换、平移变换以及正弦函数的图象与性质进行求解.

【详解】函数 $f(x) = \sin 2x$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到 $y = \sin 4x$,

再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = \sin \left[4 \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \right] = \sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right)$,

对于 A, $y = g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $|g(x)|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$, 故 A 错误;

对于 B, 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} = 2\pi$, 因为 $x = 2\pi$ 不是正弦函数 $y = \sin x$ 的对称轴, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24}\right)$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, 因为正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增, 故 C 正确;

对于 D, 当 $x = \frac{5\pi}{24}$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 因为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 不是正弦函数 $y = \sin x$ 的对称中心,

故 $\left(\frac{5\pi}{24}, 0\right)$ 不是 $y = g(x)$ 的对称中心, 故 D 错误. 故选: C.

39. (2023 天津 统考一模) 已知函数 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2} (a \in \mathbb{R})$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 则关于

$f(x)$ 有下列结论: ① $f(x)$ 的最小正周期为 π ; ② $x = -\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴;

③ $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减;

④ 先将函数 $y = 2 \sin 2x$ 图象上所有点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后把所得函数图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到

$f(x)$ 的图象. 其中正确结论的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D 【分析】化简函数 $f(x)$, 将 $x = \frac{5\pi}{12}$ 代入得函数为 0, 可求得 $a = \sqrt{3}$, 进而可得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 可判断 A; 通过计算 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 可判断 B; 当 $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$, 可得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的单调性, 可判断 C; 通过振幅变换和平移变换, 可判断 D.

【详解】 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2} = a \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} a \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$, 因为 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$,

则 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} a \sin \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$, 所以 $a = \sqrt{3}$. 所以 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

对于①, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故①正确;

对于②, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, 故②正确;

对于③, 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$, 又 $y = \sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上先单调递减,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 故③正确;

对于④, 将函数 $y = 2 \sin 2x$ 图象上所有点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后把所得函数图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

得到 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$, 故④正确. 故选: D.

40. (2023 天津河东 一模) 已知函数 $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$, 下列说法错误的为 ()

A. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ B. $f(x)$ 为偶函数 C. 在 $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 单调递减 D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【分析】根据诱导公式可得 $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 4x$ ，然后结合正弦型函数的性质，对选项逐一判断，即可得

到结果；【详解】因为函数 $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 4x$ 为奇函数，故 B 错误；

最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，故 A 正确；令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $-\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

即函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi\right]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ 当 $k = 0$ 时，即为 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，故 C 正确；

且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{4}{6}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ，故 D 正确；故选：B

41. (2023 天津 大港一中校联考一模) 对于函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，下列命题

①函数图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称；②函数图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 对称；

③函数图象可看作是把 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移个 $\frac{\pi}{6}$ 单位而得到；

④函数图象可看作是把 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍

(纵坐标不变)而得到；其中正确的命题的个数是(▲)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C 【详解】考点：正弦函数的对称性；函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换.

专题：综合题. 分析：①把 $x = -\frac{\pi}{12}$ 代入函数的表达式，函数是否取得最大值，即可判定正误；

②把 $x = \frac{5\pi}{12}$ ，代入函数，函数值是否为 0，即可判定正误；

③函数图象可看作是把 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移个 $\frac{\pi}{6}$ 单位，推出函数的表达式是否相同，即可判定；

④函数图象可看作是把 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，得到函数的表达式是否相同，即可判定正误.

解答：解：①把 $x = -\frac{\pi}{12}$ 代入函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，所以，①不正确；

②把 $x = \frac{5\pi}{12}$ ，代入函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，函数值为 0，所以②正确；

③函数图象可看作是把 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，所以不正确；

④函数图象可看作是把 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，得到函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

正确；故选 C.

点评：本题是基础题，考查三角函数的基本性质的应用，考查逻辑推理能力，常考题型.

42. (2023 天津南开 统考一模) 将函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图

象，若 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，则 ω 的最大值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B 【分析】求得 $g(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ ，由 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 可求得 $\frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4}$ ，结合函数 $g(x)$ 的单调性可得出关于 ω 的不等式，由此可得出 ω 的最大值.

【详解】将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到 $g(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

因为 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ，所以 $\frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4}$ ，

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以 $\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi$ ， $0 < \omega \leq \frac{3}{4}$ ，所以 ω 的最大值为 $\frac{3}{4}$. 故选：B.

43. (天津市十二区重点学校 2023 届高三下学期毕业班联考(一)数学试题) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 2$ ，

以下说法中，正确的是 ()

①函数 $f(x)$ 关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称；②函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；

③当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时， $f(x)$ 的取值范围为 $(-2, 0)$ ；

④将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图像对应的解析式为 $g(x) = 2\sin 2x - 1$.

A. ①②

B. ②③④

C. ①③

D. ②

【答案】D 【分析】利用倍角公式和辅助角公式化简函数解析式，再利用正弦函数的性质，解决函数图像的对称中心、单调区间、值域和平移问题.

【详解】由题意可得，

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 2 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

由 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，则 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，所以 $f(x)$ 图像的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, -1\right) (k \in \mathbb{Z})$ ，说法①错误；

$x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ ，则 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ ， $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 是函数 $y = 2\sin x - 1$ 单调递增区间，说法②正确；

当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时， $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ ， $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ ，则 $f(x)$ 的取值范围为 $(-2, 1]$ ，说法③错误；

将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图像对应的解析式为

$$g(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] - 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1, \text{ 说法④错误. 故选: D}$$

44. (2023 天津河北 统考一模) 将函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则

下列四个结论：

① $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 是 $g(x)$ 的一个解析式；② $g(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数；

③ $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbb{Z}$ ；

④直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴. 其中正确结论的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B 【分析】根据三角函数的变换规则得到 $g(x)$ 的解析式, 再根据余弦函数的性质计算可得.

【详解】将函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

得到函数 $g(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故①错误;

函数 $g(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 但是 $g(-x) = -\sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 故 $g(x)$ 为非奇非偶函数, 即②错误;

令 $2k\pi < 2x + \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$,

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, 故③正确;

因为 $g\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$, 所以直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴, 故④正确; 故选: B

45. (2023 天津 校联考一模) 若函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有最值, 有下面四个说法: ()

①函数 $f(x)$ 的最小正周期可能为 3π ② ω 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{6}\right]$;

③当 ω 取最大值时, $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴; ④当 ω 取最大值, $(-\pi, 0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心.

以上四个说法中, 正确的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B 【分析】根据题意可知可得 ω 的取值范围, 然后根据 ω 的范围逐一分析即可得解.

【详解】由 $x \in (\pi, 2\pi)$ 得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\omega\pi + \frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有最值,

所以 $T \geq 2\pi$, 所以 $0 < \omega \leq 1$, 所以 $\omega\pi + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right]$,

所以 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \omega \leq \frac{1}{6}$ 或 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi\right] \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \omega \leq \frac{2}{3}$,

所以 $\frac{1}{3} \leq \omega \leq \frac{2}{3}$ 或 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$, 所以②错误; 当 $\omega = \frac{2}{3}$ 时, $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$, 故①正确;

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, 可知 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴, 故③正确;

又因为 $f(-\pi) = \sin\left(-\frac{2}{3} \times \pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, 故④错误, 所以正确的是①③, 故答案为: B.

46. (2023 天津河西 统考一模) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列

正确个数有 ()

① $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{6}, 3)$ 对称; ② $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称;

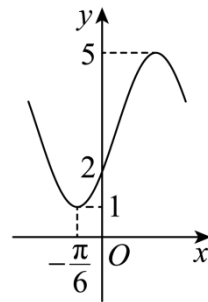
③ $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减; ④ $f(x)$ 在区间 $(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ 上的值域为 $(1, 3)$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



【答案】B【分析】根据三角函数图象确定参数 A, ω, φ, B 求出 $f(x)$ 的解析式, 计算 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值,

可判断①; 计算 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值, 可判断②; 根据正弦函数的单调性可判断③; 根据 $x \in (-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$, 确定 $2x - \frac{\pi}{6} \in (-\pi, 0)$,

结合正弦函数的值域, 可判断④. 【详解】由图象可得 $A = \frac{1}{2}(5 - 1) = 2$, 则 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) + B$,

$f(x)$ 的最大值为 $2 + B = 5$, $\therefore B = 3$, $\therefore f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) + 3$,

$f(x)$ 过点 $(0, 2)$, $\therefore f(0) = 2 \sin \varphi + 3 = 2$, $\therefore \sin \varphi = -\frac{1}{2}$, $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + 3$,

$f(x)$ 过点 $(-\frac{\pi}{6}, 1)$, $\therefore f(-\frac{\pi}{6}) = 2 \sin(-\frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{6}) + 3 = 1$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}) = 1$, $\therefore \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore \omega = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$, 由图像可知 $\frac{T}{4} > \frac{\pi}{6}$, 即 $T > \frac{2\pi}{3}$, 故 $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{2\pi}{3}$, $\therefore 0 < \omega < 3$, $\therefore \omega = 2$,

$\therefore f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$, $\therefore f(\frac{\pi}{6}) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + 3 = 4 \neq 3$, $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{\pi}{6}, 3)$ 对称, ①错误;

$\therefore f(\frac{\pi}{3}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 5$, $f(x)$ 取得最值, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, ②正确;

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, $\therefore k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}], k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \subseteq [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$,

故 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减, ③正确; $\therefore x \in (-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$, $\therefore 2x - \frac{\pi}{6} \in (-\pi, 0)$,

$\therefore \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-1, 0)$, $\therefore f(x) \in [1, 3)$, ④错误, 故选: B

47. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π , 其图象关于

直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称. 给出下面四个结论: ①将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数图象关于原点对称; ②点

$(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心; ③ $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$; ④ $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增. 其中正确的结论为 ()

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ①④

【答案】C【解析】根据题设条件, 结合三角函数的性质, 求得函数的解析式 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 再结合三角函数的图象变换和三角函数的性质, 逐项判定, 即可求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 π , 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \\ \frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，因此 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，

①将 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后函数解析式为 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ ，

由 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以其对称中心为： $(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ ，故①错；

②由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ，即函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ ；令 $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，则 $k = 1$ ，故②正确；

③由 $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故③错；

④由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $-\frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

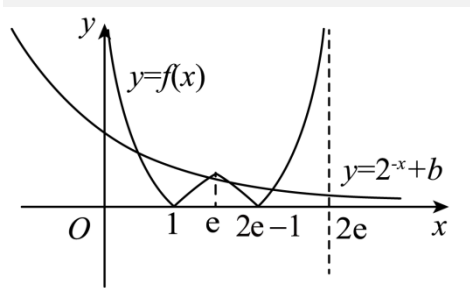
即函数 $f(x)$ 的增区间为 $[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$ ，因此 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，故④正确. 故选：C.

48. (2023 天津和平 统考一模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ f(2e - x), & e < x < 2e \end{cases}$ ，设方程 $f(x) = 2^{-x} + b (b \in \mathbb{R})$ 的四个实根从小

到大依次为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，对于满足条件的任意一组实根，下列判断中一定成立的是 ()

A. $x_1 + x_2 = 2$ B. $e^2 < x_3 x_4 < (2e - 1)^2$ C. $0 < (2e - x_3)(2e - x_4) < 1$ D. $1 < x_1 x_2 < e^2$

【答案】B 【分析】先作图确定四个根的范围，再举反例说明 A 不成立，根据不等式性质否定 C,D,最后根据放缩法证 B 成立. 【详解】方程 $f(x) = 2^{-x} + b (b \in \mathbb{R})$ 的根可化为函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2^{-x} + b$ 图象的交点的横坐标，作图如下：



由图象可得， $0 < x_1 < 1 < x_2 < e < x_3 < 2e - 1 < x_4 < 2e$ ，故 $e^2 < x_3 x_4 < (2e)^2$ ；

因为 $-\ln x_1 > \ln x_2 \Rightarrow \ln(x_1 x_2) < 0 \Rightarrow 0 < x_1 x_2 < 1$ ，D 错误，

若 $x_1 + x_2 = 2$ ，则可取 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ ，但 $-\ln \frac{1}{2} - 2^{-\frac{1}{2}} \neq \ln \frac{3}{2} - 2^{-\frac{3}{2}}$ ，所以 A 错误，

因为 $|\ln(2e - x_3)| > |\ln(2e - x_4)|$ ，所以 $\ln(2e - x_3) > -\ln(2e - x_4)$ ，

即 $\ln(2e - x_3) + \ln(2e - x_4) > 0$ ， $\therefore (2e - x_3)(2e - x_4) > 1$ ，C 错；

$\therefore (2e - x_3)(2e - x_4) > 1 \therefore 4e^2 - 2e(x_3 + x_4) + x_3 x_4 > 1$ ，

即 $1 < 4e^2 - 2e(x_3 + x_4) + x_3 x_4 < 4e^2 - 4e\sqrt{x_3 x_4} + x_3 x_4 = (2e - \sqrt{x_3 x_4})^2$ ，

$\therefore x_3 x_4 < (2e - 1)^2$ ， $\therefore e^2 < x_3 x_4 < (2e - 1)^2$. 故选：B

49. (2023 天津河东 一模) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(2-x)$ ，当 $x \in [-2, 0]$ 时， $f(x) = x + 2$ ，设函数 $h(x) = e^{-|x-2|} (-2 < x < 6)$ (e 为自然对数的底数)，则 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象所有交点的横坐标之和为 ()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

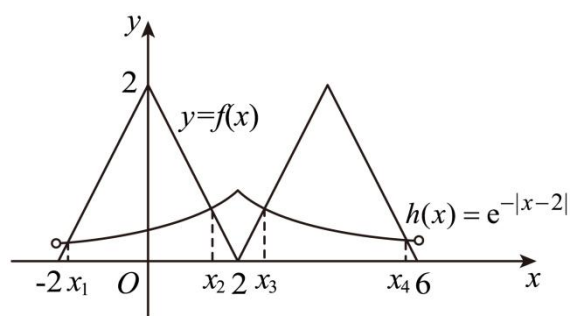
【答案】D 【分析】根据已知条件求出 $f(x)$ 的周期，利用周期性和偶函数作出 $f(x)$ 在区间 $(-2, 6)$ 的图象，以及

$h(x) = e^{-|x-2|}$ $(-2 < x < 6)$ 的图象，数形结合即可求解. 【详解】因为 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(2-x)$ ，

所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x=2$ 对称，因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x=0$ 对称，所以 $f(x)$ 的周期为 4，

$h(x) = e^{-|x-2|}$ $(-2 < x < 6)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

由 $x \in [-2, 0]$ 时， $f(x) = x+2$ ，作出 $f(x)$ 图象如图和 $h(x) = e^{-|x-2|}$ $(-2 < x < 6)$ 的图象



由图知 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象在区间 $(-2, 6)$ 有四个交点，设交点横坐标

分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，

且 $\frac{x_1 + x_4}{2} = 2$ ， $\frac{x_2 + x_3}{2} = 2$ ，

所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ ，

所以 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象所有交点的横坐标之和为 8，故选：D

50. (2023 天津红桥 统考一模) 函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x|, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，关于 x 的方程 $f(x) - a(x+1) = 0$ 有 2 个不相等的实数根，

则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup \{0\}$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (1, e) \cup \{0\}$ C. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ D. $(-\infty, 0] \cup (1, e)$

【答案】A 【分析】把函数 $f(x) - a(x+1) = 0$ 有 2 个不相等的实数根转化为以 $y = f(x)$ 和 $y = a(x+1)$ 的图象有两个

交点，作出图象求解即可. 【详解】因为函数 $f(x) - a(x+1) = 0$ 有 2 个不相等的实数根，

所以 $y = f(x)$ 和 $y = a(x+1)$ 的图象有两个交点. 作出函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x|, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图所示：

当 $x \leq -1$ 时， $f(x) = x^2 + x$ ， $f'(x) = 2x + 1$ ， $f'(-1) = -1$ ，

要使函数 $y = f(x)$ 和 $y = a(x+1)$ 的图象有两个交点，则 $a < -1$ ，

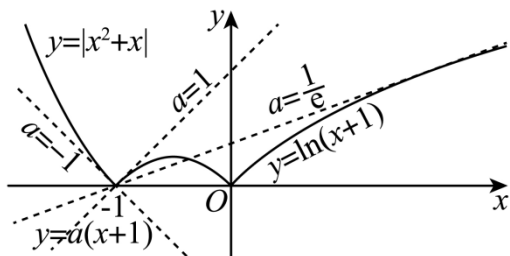
当 $-1 < x < 0$ ， $f(x) = -x^2 - x$ ， $f'(x) = -2x - 1$ ， $f'(-1) = 2 - 1 = 1$ ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \ln(x+1)$ ，过点 $(-1, 0)$ 与曲线的切点为 $(m, \ln(m+1))$ ，

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$ ，可得： $\frac{1}{m+1} = \frac{\ln(m+1)}{m+1}$ ，所以 $m = e - 1$ ，

所以切线斜率为 $k = \frac{1}{e}$ ，要使函数 $y = f(x)$ 和 $y = a(x+1)$ 的图象有两个交点，

由图可得 $a \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ ，



当 $a = 0$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) - a(x+1) = 0$ 有 2 个不相等的实数根.

综上: $a \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup \{0\}$.

故选: A.

51. (2023 天津 大港一中校联考一模) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases}, \text{ 若关于 } x \text{ 的方程 } [f(x)]^2 + af(x) + b = 0 (a, b \in \mathbb{R}), \text{ 有且仅有 6 个不同实数根, 则实数 } a \text{ 的}$$

取值范围是 ()

A. $\left[-4, -\frac{3}{2}\right]$ B. $\left[-4, -\frac{7}{2}\right]$ C. $\left[-4, -\frac{7}{2}\right] \cup \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ D. $\left[-4, -\frac{3}{2}\right] \cup \left(-1, -\frac{2}{7}\right)$

【答案】C 【分析】由偶函数性质可以画出函数 $f(x)$ 的图像, 关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + b = 0 (a, b \in \mathbb{R})$ 有 6 个不同的实数根, 根据数形结合和韦达定理即可求得结果.

【详解】由题意可知, 函数 $f(x)$ 的图像如下图所示:

根据函数图像, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0), (1, +\infty)$ 上单调递减;

且 $x = \pm 1$ 时取最大值 2, 在 $x = 0$ 时取最小值 0, $y = \frac{3}{2}$ 是部分图像的渐近线.

令 $f(x) = t$, 则关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + b = 0 (a, b \in \mathbb{R})$ 即可写成 $t^2 + at + b = 0 (a, b \in \mathbb{R})$

此时关于 t 的方程应该有两个不相等的实数根 (其他情况不合题意),

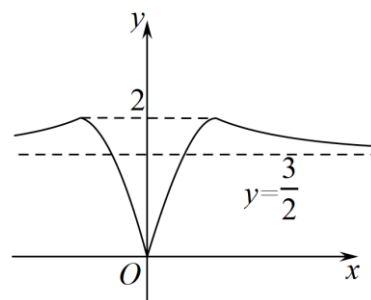
设 t_1, t_2 为方程的两个实数根,

显然, 有以下两种情况符合题意:

①当 $t_1 \in \left[0, \frac{3}{2}\right], t_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, 此时 $-a = t_1 + t_2 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, 则 $a \in \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

②当 $t_1 = 2, t_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, 此时 $-a = t_1 + t_2 \in \left(\frac{7}{2}, 4\right)$, 则 $a \in \left(-4, -\frac{7}{2}\right)$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $a \in \left(-4, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. 故选: C.



52. (2023 天津南开 统考一模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 16x^2 - 24x + 9, & x \leq 1, \\ \frac{1}{9}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 则下列结论:

① $f(n) = 9^{1-n}, n \in \mathbb{N}^*$

② $\forall x \in (0, +\infty), f(x) < \frac{1}{x}$ 恒成立

③关于 x 的方程 $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$ 有三个不同的实根，则 $\frac{1}{9} < m < 1$

④关于 x 的方程 $f(x) = 9^{1-n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的所有根之和为 $n^2 + \frac{n}{3}$ 其中正确结论有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B 【分析】根据已知递推可判定①正确；根据函数的变换规律，只需证明 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) < \frac{1}{x}$ 恒成立，作差构造函数，求导结合 $g(\frac{1}{4}) = 0$ ，可判定②错误；作出函数的图形，结合图象，可判定③正确；结合每个区间的对称轴，利用等差数列的求和公式，可判定④错误。

【详解】由题意知， $f(n) = \frac{1}{9} f(n-1) = \frac{1}{9^2} f(n-2) = \cdots = \frac{1}{9^{n-1}} f[n - (n-1)] = 9^{1-n}$ ，所以①正确；

又由上式知，要使得 $\forall x \in (0, +\infty), f(x) < \frac{1}{x}$ 恒成立，只需满足 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) < \frac{1}{x}$ 恒成立，即 $16x^2 - 24x + 9 < \frac{1}{x}$ ，

即 $16x^3 - 24x^2 + 9x - 1 < 0$ 恒成立，令 $g(x) = 16x^3 - 24x^2 + 9x - 1, x \in (0, 1]$ ，则 $g'(x) = 48x^2 - 48x + 9$ ，

令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $x = \frac{3}{4}$ ，当 $x \in (0, \frac{1}{4})$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；当 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单

调递减；当 $x \in (\frac{3}{4}, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，

当 $x = \frac{1}{4}$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值，极大值 $g(\frac{1}{4}) = 0$ ， $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ ，所以②不正确；作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所

示，

由图象可知，要使得方程 $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$ 有三个不同的实根，

则满足 $f(2) < m < f(1)$ ，即 $\frac{1}{9} < m < 1$ ，所以③正确；

由 $f(x) = \frac{1}{9} f(x-1)$ 知，函数 $f(x)$ 在 $(n, n+1)$ 上的函数图象可以由 $(n-1, n)$ 上的图象向右平移一个单位长度，再将所

有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 $\frac{1}{9}$ 倍得到，

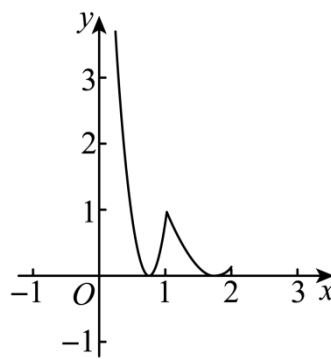
因为 $y = 16x^2 - 24x + 9$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{4}$ ，故 $f(x) = 9^0$ 的两根之和为 $\frac{3}{2}$ ，

同理可得： $f(x) = 9^1$ 的两个之和为 $\frac{3}{2} + 2$ ， $\cdots \cdots$ ， $f(x) = 9^{1-n}$ 的两个之和为

$\frac{3}{2} + 2(n-1)$ ，

故所有根之和为 $\frac{3}{2} + (\frac{3}{2} + 2) + \cdots + [\frac{3}{2} + 2(n-1)] = n^2 + \frac{3}{2}n$ ，所以④不正确。

故选：B.



53. (2023 天津河东 一模) 命题“有一个偶数是素数”的否定是 ()

- A. 任意一个奇数是素数 B. 存在一个偶数不是素数 C. 存在一个奇数不是素数 D. 任意一个偶数都不是素数

【答案】D

【详解】由于存在量词命题 $p: \exists x \in M, p(x)$, 否定为 $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$. 所以命题“有一个偶数是素数”的否定是“任意一个偶数都不是素数”. 故选: D

54. (2023 天津河东 一模) 在面积为 4 的扇形中, 其周长最小时半径的值为 ()

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 1

【答案】C 【分析】设扇形的半径为 $R (R > 0)$, 圆心角为 α , 根据扇形的面积公式将 α 用 R 表示, 再根据扇形的弧长和周长公式结合基本不等式即可得解. 【详解】设扇形的半径为 $R (R > 0)$, 圆心角为 α ,

$$\text{则 } \frac{1}{2} \alpha R^2 = 4, \text{ 所以 } \alpha = \frac{8}{R^2}, \text{ 则扇形的周长为 } 2R + \alpha R = 2R + \frac{8}{R} > 2\sqrt{2R \cdot \frac{8}{R}} = 8,$$

当且仅当 $2R = \frac{8}{R}$, 即 $R = 2$ 时, 取等号, 此时 $\alpha = 2$, 所以周长最小时半径的值为 2. 故选: C.

55. (2023 天津红桥 统考一模) 某班级有 50 名学生, 期末考试数学成绩服从正态分布 $N(120, \sigma^2)$, 已 $P(X > 140) = 0.2$, 则 $X \in [100, 140]$ 的学生人数为 ()

- A. 5 B. 10 C. 20 D. 30

【详解】因为期末考试数学成绩服从正态分布 $N(120, \sigma^2)$, 所以期末考试数学成绩关于 $\mu = 120$ 对称,

则 $P(X > 140) = P(X < 100) = 0.2$, 所以 $P(100 < X < 140) = 0.6$, 所以 $X \in [100, 140]$ 的学生人数为: $0.6 \times 50 = 30$ 人. 故选: D.

56. (2023 天津红桥 统考一模) 已知 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ()

- A. $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ B. $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta \Rightarrow m \parallel n$
C. $m \perp \alpha, m \perp n \Rightarrow n \parallel \alpha$ D. $n \parallel m, n \perp \alpha \Rightarrow m \perp \alpha$

【答案】D 【详解】若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, m \subset \beta$, 则 m, n 可能平行也可能异面, 故 B 错误; 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故 C 错误; 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 由于 m, n 不一定相交, 故 $\alpha \parallel \beta$ 也不一定成立, 故 A 错误; 若 $m \parallel n, n \perp \alpha$, 根据线面垂直的第二判定定理, 我们易得 $m \perp \alpha$, 故 D 正确.

二、填空题

57. (2023 天津河北 统考一模) 截角四面体 (亦称“阿基米德多面体”) 的表面由四个正三角形和四个正六边形组成, 它是由一个正四面体分别沿每条棱的三等分点截去四个小正四面体而得到的几何体. 若一正四面体的棱长为 3, 则由其截得的截角四面体的体积为_____.

【答案】 $\frac{23\sqrt{2}}{12} / \frac{23}{12} \sqrt{2}$

【分析】由题意可知截角四面体的体积等于大正四面体的体积减去 4 个小正四面体的体积即可

【详解】因为大正四面体的棱长为 3,

$$\text{所以正四面体的的一个底面面积为 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}, \text{ 底面正三角形的高为 } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{则正四面体的高为 } \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} \right)^2} = \sqrt{6},$$

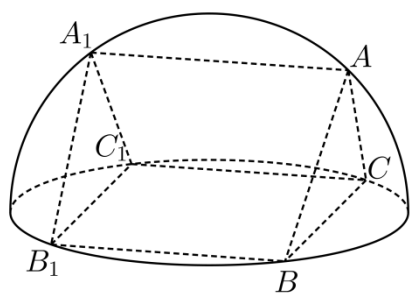
所以大正四面体的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$,

由题意可得四个角上的小正四面体的棱长为 1, 则其底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 底面正三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则小正四面体的

高为 $\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以小正四面体的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$,

所以截得的截角四面体的体积为 $\frac{9\sqrt{2}}{4} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}}{12}$, 故答案为: $\frac{23\sqrt{2}}{12}$

58. (2023 天津南开 统考一模) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的六个顶点都在半径为 1 的半球面上, $AB = AC$, 侧面 BCC_1B_1 是半球底面圆的内接正方形, 则直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】底面正方形的对角线即球的直径, 利用直三棱柱的性质及勾股定理可以求得 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积, 从而求体积.

【详解】如图所示, 由题意知, 球心在底面 BCC_1B_1 的中心 O 上, 故 BC_1 为截面

圆的直径,

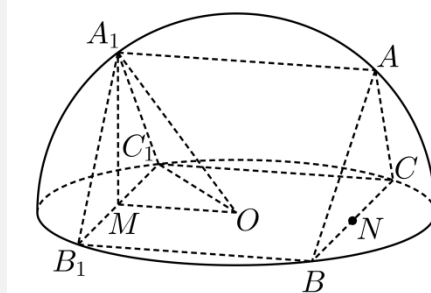
则 $BC_1 = 2, BC = \sqrt{2}$,

取 B_1C_1 的中点 M , 连接 AM, AO, C_1O ,

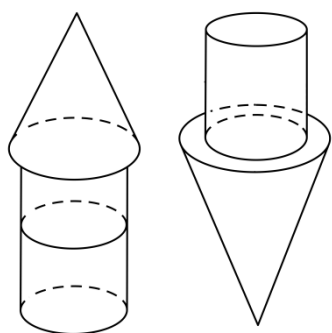
易知: 底面 BCC_1B_1 中 $OM \parallel BB_1, OM = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AM \perp B_1C_1$,

则 $OM \perp$ 面 $A_1B_1C_1$, 即 $\triangle AMO$ 为直角三角形, 由勾股定理可得: $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故

$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times B_1C_1 \times AM = \frac{1}{2}$ 所以 $V = S_{\triangle A_1B_1C_1} \times BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$



59. (2023 天津河东 一模) 如图所示, 一个由圆锥和圆柱组成的玻璃容器, 中间联通 (玻璃壁厚度忽略不计), 容器中装有一定体积的水, 圆柱高为 10, 底面半径为 3, 圆锥高为 h , 底面半径大于圆柱, 左图中, 圆柱体在下面, 液面保持水平, 高度为 h , 右图中将容器倒置, 水恰好充满圆锥, 则圆锥底面的半径为_____.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【分析】根据前后体积一致, 列出计算式即可求解.

【详解】 $V_{\text{水}} = \pi \cdot 3^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$,

解得 $R^2 = 27, R = 3\sqrt{3}$.

故答案为: $3\sqrt{3}$

60. (2023 天津和平 统考一模) 直线 $l: y = x$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = a^2 (a > 0)$ 交 A, B 两点, 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 【分析】 结合几何关系和点到直线的距离即可求解.

【详解】 由条件和几何关系可得圆心 C 到直线 $l: y = x$ 的距离为 $\frac{|1-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$, 解得 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

61. (2023 天津 统考一模) 直线 $x + y - 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 相交, 所得的弦的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$ 【分析】 写出圆的标准方程, 然后利用弦长公式计算即得.

【详解】 因为圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 即: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, 则圆心 $(1, -2)$ 到直线 $x + y - 1 = 0$ 的距离:

$d = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 由弦长公式可得弦长为: $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2}$. 故答案为: $2\sqrt{2}$.

62. (2023 天津河东 一模) 已知直线 $x + y + 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 相切, 则满足条件的实数 a 的值为_____.

【答案】 0 【分析】 先根据方程 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 表示圆求出 a 的范围, 再由圆心到直线的距离等于半径求解

即可. 【详解】 解: 因为方程 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 表示圆,

所以 $4 + 4 - 4a > 0$, 解得 $a < 2$,

因为圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 的圆心为 $(-1, 1)$, 半径 $R = \frac{\sqrt{8-4a}}{2} = \sqrt{2-a}$, 又因为直线 $x + y + 2 = 0$ 与圆

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 相切, 所以圆心 $(-1, 1)$ 到直线的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $R = \sqrt{2-a} = \sqrt{2}$, 解得 $a = 0$, 满足

$a < 2$.

故答案为: 0

63. (2023 天津红桥 统考一模) 已知两圆 $x^2 + y^2 = 10$ 和 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是_____. 【答案】 $x + 3y = 0$

【详解】 试题分析: $\because$ 两圆为 $x^2 + y^2 = 10$ ①, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ ②, ② - ① 可得 $x + 3y = 0$, 所以公共弦 AB 所在直线的方程为 $x + 3y = 0$.

64. (2023 天津 大港一中校联考一模) 若直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 截得线段的长为 6, 则实数 m 的值为_____.

【答案】 24 【分析】 把圆的一般方程化为圆的标准方程, 利用点到直线的距离公式以及勾股定理进行求解.

【详解】 把圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 化为标准方程有: $(x+1)^2 + y^2 = 1+m$, 所以圆心 $C(-1, 0)$, 半径 $r = \sqrt{1+m}$, 又直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$,

所以圆心 C 到直线的距离为 $d = \frac{|-1-0+9|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = 4$ ，因为直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 截得线段的长为 6，根据勾股定理有： $d^2 + 3^2 = r^2$ ，解得 $r = 5$ ，

所以 $r = \sqrt{1+m} = 5$ ，解得 $m = 24$ 。故答案为：24。

65. (2023 天津 校联考一模) 已知圆经过 $(3,0)$ 和 $(1,-2)$ ，圆心在直线 $x + 2y - 1 = 0$ 上，则圆的标准方程为_____。

【答案】 $(x-1)^2 + y^2 = 4$

【分析】求出 $(3,0)$ 和 $(1,-2)$ 连接的线段的垂直平分线，与 $x + 2y - 1 = 0$ 可得圆心坐标，从而可求圆的标准方程。

【详解】 $(3,0)$ 和 $(1,-2)$ 的中点坐标为 $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (2,-1)$ ，过 $(3,0)$ 和 $(1,-2)$ 的斜率为 $\frac{0-(-2)}{3-1} = 1$ ，

故该两点连接的线段的垂直平分线为 $y+1 = -(x-2)$ ，即 $x+y-1=0$ 。

联立 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ，即圆心坐标为 $(1,0)$ 。故半径为 $3-1=2$ 。所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 。

66. (2023 天津 校联考一模) 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 6y + m = 0$ 外切，此时直线 $l: x + y = 0$ 被圆 C_2 所截的弦长_____。

【答案】 $\sqrt{34}$ 【分析】将圆 C_2 的方程写成标准形式，然后根据两圆外切，可得圆心距离为半径之和，可得 m ，接着计算 C_2 到直线的距离，最后根据圆的弦长公式计算可得结果。【详解】由题可知： $C_1: x^2 + y^2 = 4$

$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 6y + m = 0$ ，即 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25-m$ 且 $25-m > 0 \Rightarrow m < 25$

由两圆向外切可知 $\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = 2 + \sqrt{25-m}$ ，解得 $m = 16$ 所以 $C_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

C_2 到直线的距离为 $d = \frac{|4-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，设圆 C_2 的半径为 R

则直线 $l: x + y = 0$ 被圆 C_2 所截的弦长为 $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - \frac{1}{2}} = \sqrt{34}$ 故答案为： $\sqrt{34}$

67. (2023 天津河西 统考一模) 与直线 $x - y - 4 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 都相切的半径最小的圆的方程是_____。

【答案】 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

【分析】根据题意可知所求圆与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 外切，且在直线 $x - y - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 之间，结合圆的性质求圆心和半径。【详解】因为圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 的圆心 $C(-1,1)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，

圆心 $C(-1,1)$ 到直线 $x - y - 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{2}$ ，

可知所求最小圆的半径 $r = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

设与直线 $x - y - 4 = 0$ 垂直的直线方程为 $l: x + y + m = 0$,

又因为直线 l 过圆心 $C(-1, 1)$, 则 $-1 + 1 + m = 0$,

即 $m = 0$, 则 $l: x + y = 0$, 联立方程 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$,

即 $x + y = 0$ 与 $x - y - 4 = 0$ 的交点 $M(2, -2)$,

设所求圆的圆心为 $(a, -a) (a < 2)$, 则 $\frac{|a - (-a) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 3$ (舍去), 即圆心为 $(1, -1)$,

故所求圆的方程为 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$. 故答案为: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

68. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的公共弦的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$ 【分析】 将两圆方程作差可得出相交弦所在直线的方程, 求出圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 的圆心到相交弦所在直线的距离, 利用勾股定理可求得相交弦长.

【详解】 将圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的方程作差可得 $x - y + 2 = 0$,

所以, 两圆相交弦所在直线的方程为 $x - y + 2 = 0$, 圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 的圆心为原点 O , 半径为 $r = 2$,

原点 O 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以, 两圆的公共弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$. 故答案为: $2\sqrt{2}$.

69. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知 $1 < a < 4$, 则 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是_____.

【答案】 2 【分析】 变形条件等式得 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} \right) (4-a+a-1) - 1$, 然后展开, 利用基本不等式求最小值. 【详解】 $\because 1 < a < 4$,

$\therefore 4-a > 0, a-1 > 0$,

$\therefore \frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} \right) (4-a+a-1) - 1$

$= \frac{1}{3} \left(5 + \frac{4(a-1)}{4-a} + \frac{4-a}{a-1} \right) - 1 > \frac{1}{3} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4(a-1)}{4-a} \cdot \frac{4-a}{a-1}} \right) - 1 = 2$, 当且仅当 $\frac{4(a-1)}{4-a} = \frac{4-a}{a-1}$, 即 $a = 2$ 时等号成立,

$\therefore \frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2. 故答案为: 2.

70. (2023 天津 校联考一模) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}/2.5$

【分析】 由基本不等式分析 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2$, 换元结合对勾函数性质可求最小值.

【详解】 由题意, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{a+b} = a+b + \frac{1}{a+b}$,

因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2$ ，令 $t = a+b (t \geq 2)$ ， $y = t + \frac{1}{t}$ ，

由对勾函数性质可知，当 $t = 2$ 时， y 有最小值 $\frac{5}{2}$ ，当且仅当 $a = b = 1$ 时取到，

故 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$ 。故答案为： $\frac{5}{2}$

71. (2023 天津南开 统考一模) 已知实数 $a > 0, b > 0, a+b=1$ ，则 $2^a + 2^b$ 的最小值为_____。

【答案】 $2\sqrt{2}$ 【分析】 运用基本不等式求和的最小值即可。

【详解】 $\because a > 0, b > 0, a+b=1, \therefore 2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \times 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $2^a = 2^b$ 即 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号。

72. (2023 天津 大港一中校联考一模) 已知 $ab = \frac{1}{2}$ ， $a, b \in (0, 1)$ ，则 $\frac{1}{1-a} + \frac{4}{1-b}$ 的最小值为_____，

【答案】 $10 + 4\sqrt{2}$

【解析】 由已知条件可得 $\frac{1}{1-a} + \frac{4}{1-b} = 2\left(\frac{1}{2-2a} + \frac{2}{2a-1}\right)[(2-2a) + (2a-1)] + 4 = 2\left[1 + 2 + \frac{2a-1}{2-2a} + \frac{2(2-2a)}{2a-1}\right] + 4$ ，然后利用基本不等式可得答案

【详解】 $\because ab = \frac{1}{2}, a, b \in (0, 1), \therefore b = \frac{1}{2a}$ ，

$\therefore 1-a > 0, 1-b = 1 - \frac{1}{2a} > 0, \therefore 2a-1 > 0$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{1-a} + \frac{4}{1-b} &= \frac{1}{1-a} + \frac{4}{1-\frac{1}{2a}} = \frac{1}{1-a} + \frac{8a}{2a-1}, = \frac{1}{1-a} + \frac{4(2a-1)+4}{2a-1}, = \frac{1}{1-a} + \frac{4}{2a-1} + 4, \\ &= \frac{2}{2-2a} + \frac{4}{2a-1} + 4, = 2\left(\frac{1}{2-2a} + \frac{2}{2a-1}\right) + 4, = 2\left(\frac{1}{2-2a} + \frac{2}{2a-1}\right)[(2-2a) + (2a-1)] + 4, \\ &= 2\left[1 + 2 + \frac{2a-1}{2-2a} + \frac{2(2-2a)}{2a-1}\right] + 4, \geq 2\left[3 + 2\sqrt{\frac{2a-1}{2-2a} \cdot \frac{2(2-2a)}{2a-1}}\right] + 4 = 2(3+2\sqrt{2}) + 4 = 10+4\sqrt{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2a-1}{2-2a} = \frac{2(2-2a)}{2a-1}$ 时，即 $a = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，故 $\frac{1}{1-a} + \frac{4}{1-b}$ 的最小值为 $10 + 4\sqrt{2}$ ，故答案为： $10 + 4\sqrt{2}$

73. (2023 天津红桥 统考一模) 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$ ，则 $\frac{y}{x} + \frac{4x}{x+y}$ 的最小值为_____。

【答案】 3 【分析】 将不等式变为 $\frac{y}{x} + \frac{4x}{x+y} = \frac{y+x}{x} + \frac{4x}{x+y} - 1$ ，再由基本不等式即可得出答案。

【详解】 $\frac{y}{x} + \frac{4x}{x+y} = \frac{y+x-x}{x} + \frac{4x}{x+y} = \frac{y+x}{x} + \frac{4x}{x+y} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{y+x}{x} \cdot \frac{4x}{x+y}} - 1 = 3$ ，当且仅当 $\frac{y+x}{x} = \frac{4x}{x+y}$ ，即 $y = x$ 时取等。

74. (2023 天津和平 统考一模) 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$ ，则 $x+y$ 的最大值是_____。

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【详解】 $x^2 + y^2 + xy = 1 \Rightarrow (x+y)^2 - 1 = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ，解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x+y \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，当 $x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，取得最大值。

75. (2023 天津红桥 统考一模) 某项选拔共有三轮考核，每轮设有一个问题，能正确回答问题者进入下一轮考试，否则即被淘汰。已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ ，且各轮问题能否正确回答

互不影响, 则该选手被淘汰的概率为_____.

【答案】 $\frac{101}{125}$

【分析】 设事件 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示“该选手能正确回答第 i 轮的问题”, 选手被淘汰, 考虑对立事件, 代入

$P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ 的值, 可得结果;

【详解】 记“该选手能正确回答第 i 轮的问题”为事件 $A_i (i = 1, 2, 3)$, 则 $P(A_1) = \frac{4}{5}, P(A_2) = \frac{3}{5}, P(A_3) = \frac{2}{5}$.

该选手被淘汰的概率: $P = P(\overline{A_1} + A_1 \overline{A_2} + A_1 A_2 \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) + P(A_1)(\overline{A_2}) + P(A_1)(A_2)(\overline{A_3}) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{101}{125}$

76. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 高三年级某 8 位同学的体重分别为 90, 100, 110, 120, 140, 150, 150, 160 (单位: kg), 现在从中任选 3 位同学去参加拔河, 则选中的同学中最大的体重恰好为这组数据的第 70 百分位数的概率是_____.

【答案】 $\frac{25}{56}$

【分析】 利用第 p 百分位数的定义及求法得到第 70 百分位数, 根据古典概型的概率计算公式, 组合数公式计算可得概率. 【详解】 因为 $8 \times 70\% = 5.6$,

$\therefore$ 第 70 百分位数是第六个数, 即 150,

$\therefore$ 事件 $A =$ “选中的同学中最大体重恰好为这组数据的第 70 百分位数”的概率 $P(A) = \frac{C_2^1 C_5^2 + C_2^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{25}{56}$.

77. (2023 天津 统考一模) 设 $a \in \mathbb{R}$. 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 用 $f(x)$ 表示 $\log_2 x, -x^2 + 2x + 1$ 中的较大者. 若关于 x 的方程 $f(x) + x - a = 0$ 恰有 1 个实数根, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(1, 3) \cup (\frac{13}{4}, +\infty)$

【分析】 设 $g(x) = \log_2 x, h(x) = -x^2 + 2x + 1$, 等价于函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -x + a$ 的图象恰有一个交点. 作出函数 $f(x)$ 的图象, 通过抛物线的切线求出切线的 a 的值, 数形结合分析即得解.

【详解】 设 $g(x) = \log_2 x, h(x) = -x^2 + 2x + 1$. 由 $f(x) + x - a = 0$ 得 $f(x) = -x + a$,

所以函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -x + a$ 的图象恰有一个交点. 作出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示.

抛物线的顶点的横坐标为 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$, 纵坐标为 $-1 + 2 + 1 = 2$, 所以 $A(1, 2)$.

当 $x = 2$ 时, $\log_2 x = \log_2 2 = 1, -x^2 + 2x + 1 = 1$, 所以点 $B(2, 1)$ 是抛物线和对数函数图象的交点.

设抛物线的切点 C 坐标为 (x_0, y_0) , $h'(x) = -2x + 2, \therefore h'(x_0) = -2x_0 + 2 = -1, \therefore x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = \frac{7}{4}$.

所以切点 C 坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$, 所以 $\frac{7}{4} = -\frac{3}{2} + a, \therefore a = \frac{13}{4}$.

所以当 $a > \frac{13}{4}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -x + a$ 的图象恰有一个交点.

由题得直线 AB 的斜率为 $\frac{2-1}{1-2} = -1$.

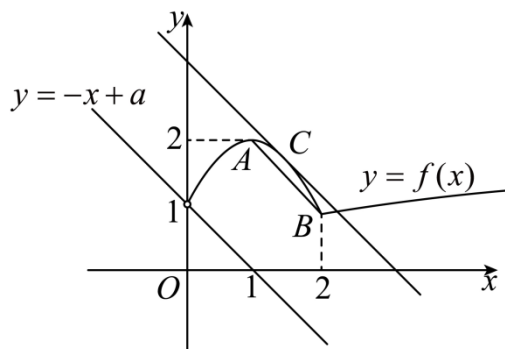
当 $x = 0$ 时, $h(0) = 1$, 所以 $1 = -0 + a, \therefore a = 1$.

当 $x = 1, y = 2$ 时, $2 = -1 + a, \therefore a = 3$.

所以当 $1 < a < 3$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -x + a$ 的图象恰有一个交点.

综上, 当 $1 < a < 3$ 或 $a > \frac{13}{4}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -x + a$ 的图象恰有一个交点.

故答案为: $(1, 3) \cup (\frac{13}{4}, +\infty)$



78. (2023 天津 校联考一模) 定义函数 $\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$, 设

$h(x) = \min\{|x-1|-1, x^2+ax-3a-8\}$, 若 $h(x) = 0$ 含有 3 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $-4 < a < -\frac{8}{3}$ 或 $a = -8$

【分析】 由于方程 $f(x) = |x-1|-1 = 0$ 有两个实数根, 所以 $g(x) = x^2+ax-3a-8 = 0$ 有两个相等的实根或者两个相异的实根, 若 $h(x) = 0$ 含有 3 个不同的实数根, 结合函数的图象, 分情况进行讨论 $g(x) = 0$ 根的情形得出结果.

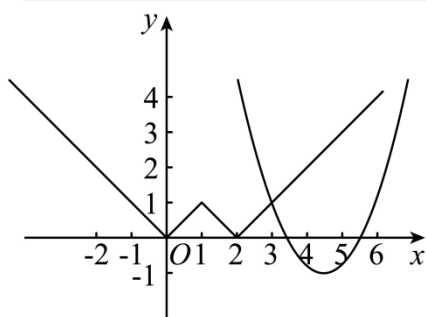
【详解】 设 $f(x) = |x-1|-1$, $g(x) = x^2+ax-3a-8$, 由 $f(x) = |x-1|-1 = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;

由于 $h(x) = 0$ 含有 3 个不同的实数根, 所以 $g(x) = x^2+ax-3a-8 = 0$ 有两个相等的实根或者两个相异的实根,

则 $\Delta = a^2 - 4(-3a-8) \geq 0$, 即 $a^2 + 12a + 32 \geq 0$, 解得 $a \leq -8$, 或 $a \geq -4$.

当 $a = -8$ 时, $g(x) = x^2 - 8x + 16 = 0$, 解得 $x_3 = 4$, 又 $g(2) = -a - 4 > 0$, 满足题意;

当 $a < -8$ 时, 如下图, $g(x)$ 的对称轴方程 $x = -\frac{a}{2} > 4$, $g(2) = -a - 4 > 0$, 则 $h(x) = 0$ 有 4 个根, 不合题意, 舍去;

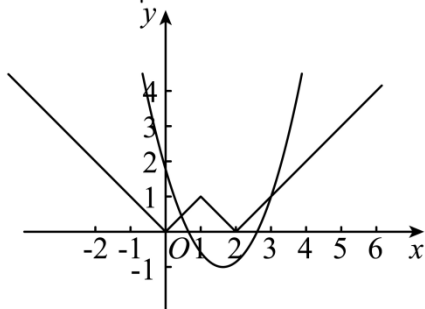


当 $a = -4$ 时, $g(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$, 解得 $x_3 = 2$, 即 $g(2) = 0$, $h(x) = 0$ 含有 2 个不同的实数根, 不满足题意;

当 $a > -4$ 时, 如下图, $g(2) = -a - 4 < 0$, 若 $h(x) = 0$ 含有 3 个不同的实数根,

则 $g(0) = -3a - 8 > 0$, 解得 $-4 < a < -\frac{8}{3}$;

综上, $-4 < a < -\frac{8}{3}$ 或 $a = -8$.



79. (2023 天津河北 统考一模) 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} kx^2 - x + 1, & x < 0 \\ e^x - kx, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 k 的取值范围是

_____.

【答案】 $(e, +\infty)$

【分析】 分析可知 $f(0) \neq 0$, 令 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{e^x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 由参变量分离法可知, 直线 $y = k$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个

交点, 利用导数分析函数 $g(x)$ 的单调性与极值, 数形结合可得出实数 k 的取值范围.

【详解】 因为 $f(x) = \begin{cases} kx^2 - x + 1, & x < 0 \\ e^x - kx, & x \geq 0 \end{cases}$, $f(0) = e^0 = 1$,

当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) = 0$ 可得 $kx^2 - x + 1 = 0$, 可得 $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$,

当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) = 0$ 可得 $e^x - kx = 0$, 可得 $k = \frac{e^x}{x}$,

令 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{e^x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 则直线 $y = k$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个交点,

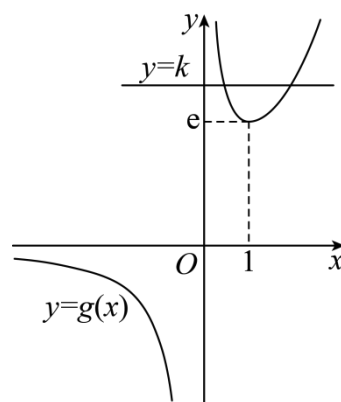
当 $x < 0$ 时, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3} < 0$, 此时函数 $g(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 由 $g'(x) < 0$ 可得 $0 < x < 1$, 由 $g'(x) > 0$ 可得 $x > 1$,

所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以, 函数 $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = e$,

且当 $x < 0$ 时, $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) = \frac{e^x}{x} > 0$, 如下图所示:



由图可知, 当 $k > e$ 时, 直线 $y = k$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个交点, 此时函数 $f(x)$ 有两个零点,

因此, 实数 k 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

80. (2023 天津 校联考一模) 已知函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & (0 \leq x \leq 1) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1 & (x > 1) \end{cases}$,

若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - af(x) + b = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 有且仅有 6 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(1, \frac{9}{4}) \cup (\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$

【详解】关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - af(x) + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 有且仅有 6 个不同的实数根, 设 $t = f(x)$,

则当 $t < 0$, 方程 $t = f(x)$ 有 0 个根, $t = 0$, 方程 $t = f(x)$ 有 1 个根,

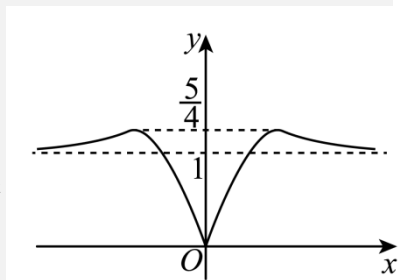
当 $0 < t \leq 1$ 或 $t = \frac{5}{4}$, 方程 $t = f(x)$ 有 2 个根, 当 $1 < t < \frac{5}{4}$, 方程 $t = f(x)$ 有 4 个根,

当 $t > \frac{5}{4}$, 方程 $t = f(x)$ 有 0 个根; 则 $t^2 - at + b = 0$ 必有两个根 t_1, t_2 , 有两种情况符合题意:

① $t_1 = \frac{5}{4}$, 且 $t_2 \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$, 此时 $a = t_1 + t_2$, 则 $a \in \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right)$;

② $t_1 \in (0, 1]$, $t_2 \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$, 此时 $a = t_1 + t_2 \in \left(1, \frac{9}{4}\right)$, 综上可得 a 的范围是 $\left(1, \frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right)$,

故答案为: $\left(1, \frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right)$.



【点睛】复合函数零点个数问题处理思路: ①利用换元思想, 设出内层函数; ②分别作出内层函数与外层函数的图象, 分别探讨内外函数的零点个数或范围; ③内外层函数相结合确定函数交点个数, 即可得到复合函数在不同范围下的零点个数.

81. (2023 天津河西 统考一模) 已知 $f(x) = \begin{cases} a - x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ e^{|x-1|}, & x > 0 \end{cases}$, 且函数 $y = f(x) - 1$ 恰有 3 个不同的零点, 则实数 a 的

取值范围是_____.

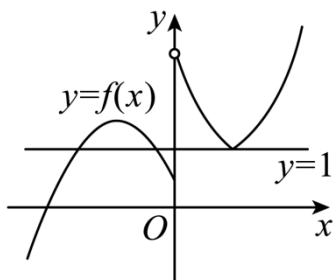
【答案】(0,1]

【详解】当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^{|x-1|}$, 所以由 $y = f(x) - 1 = e^{|x-1|} - 1 = 0$ 得 $x = 1$,

所以当 $x \leq 0$ 时, $f(x) - 1 = a - x^2 - 2x - 1 = 0$ 恰有 2 个不同的零点,

令 $g(x) = f(x) - 1 = -x^2 - 2x - 1 + a$, 则 $g(x)$ 在 $x \leq 0$ 时恰有 2 个不同的零点,

可得 $\begin{cases} \Delta = 4 - 4(1 - a) > 0 \\ g(0) = a - 0^2 - 2 \times 0 - 1 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq 1$, 综上, 实数 a 的取值范围是 $0 < a \leq 1$.



【点睛】方法点睛: 已知函数有零点 (方程有根) 求参数值 (取值范围) 常用的方法:

(1) 直接法: 直接求解方程得到方程的根, 再通过解不等式确定参数范围;

(2) 分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数的值域问题加以解决;

(3) 数形结合法: 先对解析式变形, 进而构造两个函数, 然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象, 利用数形结合的方法求解.

82. (2023 天津和平 统考一模) $\frac{1}{x^3} \cdot \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项为_____.

【答案】60

【分析】根据题意结合二项展开式的通项公式分析运算.

【详解】 $\because \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r 2^r x^{6-\frac{3}{2}r}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\therefore$ 当 $r = 2$ 时,

$T_3 = C_6^2 2^2 x^3 = 60x^3$, 故展开式中常数项为 $\frac{1}{x^3} \cdot 60x^3 = 60$. 故答案为: 60.

三、双空题

83. (2023 天津和平 统考一模) 先后掷两次骰子 (骰子的六个面上的点数分别是 1, 2, 3, 4, 5, 6), 落在水平桌面后, 记正面朝上的点数分别为 x, y , 记事件 A 为“ $x+y$ 为偶数”, 事件 B 为“ x, y 中有偶数且 $x \neq y$ ”, 则概率 $P(A) =$ _____, $P(B|A) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5 $\frac{1}{3}$

【详解】解: 若 $x+y$ 为偶数, 则 x, y 全为奇数或全为偶数, 所以, $P(A) = \frac{3 \times 3 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$,

事件 AB 为“ $x+y$ 为偶数且 x, y 中有偶数, $x \neq y$ ”, 则 x, y 为两个不等的偶数, 所以, $P(AB) = \frac{3 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$,

因此, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$. 故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

84. (2023 天津 统考一模) 袋中装有大小、形状完全相同的 2 个白球和 4 个红球, 每次抽取 1 个球. 若无放回的抽取, 已知第一次抽到白球的条件下, 第二次抽到白球的概率是 _____; 若有放回的抽取, 则在 3 次抽取中恰有 2 次抽到白球的概率是 _____.

【答案】 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{9}$

【详解】设第一次抽到白球为事件 A , 第二次抽到白球为事件 B , 则在第一次抽到白球的条件下, 第二次抽到白球

的概率为 $P(B|A)$, 因为 $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$.

若有放回的抽取, 设在 3 次抽取中抽到的白球个数为 X , 则服从二项分布, 即 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 所以

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$. 故答案为: $\frac{1}{5}; \frac{2}{9}$.

85. (2023 天津河东 一模) 甲、乙两名射手射中 10 环的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ (两人射中 10 环与否相互独立), 已知两人各射击 1 次. 两人都射中 10 环的概率为 _____; 两人命中 10 环的总次数为 X , 则随机变量 X 的期望为 _____.

【答案】 $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$

【详解】互斥事件同时发生: $P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;

由题意可得 $X = 0, 1, 2$ $P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \text{ 故答案为: } \frac{1}{6}; \frac{5}{6};$$

86. (2023 天津 大港一中校联考一模) 口袋中有 4 个黑球、3 个白球, 2 个红球, 从中任取 2 个球, 每取到一个黑球记 0 分, 每取到一个白球记 1 分, 每取到一个红球记 2 分, 用 ξ 表示得分, 则 $P(\xi = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{11}{36}$ $\frac{14}{9}$

【详解】解: “ $\xi = 2$ ”表示取出的 2 球为“1 黑 1 红”或“2 白”, 所以, $P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_3^2}{C_9^2} = \frac{11}{36}$;

由题意可知, 随机变量 ξ 的可能取值有 0、1、2、3、4,

$$\text{则 } P(\xi = 0) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_9^2} = \frac{1}{3}, \quad P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_3^2}{C_9^2} = \frac{11}{36},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi = 4) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}.$$

所以, 随机变量 ξ 的分布列如下表所示:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{因此, } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{11}{36} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{14}{9}.$$

87. (2023 天津南开 统考一模) 假设某市场供应的灯泡中, 甲厂产品占 60%, 乙厂产品占 40%, 甲厂产品的合格率为 90%, 乙厂产品的合格率为 80%, 在该市场中购买甲厂的两个灯泡, 则恰有一个是合格品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若在该市场中随机购买一个灯泡, 则这个灯泡是合格品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $0.18 / \frac{9}{50}$ $0.8 \sqrt{\frac{43}{50}}$

【详解】在该市场中购买甲厂的两个灯泡, 恰有一个是合格品的概率为 $C_2^1 \times 0.9 \times 0.1 = 0.18$,

若在该市场中随机购买一个灯泡, 则这个灯泡是合格品的概率为 $0.6 \times 0.9 + 0.4 \times 0.8 = 0.86$.

88. (2023 天津 校联考一模) 袋子中装有 n 个白球, 3 个黑球, 2 个红球, 已知若从袋中每次取出 1 球, 取出后不放回, 在第一次取到黑球的条件下, 第二次也取到黑球的概率为 $\frac{1}{3}$, 则 n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若从中任取 3 个球, 用 x 表示取出 3 球中黑球的个数, 则随机变量 x 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2 $\frac{9}{7}$

【详解】设第一次取得黑球为事件 A, 第二次取得黑球为事件 B,

$$\text{则 } P(A) = \frac{3}{n+3+2} = \frac{3}{n+5}, \quad P(AB) = \frac{3}{n+3+2} \times \frac{3-1}{n+3+2-1} = \frac{6}{(n+5)(n+4)},$$

故第一次取到黑球的条件下，第二次也取到黑球的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{n+4}$,

令 $\frac{2}{n+4} = \frac{1}{3}$ ，解得 $n = 2$ ，

X 的可能取值为 0,1,2,3,

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \quad P(X=2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35},$$

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}. \text{故答案为: } 2, \frac{9}{7}$$

89. (2023 天津河北 统考一模) 盒子里装有同样大小的 4 个白球和 3 个黑球，甲先从中取 2 球（不放回），之后乙再从盒子中取 1 个球. (1) 则甲所取的 2 个球为同色球的概率为_____；(2) 设事件 M 为“甲所取的 2 个球为同色球”， N 事件为“乙所取的球与甲所取的球不同色”，则在事件 M 发生的条件下，求事件 N 发生的概率

$$P(N|M) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{3}$.

【详解】解：(1) 设事件 A 为“甲所取的 2 个球为同色球”

$$\text{所以 } P(M) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

$$(2) \quad P(MN) = \frac{C_4^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_3^1}{C_5^1} + \frac{C_3^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{6}{21} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{21} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{7}, \quad P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}. \text{故答案为: } \frac{3}{7}; \frac{2}{3}.$$

90. (2023 天津 校联考一模) 为了组建一支志愿者队伍，欲从 3 名男志愿者，3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长，则在“抽取的 3 人至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率是_____，若用 X 表示抽取的三人中女志愿者的人数，则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{19}$ $1.5 \frac{3}{2}$

【分析】令事件 A = “抽取的 3 人至少有一名男志愿者”，事件 B = “抽取的 3 人中全是男志愿者”，由条件概率公式得出第一空，由 X 的可能取值以及对应概率得出期望.

【详解】设事件 A = “抽取的 3 人至少有一名男志愿者”，事件 B = “抽取的 3 人中全是男志愿者”

$$P(A) = \frac{C_6^3 - C_3^3}{C_6^3} = \frac{19}{20}, \quad P(AB) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad \text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{20} \times \frac{20}{19} = \frac{1}{19},$$

即在“抽取的 3 人至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率是 $\frac{1}{19}$.

$$X \text{ 可取 } 0, 1, 2, 3, \quad P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \text{ 则 } E(X) = \frac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \frac{30}{20} = 1.5 \text{ 故答案为: } \frac{1}{19}; 1.5$$

91. (2023 天津河西 统考一模) 某校高三 1 班第一小组有男生 4 人, 女生 2 人, 为提高中学生对劳动教育重要性的认识, 现需从中抽取 2 人参加学校开展的劳动技能学习, 恰有一名女生参加劳动学习的概率则为_____;
在至少有一名女生参加劳动学习的条件下, 恰有一名女生参加劳动学习的概率_____.

【答案】 $\frac{8}{15}$ $\frac{8}{9}$

【分析】应用组合数, 超几何分布的概率求法求恰有一名女生参加、至少有一名女生参加的概率, 进而求至少有一名女生参加条件下, 恰有一名女生的概率 (条件概率).

【详解】由题设, 抽取 2 人, 恰有一名女生参加, 其概率 $\frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$,

至少有一名女生参加, 事件含恰有一名女生、2 人都是女生, 其概率 $\frac{C_2^2 + C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$,

所以, 在至少有一名女生参加条件下, 恰有一名女生的概率 $\frac{8}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{8}{9}$.

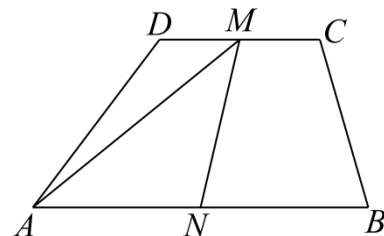
故答案为: $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{9}$

92. (2023 天津河西 统考一模) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $AB = 2CD$, M , N 分别为线段 DC 和 AB 的中点, 若 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\vec{MN} =$ _____. 若 $\vec{MN} \perp \vec{BC}$, 则 $\angle DAB$ 余弦值的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】空 (1) 使用向量线性运算求解即可;

空 (2) 以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为基底, 用数量积的形式表示出 $\vec{MN} \perp \vec{BC}$, 再由基本不等式求解即可.



【详解】如图, 由已知, $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} - (\vec{AD} + \vec{DM})$
 $= \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b} \therefore \vec{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

设 $\angle DAB = \theta$, 即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ,

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b},$$

若 $\vec{MN} \perp \vec{BC}$, 则 $\vec{MN} \cdot \vec{BC} = 0$,

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{8}\vec{a}^2 + \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = -\frac{1}{8}|\vec{a}|^2 + \frac{3}{4}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - |\vec{b}|^2 = 0,$$

又 $\because |\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0$, $\therefore$ 由基本不等式,

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2}{6|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|}{6|\vec{b}|} + \frac{8|\vec{b}|}{6|\vec{a}|} \geq 2\sqrt{\frac{|\vec{a}|}{6|\vec{b}|} \cdot \frac{8|\vec{b}|}{6|\vec{a}|}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

当且仅当 $\frac{|\vec{a}|}{6|\vec{b}|} = \frac{8|\vec{b}|}{6|\vec{a}|}$, 即 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}|\vec{b}|$ 时, 等号成立.

【点睛】关键点睛: 解决本题第 2 空的关键, 是用以 $\angle DAB$ 为夹角的两个向量作为基底, 将垂直关系转化为数量积的形式, 再借助基本不等式求解.

93. (2023 天津 校联考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $\vec{AD} = 4\vec{BD}$, $2CE = DA$, $\vec{AE} \cdot \vec{CD} = -8$, 则 $\cos \angle BAC =$ _____, 若动点 F 在线段 AC 上, 则 $\vec{DF} \cdot \vec{EF}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5 -6

【分析】第一空: 用 $\vec{AC}, \vec{AD}$ 分别表示出 $\vec{AE}, \vec{CD}$, 再由数量积的定义及运算律即可求出 $\cos \angle BAC$;

第二空: 设 $\vec{AF} = \lambda \vec{AC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 用 $\vec{AC}, \vec{AD}$ 分别表示出 $\vec{DE}, \vec{EF}$, 由数量积的定义及运算律表示出 $\vec{DF} \cdot \vec{EF}$, 结合二次函数求出最小值.

【详解】

第一空: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = 4\vec{BD}$, 则 $\vec{AB} = 3\vec{BD}$, 则 $AD = 4$, 又

$$\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD},$$

$\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = -\vec{AC} + \vec{AD}$, 故

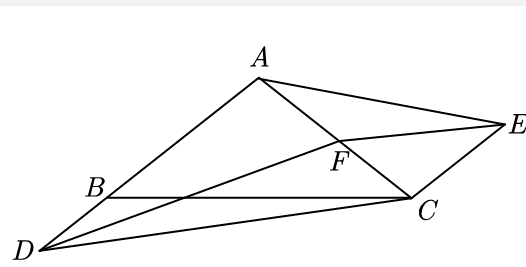
$$\vec{AE} \cdot \vec{CD} = \left(\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD}\right) \cdot (-\vec{AC} + \vec{AD}) = -\vec{AC}^2 + \frac{3}{2}\vec{AC} \cdot \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AD}^2 = -9 + \frac{3}{2} \times 3 \times 4 \times \cos \angle BAC - 8 = -8, \text{ 解得}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{2};$$

第二空: 设 $\vec{AF} = \lambda \vec{AC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AF} = -\vec{AD} + \lambda \vec{AC}$, $\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AD} + (\lambda - 1)\vec{AC}$, 则

$$\vec{DF} \cdot \vec{EF} = (-\vec{AD} + \lambda \vec{AC}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AD} + (\lambda - 1)\vec{AC}\right) = -\frac{1}{2}\vec{AD}^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\vec{AD} \cdot \vec{AC} + \lambda(\lambda - 1)\vec{AC}^2$$

$$= -8 + 6\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) + 9\lambda(\lambda - 1) = 9\lambda^2 - 12\lambda - 2 = 9\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 - 6, \text{ 当 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 时, } \vec{DF} \cdot \vec{EF} \text{ 取得最小值 } -6.$$



94. (2023 天津河北 统考一模) 在矩形 $ABCD$ 中, 若 $AB = 1$, $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = \vec{AD} \cdot \vec{AE}$, 则 $|\vec{AD}|$ 的值为 _____, $\vec{AE} \cdot \vec{AC}$ 的值为 _____.

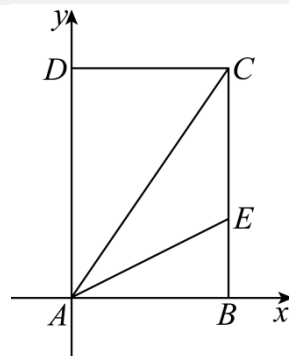
【答案】 $\sqrt{3}$ 2

【详解】如图建立平面直角坐标系, 设 $|\vec{AD}| = a$, 则 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $D(0,a)$, $C(1,a)$,

因为 $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, 所以 $E\left(1, \frac{a}{3}\right)$, 所以 $\vec{AB} = (1,0)$, $\vec{AE} = \left(1, \frac{a}{3}\right)$, $\vec{AD} = (0,a)$,

所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 1$, $\vec{AE} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{3}$, 因为 $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = \vec{AD} \cdot \vec{AE}$, 所以 $1 = \frac{a^2}{3}$, 解得 $a = \sqrt{3}$ 或

$a = -\sqrt{3}$ (舍去), 所以 $\vec{AC} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{AE} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 所以 $\vec{AC} \cdot \vec{AE} = 1 \times 1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$.



95. (2023 天津南开 统考一模) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{AC}| =$ _____; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.

【答案】 1 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【详解】 $\because |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$,

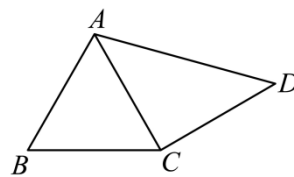
又 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos B = \frac{1}{2}$, 故 $\cos B = \frac{1}{2}$,

$\because 0 < B < \pi$, 故 $B = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, 则 $|\overrightarrow{AC}| = 1$;

$\because |\overrightarrow{CD}| = 1$, $\therefore \overrightarrow{CD}^2 = 1$, 又 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 1$, $\therefore \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$, 得 $\overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,

$\therefore AC \perp CD$, 根据以上分析作图如下: 则 $\angle BCD = 150^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2$

$= -1 \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. 故答案为: $1; \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$



96. (2023 天津 大港一中校联考一模) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 已知 $|AB| = 3, |AC| = 4, P$ 是斜边 BC 上一动点, 点 Q 满足 $|PQ| = 2$, 若 $AQ = mAB + nAC$, 若点 Q 在边 BC 所在的直线上, 则 $m + n$ 的值为 _____; $m + n$ 的最大值为 _____.

【答案】 1 $\frac{11}{6} / 1 \frac{5}{6}$

【详解】 因为 $AQ = mAB + nAC$, 若点 Q 在边 BC 所在的直线上, 则 $m + n = 1$;

以 A 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴, AC 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系,

则 $A(0,0), B(3,0), C(0,4)$, 得直线 BC 的方程为 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$,

则可设 $P\left(t, 4 - \frac{4}{3}t\right)$, 其中 $0 \leq t \leq 3$, 由 $|PQ| = 2$, 得点 Q 在以点 P 为圆心, 2 为半径的

圆上, 可设 $Q\left(t + 2\cos\theta, 4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta\right)$,

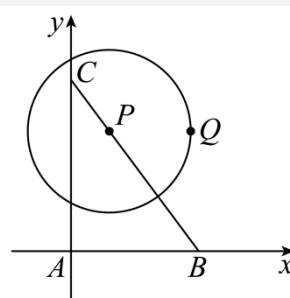
由 $\overrightarrow{AB} = (3,0), \overrightarrow{AC} = (0,4), \overrightarrow{AQ} = \left(t + 2\cos\theta, 4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta\right)$, 因为 $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$,

所以 $\left(t + 2\cos\theta, 4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta\right) = (3m, 4n)$, 所以 $\begin{cases} t + 2\cos\theta = 3m \\ 4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta = 4n \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m = \frac{t + 2\cos\theta}{3} \\ n = \frac{4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta}{4} \end{cases}$,

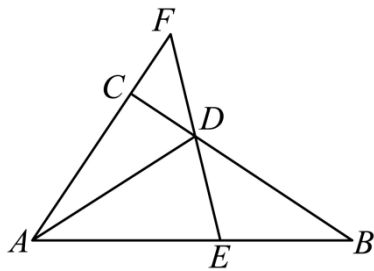
则 $m + n = \frac{t + 2\cos\theta}{3} + \frac{4 - \frac{4}{3}t + 2\sin\theta}{4} = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{2}{3}\cos\theta + 1 = \frac{5}{6}\sin(\theta + \varphi) + 1$ (其中 $\tan\varphi = \frac{4}{3}$),

所以 $1 - \frac{5}{6} \leq m + n \leq \frac{5}{6} + 1$,

即 $\frac{1}{6} \leq m + n \leq \frac{11}{6}$, 故 $m + n$ 的最大值为 $\frac{11}{6}$.



97. (2023 天津红桥 统考一模) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 BC 边上一点, 且 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 过点 D 的直线 EF 与直线 AB 相交于 E 点, 与直线 AC 相交于 F 点 (E, F 交两点不重合). 若 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $mn =$ _____, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为_____.



【答案】 $\frac{2}{9}$ $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} / 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】由向量的线性表示, 利用三角形法则及已知可求解;

根据 (1) 的结论, 转化用 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$, 根据 D, E, F 三点共线

找出等量关系, 再由基本不等式可求 $\lambda + \mu$ 的最小值.

【详解】在 $\triangle ABD$ 中, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, 且 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,

$$\text{可得 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

所以 $mn = \frac{2}{9}$; 又由 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 已知 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \mu\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{AF}$, 可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3\mu}\overrightarrow{AC}$, 因为 D, E, F 三点共线, 且点 A 在线外,

$$\text{所以 } \frac{1}{3\lambda} + \frac{2}{3\mu} = 1, \quad (\lambda, \mu > 0),$$

$$\text{则 } \lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{3\lambda} + \frac{2}{3\mu} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{\mu}{3\lambda} + \frac{2\lambda}{3\mu} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{\mu}{3\lambda} \cdot \frac{2\lambda}{3\mu}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{\mu}{3\lambda} = \frac{2\lambda}{3\mu} \text{ 时, 即 } \begin{cases} \lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \\ \mu = \frac{2+\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ 等号成立,}$$

所以 $\lambda + \mu$ 的最小值为 $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故答案为: $\frac{2}{9}; 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

98. (2023 天津河东 一模) 已知等边三角形 ABC 的边长为 1, 射线 AB, AC 上分别有一动点 M 和 N (点 C 在点 A 与 N 之间), 当 $AM = CN = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的值为_____; 当 $AM = 2CN$ 时, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的最小值为_____.

【答案】 $-\frac{9}{8} / -1\frac{1}{8}$ $-\frac{3}{2}$

【分析】确定 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, 再计算即可, 设 $|\overrightarrow{CN}| = m$, 则 $\overrightarrow{CM} = 2m\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + (1+m)\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = (m-1)^2 - \frac{3}{2}, \text{ 得到最值.}$$

【详解】 $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}; \text{ 设 } |\overrightarrow{CN}| = m,$$

则 $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = 2m\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + (1+m)\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = (2m\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + (1+m)\overrightarrow{AC})$$

$$= -2m\overrightarrow{AB}^2 + (1+2m+2m^2)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - (1+m)\overrightarrow{AC}^2 = -2m + \frac{1}{2}(1+2m+2m^2) - (1+m)$$

$$= m^2 - 2m - \frac{1}{2} = (m-1)^2 - \frac{3}{2}, \text{ 当 } m=1 \text{ 时, } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} \text{ 有最小值为 } -\frac{3}{2}. \text{ 故答案为: } -\frac{9}{8}; -\frac{3}{2}$$

99. (2023 天津 统考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 的中点, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{ED}$, 过点 E 任作一条直线, 分别交线段 AC 、 BC 于 F 、 G 两点, 设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 若用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{CE} =$ _____; 若 $\overrightarrow{CF} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{CG} = n\vec{b}$ ($mn \neq 0$), 则 $m+3n$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

【分析】求出 $\overrightarrow{CD}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的表达式, 再由已知条件可得出 $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, 可得出 $\overrightarrow{CE}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的表达式, 求出 $\overrightarrow{EF}$ 、 $\overrightarrow{EG}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的表达式, 根据 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG}$ 可得出 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$, 将代数式 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ 与 $m+2n$ 相乘, 展开后利用基本不等式可求得 $m+2n$ 的最小值.

【详解】如下图所示:

$$\text{因为 } D \text{ 为 } AB \text{ 的中点, 则 } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{ED}, \text{ 则 } \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{CF} = m\vec{a}, \overrightarrow{CG} = n\vec{b}, \text{ 则 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CE} = m\vec{a} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \left(m - \frac{1}{3}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE} = n\vec{b} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \left(n - \frac{1}{3}\right)\vec{b},$$

因为 E 、 F 、 G 三点共线, 则 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG}$,

$$\text{所以, 存在实数 } k \text{ 使得 } \overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EG}, \text{ 即 } \left(m - \frac{1}{3}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = k\left[-\frac{1}{3}\vec{a} + \left(n - \frac{1}{3}\right)\vec{b}\right],$$

$$\text{所以, } \begin{cases} m - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}k \\ k\left(n - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 消去 } k \text{ 可得 } \left(m - \frac{1}{3}\right)\left(n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, \text{ 即 } mn = \frac{1}{3}(m+n),$$

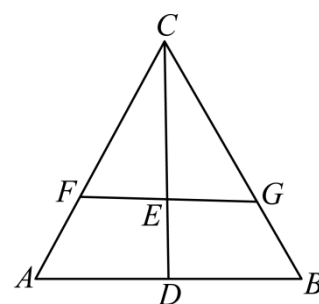
$$\text{所以, } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = 3,$$

因为过点 E 任作一条直线, 分别交线段 AC 、 BC 于 F 、 G 两点, 且 $mn \neq 0$,

则 $0 < m < 1$, $0 < n < 1$,

$$\text{由基本不等式可得 } m+3n = \frac{1}{3}(m+3n)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\left(4 + \frac{3n}{m} + \frac{m}{n}\right) \geq \frac{1}{3}\left(4 + 2\sqrt{\frac{3n}{m} \cdot \frac{m}{n}}\right) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3 \\ \frac{3n}{m} = \frac{m}{n} \end{cases} \text{ 时, 即当 } \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ n = \frac{3+\sqrt{3}}{9} \end{cases} \text{ 时, 等号成立.}$$



因此, $m + 3n$ 的最小值是 $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}$.

100. (2023 天津和平 统考一模) 已知四边形 $ABCD$, $DC = tAB$, $AB = 6$, $AD = 4$, $\angle DAB = 60^\circ$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = -6$, 点 E 为线段 BD 上一点, 且 $\overrightarrow{AE} = (1 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ _____, 过 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F , 则 $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FC} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$ 10

【分析】由 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = -6$, 可得 $t = \frac{1}{2}$, 进而可得 $\overrightarrow{AE} = (m + 1)\overrightarrow{AD} + 2m\overrightarrow{CB}$ ($0 < m < 1$), 由题意可得 $\begin{cases} 1 + \lambda = m + 1 \\ 2m = \frac{2}{3} \end{cases}$, 求解

即可得第一空答案; 取 AB 中点 M , 连接 DM , 根据向量的数乘及加减运算可得

$\overrightarrow{FC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 再根据向量的数量积运算即可得第二空答案.

【详解】解: 如图所示: 因为 $\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$, 即有 $DC \parallel AB$, 又因为 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = -6$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 6$, 即

$t \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$, $t \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 60^\circ = 6$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, 所以 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 所以 $|\overrightarrow{DC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = 3$,

又因为 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, 即 $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CB}$;

又因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + m\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + m(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} + m(2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}) = (m + 1)\overrightarrow{AD} + 2m\overrightarrow{CB}$ ($0 < m < 1$),

又因为 $\overrightarrow{AE} = (1 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, 所以 $\begin{cases} 1 + \lambda = m + 1 \\ 2m = \frac{2}{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$;

如图所示:

取 AB 中点 M , 连接 DM , 由题意可知 $DC \parallel MB$ 且 $DC = MB = 3$,

所以四边形 $DCBM$ 为平行四边形, 所以 $DM \parallel BC$, 又因为 $EF \parallel BC$,

所以 $DM \parallel EF$, 又因为 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, 所以 $DE = \frac{1}{3}DB$, 所以 $MF = \frac{1}{3}MB = 1$,

$FB = 2$, 所以 $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 由 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CB}$ 可得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 所以

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FC} = (-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{9} \times 6^2 - \frac{5}{6} \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} + 4^2 = 10$.

