

2023 年天津高考模拟试题分类一模大题

一、解答题

1. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 2\alpha$.

(1) 求 α 的大小; (2) 设函数 $f(x) = \sin(x + 2\alpha)$, $x \in [0, \pi]$, 求 $f(x)$ 的单调区间及值域.

【详解】(1) 由 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 2\alpha$ 得 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$,

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)} = 2(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha),$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\cos \alpha > \sin \alpha > 0$,

$$\frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2(\cos \alpha + \sin \alpha),$$

所以 $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}$, 解得 $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

(2) 函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in [0, \pi]$,

令 $-\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增;

令 $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递减;

因为 $x \in [0, \pi]$, $x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{3}$, $f(x)$ 取最大值 1; 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ 时, 即 $x = \pi$, $f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{2}$. 所以 $f(x)$ 值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. (2023 天津河西 统考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 B 的大小; (2) 设 $a=2, c=3$, 求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

详解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $b \sin A = a \sin B$,

又由 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$, 得 $a \sin B = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$, 即 $\sin B = \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$, 可得 $\tan B = \sqrt{3}$.

又因为 $B \in (0, \pi)$, 可得 $B = \frac{\pi}{3}$.

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理及 $a=2, c=3, B=\frac{\pi}{3}$, 有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7$, 故 $b = \sqrt{7}$.

由 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 因为 $a < c$, 故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$. 因此 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}.$$

所以, $\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

点睛: 在处理三角形中的边角关系时, 一般全部化为角的关系, 或全部化为边的关系. 题中若出现边的一次式一般采用到正弦定理, 出现边的二次式一般采用到余弦定理. 应用正、余弦定理时, 注意公式变式的应用. 解决三角形

问题时，注意角的限制范围.

3. (2023 天津 校联考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ($a > c$), 已知 $b \cos C = (3a - c) \cos B$,

$S_{\triangle ABC} = b = 4\sqrt{2}$ (1) 求 $\cos B$; (2) 求 a, c 的值; (3) 求 $\sin(B - C)$ 的值.

【分析】(1) 由正弦定理的边化角公式结合三角恒等变换得出 $\cos B$;

(2) 由三角形面积公式得出 $ac = 12$, 再由余弦定理得出 $a + c = 8$, 进而得出 a, c 的值;

(3) 计算 $\cos C, \sin C$, 再由差角公式求解即可.

【详解】(1) $\because b \cos C = (3a - c) \cos B, \therefore \sin B \cos C = (3 \sin A - \sin C) \cos B$,

$$\therefore 3 \sin A \cos B = \sin C \cos B + \cos C \sin B = \sin(B + C) = \sin A \text{ 又 } \sin A \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \because \cos B = \frac{1}{3}, \therefore \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 又 } S_{\triangle ABC} = b = 4\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{2} ac \sin B = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} ac \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}, \therefore ac = 12 \quad (1) \because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a + c)^2 - 2ac - 2ac \times \frac{1}{3} = (a + c)^2 - 32$$

$$\therefore (4\sqrt{2})^2 = (a + c)^2 - 32, \text{ 即 } (a + c)^2 = 64, a + c = 8 \quad (2) \text{ 又 } a > c, \therefore \text{由 } (1)(2) \text{ 可得 } a = 6, c = 2,$$

$$(3) \because \cos C = \frac{(3a - c) \cos B}{b} = \frac{16}{4\sqrt{2}} \cos B = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore \sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin(B - C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

4. (2023 天津河北 统考一模) $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2) = 2bc \sin A$.

(1) 求角 B 的大小; (2) 若 $\cos A = \frac{1}{3}$, 求 $\sin(2A - B)$ 的值.

【详解】(1) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 则 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$,

$$\text{又 } \sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2) = 2bc \sin A, \text{ 所以 } 2\sqrt{3}ac \cos B = 2bc \sin A, \text{ 即 } \sqrt{3}a \cos B = b \sin A,$$

由正弦定理可得 $\sqrt{3} \sin A \cos B = \sin B \sin A$, 因为 $\sin A > 0$, 所以 $\sqrt{3} \cos B = \sin B$, 则 $\tan B = \sqrt{3}$, 又 $0 < B < \pi$, 所以

$$B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \cos A = \frac{1}{3}, 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9},$$

$$\text{所以 } \sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}.$$

5. (2023 天津 校联考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \sin C = \sin A + \cos A \tan B$.

(1) 求角 B 的大小; (2) 设 $a = 2, c = 3$, 求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

【详解】(1) 解: 因为 $2 \sin C = \sin A + \cos A \tan B$,

$$\text{所以 } 2\sin C = \sin A + \cos A \times \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos B} = \frac{\sin(B+A)}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos B}$$

$$\text{所以 } 2\sin C \cos B = \sin C,$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C > 0, \text{ 所以 } \cos B = \frac{1}{2} \text{ 又 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理及 } a=2, c=3, B=\frac{\pi}{3},$$

$$\text{有 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7, \text{ 故 } b = \sqrt{7}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 可得 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \text{ 因为 } a < c, \text{ 故 } \cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{因此 } \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}.$$

$$\text{所以, } \sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$6. (2023 \text{ 天津南开 统考一模}) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 角 } A, B, C \text{ 所对的边分别为 } a, b, c, \text{ 且 } 4a = \sqrt{5}c, b = 11, \cos C = \frac{3}{5}.$$

(1)求 $\sin A$ 的值; (2)求 a 的值; (3)求 $\cos(A - 2C)$ 的值.

$$\text{【详解】(1) 由于 } \cos C = \frac{3}{5}, 0 < C < \pi, \text{ 则 } \sin C = \frac{4}{5}.$$

$$\text{因为 } 4a = \sqrt{5}c, \text{ 由正弦定理知 } 4\sin A = \sqrt{5}\sin C, \text{ 则 } \sin A = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$(2) \text{ 因为 } 4a = \sqrt{5}c, b = 11, \text{ 由余弦定理, 得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + 121 - \frac{16}{5}a^2}{22a} = \frac{11 - \frac{a^2}{5}}{2a} = \frac{3}{5},$$

$$\text{即 } a^2 + 6a - 55 = 0, \text{ 解得 } a = 5 \text{ (负值舍去)}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } a < b, \text{ 所以 } 0 < A < \frac{\pi}{2}. \text{ 由 (1) 得 } \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin 2C = 2\sin C \cos C = \frac{24}{25}, \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{7}{25}, \text{ 所以 } \cos(A - 2C) = \cos A \cos 2C + \sin A \sin 2C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{24}{25} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$7. (2023 \text{ 天津 大港一中校联考一模}) \triangle ABC \text{ 的内角 } A, B, C, \text{ 的对边分别为 } a, b, c, \text{ 已知 } 2b + c = 2a \cos C \text{ 且 } a = \sqrt{5}.$$

(1)求角 A 的大小; (2)若 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{6} + \sqrt{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积; (3)若 $b = \sqrt{3}$, 求 $\cos(2B - A)$ 的值.

$$\text{【详解】(1) 因为 } 2b + c = 2a \cos C, \text{ 所以 } 2b + c = 2a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\text{整理可得: } b^2 + c^2 - a^2 = -bc,$$

$$\text{由余弦定理可得: } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

$$\text{所以 } \cos A = -\frac{1}{2}, A \in (0, \pi),$$

所以可得 $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) 由三角形的周长为 $\sqrt{6} + \sqrt{5}$, $a = \sqrt{5}$, 所以 $b + c = \sqrt{6}$,

由 (1) 可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b + c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$, 而 $\cos A = -\frac{1}{2}$,

所以可得 $5 = 6 - 2bc + bc$, 可得 $bc = 1$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

(3) 因为 $b = \sqrt{3}$, $a = \sqrt{5}$, $A = \frac{2}{3}\pi$, 由正弦定理可得: $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$,

$b < a$, 所以 B 为锐角, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$, 所以 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = 2 \times \frac{11}{4 \times 5} - 1 = \frac{1}{10}$,

所以 $\cos(2B - A) = \cos(2B - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} \cos 2B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B = \frac{-1 + 3\sqrt{33}}{20}$, 所以 $\cos(2B - A) = \frac{-1 + 3\sqrt{33}}{20}$.

8. (2023 天津红桥 统考一模) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$.

(1) 求角 C 的大小; (2) 求 $\sin A$ 的值; (3) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{2}$, $b = 5$, $c = \sqrt{13}$,

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{8 + 25 - 13}{2 \times 2\sqrt{2} \times 5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 (1) 知 $C = \frac{\pi}{4}$, $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{13}$,

由正弦定理可得 $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$;

(3) 由 $a < c$ 知 $A < C$, 所以角 A 为锐角, 因为 $\sin A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, 所以 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{5}{13}$, 所以

$\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$.

9. (2023 天津河东 一模) 在三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A = \sin 2B$, $a = 4$, $b = 6$. (1) 求 $\cos B$ 的值; (2) 求 c 的值; (3) 求 $\sin(2B + C)$ 的值.

【答案】(1) $\cos B = \frac{1}{3}$; (2) $c = 6$; (3) $-\frac{10\sqrt{2}}{27}$.

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由已知得 $\sin A = 2 \sin B \cos B$, 由正弦定理得 $a = 2b \cos B$, 而 $a = 4$, $b = 6$,

所以 $\cos B = \frac{1}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{3}$, 即 $3c^2 - 8c - 60 = 0$, 而 $c > 0$, 解得 $c = 6$,

所以 $c = 6$.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $\because B \in (0, \pi)$, $\cos B = \frac{1}{3} > 0$, $\therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{9}$, 由 (2) 知, $b = c = 6$, 即 $\angle B = \angle C$,

所以 $\sin(2B + C) = \sin 2B \cos B + \sin B \cos 2B = \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$.

10. (2023 天津 统考一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = 1, c = 2, \sin B = 2 \sin A$.

(1) 求 $\cos C$ 的值; (2) 求 $\sin A$ 的值; (3) 求 $\sin(2C - A)$ 的值.

【答案】(1) $\cos C = \frac{1}{4}$ (2) $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$ (3) $\frac{7\sqrt{15}}{32}$

【详解】(1) 由 $\sin B = 2 \sin A$ 及正弦定理得: $b = 2a$,

$\therefore b = 2$, 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{4}$.

(2) 由 (1) 知: $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

(3) 由 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{\sqrt{15}}{8}$, 且 $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -\frac{7}{8}$, $\because a < b$, 即 $A < B$, $\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{7}{8}$,

$\therefore \sin(2C - A) = \sin 2C \cos A - \cos 2C \sin A = \frac{7\sqrt{15}}{32}$.

11. (2023 天津和平 统考一模) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(b \cos C + c \cos B) \tan A = -\sqrt{3}a$.

(1) 求 A 的大小; (2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 1$, (i) 求 $\triangle ABC$ 的面积; (ii) 求 $\cos(2C - A)$.

【答案】(1) $A = \frac{2\pi}{3}$; (2) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\frac{11}{14}$.

【详解】(1) 因为 $(b \cos C + c \cos B) \tan A = -\sqrt{3}a$, 所以 $(\sin B \cos C + \sin C \cos B) \tan A = -\sqrt{3} \sin A$,

即 $\sin(B + C) \tan A = -\sqrt{3} \sin A$, 则 $\sin A \tan A = -\sqrt{3} \sin A$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$,

所以 $\tan A = -\sqrt{3}$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) (i) 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $7 = 1 + c^2 + c$, 解得 $c = -3$ (舍去) 或 $c = 2$,

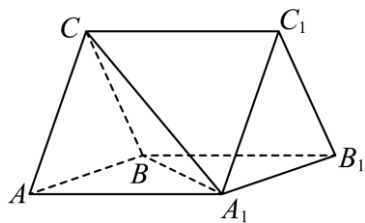
所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(ii) 由上可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7 + 1 - 4}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = \frac{1}{7}$,

所以 $\cos(2C - A) = \cos 2C \cos A + \sin 2C \sin A = \frac{1}{7} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11}{14}$.

12. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CA = CB$, $AB = AA_1$, $\angle BAA_1 = 60^\circ$.



(1) 证明 $AB \perp A_1C$;

(2) 若平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , $AB = CB$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值;

(3) 在 (2) 的条件下, 求平面 A_1BC 与平面 BCB_1 夹角的余弦值.

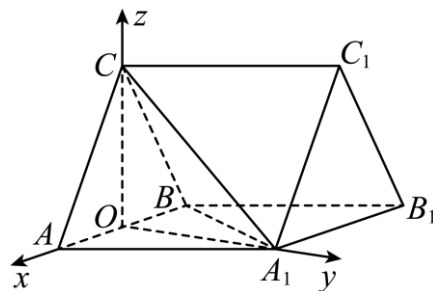
【详解】(1) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 取 AB 中点 O , 连接 OC, OA_1 , 因为

$CA = CB$, 则 $OC \perp AB$,

而 $AB = A_1A, \angle BAA_1 = 60^\circ$, 即 $\triangle ABA_1$ 为正三角形, 则有 $OA_1 \perp AB$,

又 $OC \cap OA_1 = O, OC, OA_1 \subset$ 平面 OCA_1 , 于是 $AB \perp$ 平面 OCA_1 , 而 $A_1C \subset$ 平面 OCA_1 ,

所以 $AB \perp A_1C$.



(2) 由 (1) 知, $OC \perp AB, OA_1 \perp AB$, 又平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , 且交线为 AB , 则平面 ABC 内直线 $OC \perp$ 平面 AA_1B_1B ,

则 OA, OA_1, OC 两两垂直, 以 O 为坐标原点, 射线 OA, OA_1, OC 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系,

令 $AB = 2$, 则 $A(1, 0, 0), A_1(0, \sqrt{3}, 0), C(0, 0, \sqrt{3}), B(-1, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{BC} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{A_1C} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BB_1C_1C 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$, 令 $y = 1$, 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$,

直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) 由 (2) 知, 平面 BCB_1 的法向量 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{A_1C} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

令 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 A_1BC 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C} = -\sqrt{3}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}$, 令 $y_1 = 1$, 得 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$,

所以平面 A_1BC 与平面 BCB_1 夹角的余弦值为 $|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$.

13. (2023 天津河西 统考一模) 已知四棱锥 $P - ABCD$ 中, $DA \perp$ 平面 PAB , $DA \parallel BC$, $\angle BAP = 120^\circ$,

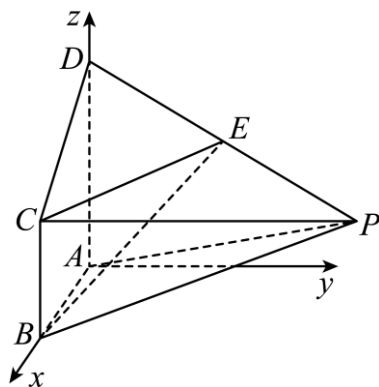
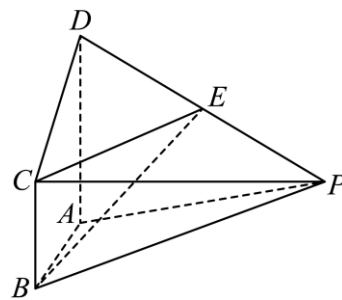
$DA = AP = 2AB = 2BC = 2$, E 线段 DP 的中点.

(1) 求证: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求直线 BE 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(3) 求平面 PCD 与平面 PAD 夹角的余弦值.

【详解】(1) 以点 A 为坐标原点, 以 AB, AD 所在直线分别为 x, z 轴, 以与 AB 垂直的直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 如下图所示,



$$\text{则 } A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,0,1), D(0,0,2), P(-1,\sqrt{3},0), E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CE} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{AD} = (0,0,2).$$

因为 $DA \perp$ 平面 PAB ,

所以平面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 + 0 \times 1 = 0, \text{ 所以 } \overrightarrow{CE} \perp \vec{n}, \text{ 由因为 } CE \not\subset \text{平面 } PAB,$$

所以直线 $CE \parallel$ 平面 PAB .

$$(2) \text{ 由题意知, } \overrightarrow{CE} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{CD} = (-1,0,1),$$

$$\text{设 } \vec{m} = (x, y, z) \text{ 为平面 } PCD \text{ 的法向量, 则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } y = \sqrt{3}, z = 1, \text{ 所以 } \vec{m} = (1, \sqrt{3}, 1),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \text{ 设直线 } BE \text{ 与平面 } PCD \text{ 所成角为 } \theta,$$

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{BE} \rangle \right| = \frac{\left| -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 \right|}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{10},$$

$$\text{所以直线 } BE \text{ 与平面 } PCD \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

$$(3) \text{ 由题意知, } \overrightarrow{AD} = (0,0,2), \overrightarrow{AP} = (-1,\sqrt{3},0)$$

$$\text{设平面 } PAD \text{ 的法向量为 } \vec{n}_0 = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2z = 0 \\ -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

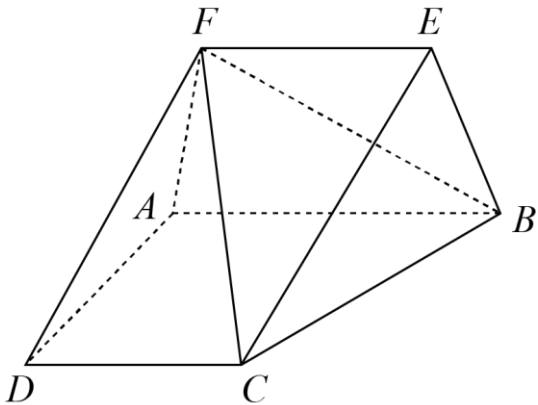
$$\text{令 } x = 3, \text{ 则 } y = \sqrt{3}, z = 0, \text{ 所以 } \vec{n}_0 = (3, \sqrt{3}, 0),$$

又因为平面 PCD 的法向量 $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, 1)$,

设平面 PCD 与平面 PAD 的夹角为 φ , 则 $\cos \varphi = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n}_0 \rangle \right| = \frac{|3+3+0|}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以平面 PCD 与平面 PAB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

14. (2023 天津 校联考一模) 如图, 梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直, $AB \parallel CD \parallel EF$, $AB \perp AD$, $CD = DA = AF = FE = 2$, $AB = 4$.



(1) 求证: $DF \parallel$ 平面 BCE ;

(2) 求平面 ABF 与平面 BFC 的夹角的余弦值;

(3) 线段 CE 上是否存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF ? 请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 证明 $DF \parallel CE$. 然后证明 $DF \parallel$ 平面 BCE .

(2) 在平面 $ABEF$ 内, 过 A 作 $Az \perp AB$, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$. 求出平面 BCF 的法向量, 平面 ABF 的一个法向量, 利用空间向量的数量积求解即可.

(3) 求出平面 ACE 的法向量通过 $\vec{m} \cdot \vec{n} \neq 0$, 说明平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直.

【详解】(1) $\because CD \parallel EF$, 且 $CD = EF$, $\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为平行四边形,

$\therefore DF \parallel CE$. $\because DF \not\subset$ 平面 BCE , $CE \subset$ 平面 BCE , $\therefore DF \parallel$ 平面 BCE .

(2) 在平面 $ABEF$ 内, 过 A 作 $Az \perp AB$.

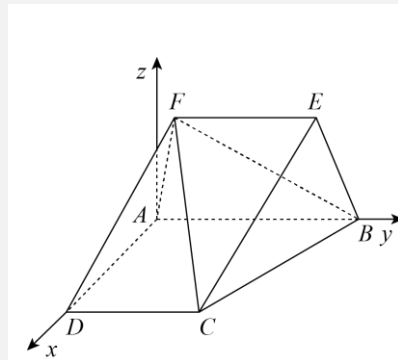
$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$,

又 $Az \subset$ 平面 $ABEF$, $Az \perp AB$,

$\therefore Az \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AD \perp AB$, $AD \perp Az$, $Az \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$:



由题意得, $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,0)$, $E(0,3,\sqrt{3})$, $F(0,1,\sqrt{3})$. $\therefore \vec{BC} = (2,-2,0)$, $\vec{BF} = (0,-3,\sqrt{3})$

设平面 BCF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = 2x - 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BF} = -3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ 令 $y = 1$, 则 $x = 1$, $z = \sqrt{3}$, $\therefore \vec{n} = (1, 1, \sqrt{3})$.

平面 ABF 的一个法向量为 $\vec{v} = (1, 0, 0)$, 则 $\cos \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 平面 ABF 与平面 BFC 的夹角的余弦值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF , 理由如下:

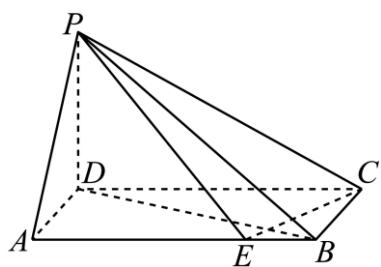
设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = 2x_1 + 2y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AE} = 3y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}$

令 $y_1 = 1$, 则 $x_1 = -1$, $z_1 = -\sqrt{3}$, $\therefore \vec{m} = (-1, 1, -\sqrt{3})$.

$\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = -3 \neq 0$, $\therefore$ 平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直,

从而线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF .

15. (2023 天津河北 统考一模) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 4$, $PD = AD = 2$, 点 E 在线段 AB 上, 且 $AE = \frac{3}{4}AB$.



(1) 求证: $CE \perp$ 平面 PBD ;

(2) 求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值;

(3) 求平面 BCE 与平面 PCE 的夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{42}}{14}$ (3) $\frac{4\sqrt{21}}{21}$

【详解】(1) 证明: $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $CE \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PD \perp CE$, $\because AB = 4$, $AE = \frac{3}{4}AB$.

$\therefore AE = 3$, $BE = 1$, $\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE} = 2$, $\therefore \text{Rt}\triangle CBE \sim \text{Rt}\triangle BAD$, 所以 $\angle ECB = \angle ABD$, 又 $\angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$,

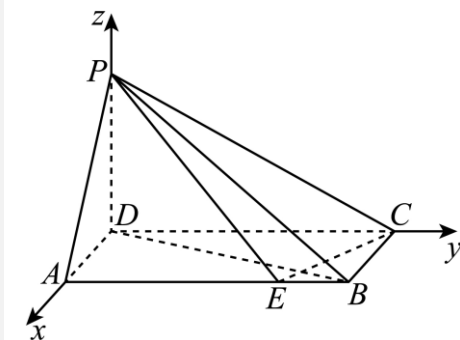
所以 $\angle ECB + \angle DBC = 90^\circ$, $\therefore BD \perp CE$,

$\therefore BD \perp CE$, $PD \perp CE$, $PD \cap BD = D$, $PD, BD \subset$ 平面 PBD , $\therefore CE \perp$ 平面 PBD .

(2) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp AD$, $PD \perp CD$, $\because ABCD$ 为矩形, $AD \perp CD$,

$\therefore AD, CD, PD$ 两两垂直, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,



则 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,4,0)$, $C(0,4,0)$, $P(0,0,2)$, $E(2,3,0)$,

$\vec{PA} = (2,0,-2)$, $\vec{CE} = (2,-1,0)$, $\vec{PC} = (0,4,-2)$,

设平面 PCE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CE} = 2x - y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = 4y - 2z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则 $\vec{n} = (1, 2, 4)$,

设直线 PA 与平面 PCE 所成角为 α , 则 $\sin \alpha = \left| \cos \langle \vec{PA}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \times \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{42}}{14}$,

所以直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

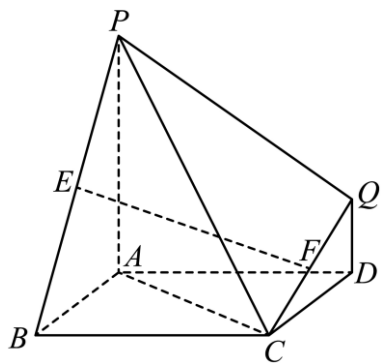
(3) 平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

设平面 BCE 与平面 PCE 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{4\sqrt{21}}{21},$$

所以平面 BCE 与平面 PCE 的夹角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

16. (2023 天津 校联考一模) 已知底面 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \parallel DQ$, $PA = AD = 3DQ = 3$, 点 E 、 F 分别为线段 PB 、 CQ 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 $PADQ$;

(2) 求平面 PCQ 与平面 CDQ 夹角的余弦值;

(3) 线段 PC 上是否存在点 M , 使得直线 AM 与平面 PCQ 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{42}}{7}$,

若存在求出 $\frac{PM}{MC}$ 的值, 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ (3) 存在; $\frac{PM}{MC} = 1$ 或 $\frac{PM}{MC} = \frac{1}{5}$

【分析】(1) 法一: 分别取 AB 、 CD 的中点 G 、 H , 连接 EG 、 GH 、 FH , 证明出平面 $EGHF \parallel$ 平面 $ADQP$, 利用面面平行的性质可证得结论成立;

法二: 以点 A 为坐标原点, 以 AB 、 AD 、 AP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 利用空间向量法可证得结论成立;

(2) 利用空间向量法可求得平面 PCQ 与平面 CDQ 夹角的余弦值;

(3) 假设存在点 M , 使得 $\vec{PM} = \lambda \vec{PC}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 求出向量 $\vec{AM}$ 的坐标, 利用空间向量法可得出关于 λ 的方程, 解之即可.

【详解】(1) 证明: 法一: 分别取 AB 、 CD 的中点 G 、 H , 连接 EG 、 GH 、 FH ,

由题意可知点 E 、 F 分别为线段 PB 、 CQ 的中点. 所以 $EG \parallel PA$, $FH \parallel QD$,

因为 $PA \parallel DQ$, 所以 $EG \parallel FH$, 所以点 E 、 G 、 H 、 F 四点共面,

因为 G 、 H 分别为 AB 、 CD 的中点, 所以 $GH \parallel AD$,

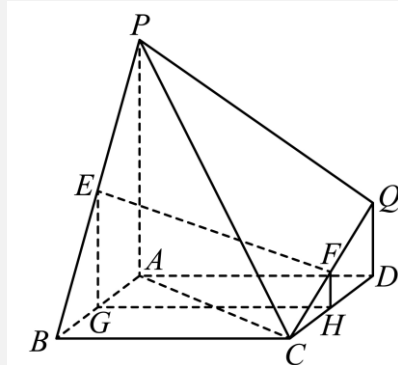
因为 $AD \subset$ 平面 $ADQP$, $GH \not\subset$ 平面 $ADQP$, 所以 $GH \parallel$ 平面 $ADQP$,

又因为 $FH \parallel QD$, $QD \subset$ 平面 $ADQP$, $FH \not\subset$ 平面 $ADQP$, 所以 $FH \parallel$ 平面

$ADQP$,

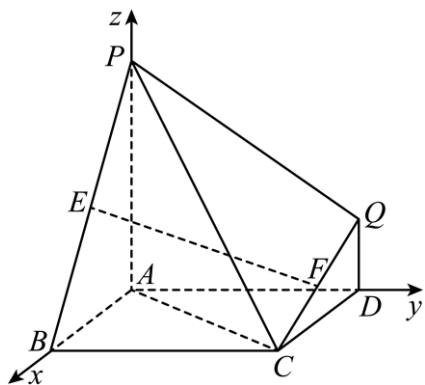
又因为 $FH \cap GH = H$, FH 、 $GH \subset$ 平面 $EGHF$, 所以平面 $EGHF \parallel$ 平面 $ADQP$,

因为 $EF \subset$ 平面 $EGHF$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $ADQP$;



法二: 因为 $ABCD$ 为正方形, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AP 、 AB 、 AD 两两互相垂直,

以点 A 为坐标原点，以 AB、AD、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,0,3)$ 、 $C(3,3,0)$ 、 $Q(0,3,1)$ 、 $B(3,0,0)$ 、 $E\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ 、 $F\left(\frac{3}{2},3,\frac{1}{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{EF} = (0,3,-1)$ ，易知平面 PADQ 的一个法向量 $\vec{a} = (1,0,0)$ ，

所以 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ，所以 $\overrightarrow{EF} \perp \vec{a}$ ，

又因为 $EF \not\subset$ 平面 ADQP，所以 $EF \parallel$ 平面 ADQP。

(2) 解：设平面 PCQ 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ， $\vec{PC} = (3, 3, -3)$ ， $\vec{CQ} = (-3, 0, 1)$ ，

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PC} = 3x + 3y - 3z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CQ} = -3x + z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 可得 } \vec{m} = (1, 2, 3),$$

所以平面 PCQ 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 2, 3)$ ，

易知平面 CQD 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 1, 0)$ ，设平面 PCQ 与平面 CQD 夹角为 θ ，

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{1 \times \sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7},$$

所以平面 PCQ 与平面 CQD 夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ；

(3) 解：假设存在点 M，使得 $\vec{PM} = \lambda \vec{PC} = (3\lambda, 3\lambda, -3\lambda)$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ，

$$\text{则 } \vec{AM} = \vec{AP} + \vec{PM} = (0, 0, 3) + (3\lambda, 3\lambda, -3\lambda) = (3\lambda, 3\lambda, 3 - 3\lambda),$$

由 (2) 得平面 PCQ 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 2, 3)$ ，

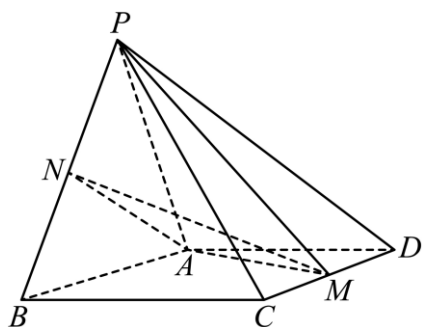
$$\text{由题意可得 } \left| \cos \langle \vec{AM}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{m}|}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|3\lambda + 6\lambda + 9 - 9\lambda|}{\sqrt{14} \sqrt{9\lambda^2 + 9\lambda^2 + (3 - 3\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{42}}{7},$$

整理可得 $12\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$ 。即 $(2\lambda - 1)(6\lambda - 1) = 0$ ，

因为 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，解得 $\lambda = \frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$ ，所以， $\frac{PM}{MC} = \frac{1}{5}$ 或 $\frac{PM}{MC} = 1$ 。

17. (2023 天津南开 统考一模) 如图，四棱锥 P-ABCD 中，平面 PAB ⊥ 平面

ABCD, AB // CD, AB ⊥ AD, AB = 3, AD = $\sqrt{3}$, AP = CD = 2, ∠PAB = 60°, M 是 CD 中点，N 是 PB 上一点。



(1) 当 $PN = \frac{1}{3}PB$ 时，

(i) 证明：MN // 平面 PAD；

(ii) 求直线 PM 与平面 PAD 所成角的正弦值；

(2) 平面 PAD 与平面 AMN 夹角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 求 $\frac{PN}{PB}$ 的值.

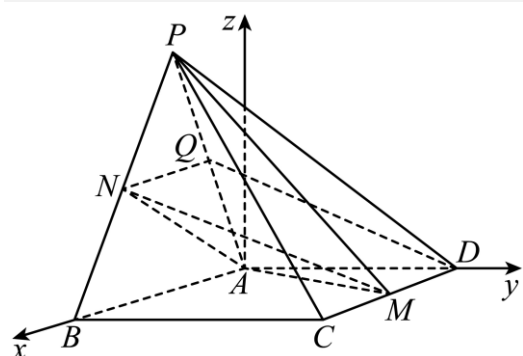
【答案】(1) (i) 证明见解析; (ii) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\frac{28 + 24\sqrt{69}}{487}$

【分析】(1) (i) 以 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AD 为 y 轴, 过点 A 作面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 求平面 PAD 的法向量 $\vec{m}$ 和直线 MN 的方向向量, 证得 $\vec{MN} \perp \vec{m}$, 即可证明 $MN \parallel$ 平面 PAD ; (ii) 求直线 PM 的方向向量, 由线面角的向量公式代入即可得出答案.

(2) 设 $\vec{PN} = t\vec{PB} = (2t, 0, -\sqrt{3}t), t \in [0, 1]$, 求平面 PAD 与平面 AMN 的法向量, 由二面角的向量公式可求出 t , 即可求出 $\frac{PN}{PB}$ 的值.

【详解】(1) 解: 如图建立空间直角坐标系, 以 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AD 为 y 轴, 过点 A 作面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 则由题意可得 $B(3, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, 0), P(1, 0, \sqrt{3}), M(1, \sqrt{3}, 0)$,



由 $\vec{PB} = (2, 0, -\sqrt{3}), \vec{PM} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, 及 $\vec{PN} = \frac{1}{3}\vec{PB}$ 即 $\vec{PN} = \frac{1}{3}\vec{PB}$,

可得 $\vec{PN} = \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \vec{MN} = \vec{PN} - \vec{PM} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(i) 设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{AP} \cdot \vec{m} = x + \sqrt{3}z = 0, \\ \vec{AD} \cdot \vec{m} = \sqrt{3}y = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = -\sqrt{3}z, \\ y = 0 \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ 是平面 PAD 的一个法向量. 因为 $\vec{MN} \cdot \vec{m} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 0 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$,

所以 $\vec{MN} \perp \vec{m}$. 又 $MN \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $MN \parallel$ 平面 PAD .

(ii) 由 (i) 可得 $\cos \langle \vec{PM}, \vec{m} \rangle = \frac{|\vec{PM} \cdot \vec{m}|}{|\vec{PM}| \cdot |\vec{m}|} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以直线 PM 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2) 设 $\vec{PN} = t\vec{PB} = (2t, 0, -\sqrt{3}t), t \in [0, 1]$, 则 $\vec{AN} = \vec{AP} + \vec{PN} = (1 + 2t, 0, \sqrt{3} - \sqrt{3}t)$,

设 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 AMN 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AM} = x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AN} = (1 + 2t)x_1 + \sqrt{3}(1 - t)z_1 = 0 \end{cases}$,

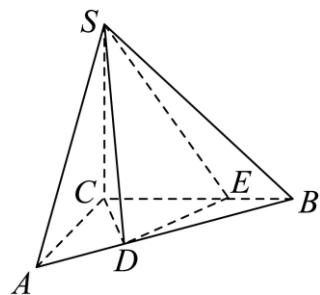
取 $x_1 = \sqrt{3}(t - 1)$, 则 $\vec{n} = (\sqrt{3}(t - 1), 1 - t, 2t + 1)$ 是平面 AMN 的一个法向量,

$$\text{则} \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3 - 3t + 2t + 1|}{2\sqrt{3(t-1)^2 + (1-t)^2 + (2t+1)^2}} = \frac{4}{5},$$

解得 $t = \frac{28+24\sqrt{69}}{487}$ 或 $t = \frac{28-24\sqrt{69}}{487}$ (舍去), 所以 $\frac{PN}{PB} = \frac{28+24\sqrt{69}}{487}$.

18. (2023 天津·大港一中校联考·一模) 如图所示, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SC \perp$ 平面 ABC , $SC = 3$, $AC \perp BC$,

$$CE = 2EB = 2, AC = \frac{3}{2}, CD = ED.$$



- (1) 求证: $DE \perp$ 平面 SCD ;
- (2) 求二面角 $A-SD-C$ 的余弦值;
- (3) 求点 A 到平面 SCD 的距离.

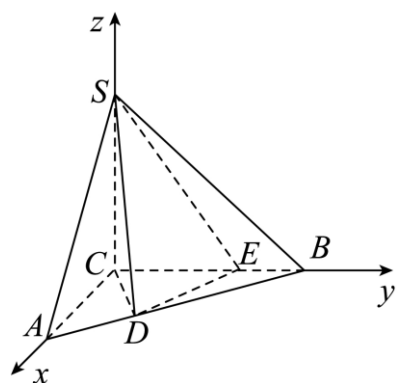
【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; (3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

【分析】(1) 建立空间直角坐标系, 利用向量数量积证明 $DE \perp CD$, $DE \perp CS$, 由线线垂直证明线面垂直, 即得证

(2) 由 (1) $\overrightarrow{DE}$ 为平面 SCD 的一个法向量, 求解平面 SAD 的法向量, 利用二面角的向量公式, 即得解;

(3) 由 (1) $\overrightarrow{DE}$ 为平面 SCD 的一个法向量, 利用点面距离的向量公式 $d = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{DE}|}$ 即得解

【详解】(1) 证明: 以 C 为原点, CA 、 CB 、 CS 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图



则 $C(0,0,0)$, $A(\frac{3}{2},0,0)$, $S(0,0,3)$, $E(0,2,0)$, $D(1,1,0)$,

$\therefore \overrightarrow{DE} = (-1,1,0)$, $\overrightarrow{CD} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{CS} = (0,0,3)$,

$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} = -1+1+0=0$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CS} = 0+0+0=0$,

即 $DE \perp CD$, $DE \perp CS$, $\therefore CD \cap CS = C$, $\therefore DE \perp$ 平面 SCD ;

(2) 由 (1) 可知 $\overrightarrow{DE} = (-1,1,0)$ 为平面 SCD 的一个法向量,

设平面 SAD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 而 $\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$, $\overrightarrow{AS} = (-\frac{3}{2}, 0, 3)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AS} = -\frac{3}{2}x + 3z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 2$, 可得 $\vec{n} = (2, 1, 1)$,

设二面角 $A-SD-C$ 的平面角为 θ , 经观察 θ 为锐角,

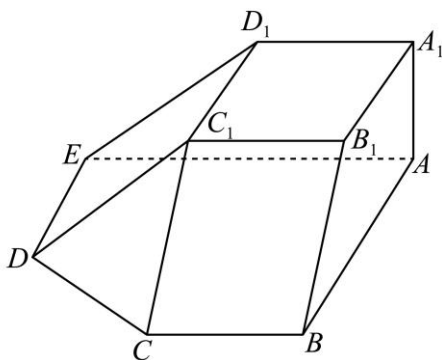
$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DE}, \vec{n} \rangle| = \frac{-2+1+0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 即二面角 $A-SD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$;

(3) $\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$, 平面 SCD 的法向量为 $\overrightarrow{DE} = (-1, 1, 0)$,

设点 A 到平面 SCD 的距离为 d ,

$\therefore d = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{DE}|} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 即点 A 到平面 SCD 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

19. (2023 天津河东 一模) 在苏州博物馆有一类典型建筑八角亭, 既美观又利于采光, 其中一角如图所示, 为多面体 $ABCDE - A_1B_1C_1D_1E_1$, $AB \perp AE$, $AE \parallel BC$, $AB \parallel ED$, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCDE$, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 2 的正方形且平行于底面, $AB \parallel A_1B_1$, D_1E , B_1B 的中点分别为 F , G , $AB = AE = 2DE = 2BC = 4$, $AA_1 = 1$.



(1) 证明: $FG \parallel$ 平面 C_1CD ;

(2) 求平面 C_1CD 与平面 AA_1B_1B 夹角的余弦值;

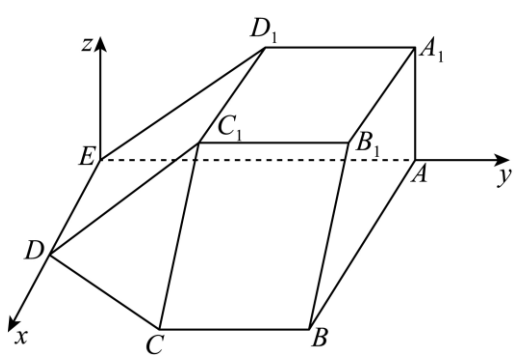
(3) 一束光从玻璃窗面 C_1CD 上点 C_1 射入恰经过点 A (假设此时光经过玻璃为直射), 求这束光在玻璃窗 C_1CD 上的入射角的正切值. 【答案】(1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (3) $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】(1) 过点 E 作 AA_1 的平行线, 结合题意建立空间直角坐标系, 求出相应点的坐标, 并求出平面 C_1CD 的法向量和 FG 的方向向量, 利用向量法证明线面平行即可;

(2) 求出平面 AA_1B_1B 的法向量, 再结合 (1) 中平面 C_1CD 的法向量, 利用空间向量的夹角公式即可求解;

(3) 根据平面镜原理, 设入射角为 θ , 利用空间向量的夹角公式解求出入射角的余弦值, 再利用同角三角函数的基本关系即可求解.

【详解】(1) 过点 E 作 AA_1 的平行线, 由题意可知以 E 为原点, 建立如图所示空间直角坐标系,



则 $E(0,0,0)$, $A(0,4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(4,2,0)$, $D(2,0,0)$, $A_1(0,4,1)$,

$B_1(2,4,1)$, $C_1(2,2,1)$, $D_1(0,2,1)$, $F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $G\left(3,4,\frac{1}{2}\right)$.

设平面 C_1CD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, $\vec{C_1C} = (2, 0, -1)$, $\vec{C_1D} = (0, -2, -1)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{C_1C} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{C_1D} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (1, -1, 2), \vec{FG} = (3, 3, 0)$$

$\therefore \vec{n}_1 \cdot \vec{FG} = 3 - 3 + 0 = 0$, $\therefore \vec{n}_1 \perp \vec{FG}$, $FG \parallel$ 平面 C_1CD .

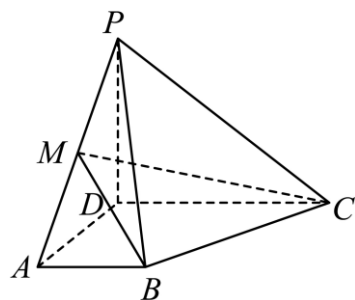
(2) 根据图形易知平面 AA_1B_1B 的法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$, 设平面 C_1CD 与平面 AA_1B_1B 的夹角为 φ ,

则 $\cos \varphi = \left| \cos \langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle \right| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| |\vec{n_2}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 所以平面 C_1CD 与平面 AA_1B_1B 夹角的余弦值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3) $AC_1 = (2, -2, 1)$, 入射角为 θ , $\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n_1}, \vec{AC_1} \rangle \right| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{AC_1}|}{|\vec{n_1}| |\vec{AC_1}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故这束光在玻璃窗 C_1CD 上的入射角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. (2023 天津 统考一模) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, M 是 PA 的中点, $AB \parallel CD$, $AD \perp CD$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $CD = 3$, $AD = PD = 2$, $AB = 1$.



(1) 求证: $PA \perp CD$;

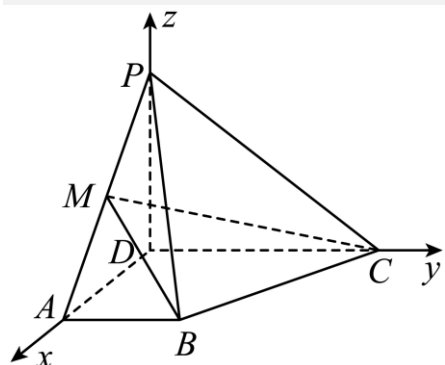
(2) 求直线 PA 与平面 CMB 所成角的正弦值;

(3) 求平面 PAB 与平面 CMB 夹角的大小.

【答案】(1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (3) $\frac{\pi}{6}$.

【详解】(1) 证明: 由题意 $AD \perp CD$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$,

以 D 为原点, 分别以 DA, DC, DP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $D(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $M(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$,

$\vec{CD} = (0, -3, 0)$, $\vec{PA} = (2, 0, -2)$,

则 $\vec{PA} \cdot \vec{CD} = 2 \times 0 + 0 \times (-3) + (-2) \times 0 = 0$,

所以 $\vec{PA} \perp \vec{CD}$, 所以 $PA \perp CD$

(2) $\vec{CB} = (2, -2, 0)$, $\vec{BM} = (-1, -1, 1)$, $\vec{PA} = (2, 0, -2)$, $|\vec{PA}| = 2\sqrt{2}$,

设平面 CMB 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BM} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$, 令 $y = 1$, 则 $x = 1$,

$\therefore \vec{n} = (1, 1, 2)$, $|\vec{n}| = \sqrt{6}$,

设直线 PA 与平面 CMB 所成的角为 θ , $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{PA}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{PA}| |\vec{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

所以 PA 与平面 CMB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(3) $\vec{AB} = (0, 1, 0)$, $\vec{BP} = (-2, -1, 2)$, 设平面 PAB 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BP} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} b = 0 \\ -2a - b + 2c = 0 \end{cases}$,

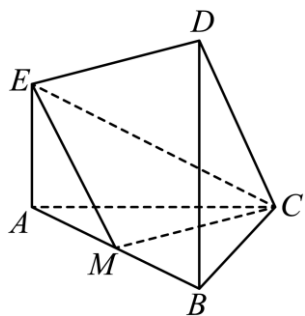
令 $a = 1$, 则 $c = 1$, 则 $\vec{m} = (1, 0, 1)$, $|\vec{m}| = \sqrt{2}$. 又平面 CMB 的法向量 $\vec{n} = (1, 1, 2)$, $|\vec{n}| = \sqrt{6}$,

设平面 PAB 与平面 CMB 夹角为 α , 则 α 为锐角,

$$\therefore \cos \alpha = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以平面 } PAB \text{ 与平面 } CMB \text{ 夹角为 } \frac{\pi}{6}.$$

21. (2023 天津和平 统考一模) 在如图所示的几何体中, $EA \perp$ 平面 ABC , $DB \perp$ 平面 ABC ;

$AC \perp BC$, $AC = BC = BD = 2AE = 2$, M 是 AB 的中点.



(1) 求证: $CM \perp EM$;

(2) 求直线 EM 与平面 CDE 所成角的正弦值;

(3) 求平面 CME 与平面 CDE 的夹角的余弦值.

【答案】(1) 详见解析; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (3) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

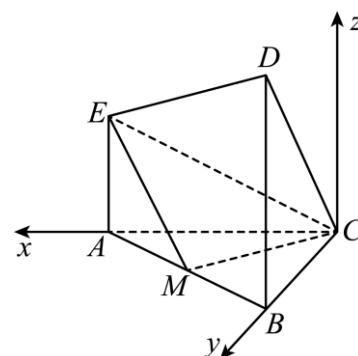
【详解】(1) 因为 $AC \perp BC$, 以 C 为原点, 分别以 CA , CB 所在直线为 x , y 轴, 过点 C 且与平面 ABC 垂直的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$,

则 $M(1, 1, 0)$, $E(2, 0, 1)$, 所以 $\vec{CM} = (1, 1, 0)$, $\vec{EM} = (-1, 1, -1)$,

所以 $\vec{CM} \cdot \vec{EM} = -1 + 1 + 0 = 0$, 所以 $\vec{CM} \perp \vec{EM}$, 即 $CM \perp EM$;

(2) 因为 $\vec{CE} = (2, 0, 1)$, $\vec{CD} = (0, 2, 2)$, 设平面 CDE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CE} = 2x + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CD} = 2y + 2z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 可得 $\vec{m} = (1, 2, -2)$, 又 $\vec{EM} = (-1, 1, -1)$,



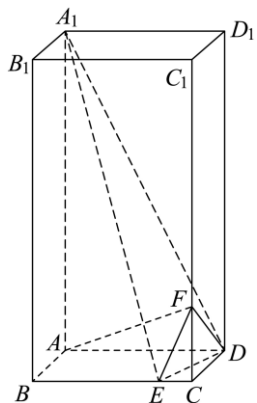
设 EM 与平面 CDE 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{EM} \cdot \vec{m}|}{|\vec{EM}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 直线 EM 与平面 CDE 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(3) 由题 $\vec{CM} = (1, 1, 0)$, $\vec{CE} = (2, 0, 1)$, 设平面 CME 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$,

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CE} = 2a + c = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CM} = a + b = 0 \end{cases}$, 令 $a = 1$, 则 $\vec{n} = (1, -1, -2)$, 又平面 CDE 的法向量 $\vec{m} = (1, 2, -2)$,

所以 $\left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 4} \times \sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以平面 CME 与平面 CDE 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

22. (2023 天津红桥 统考一模) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是棱 BC , CC_1



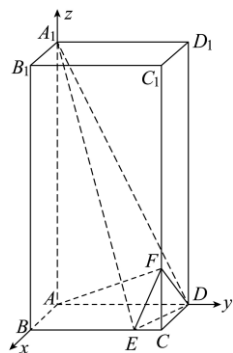
上的点, $CF = AB = 2CE$, $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 4$

(1) 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值; (2) 证明 $AF \perp$ 平面 A_1ED

(3) 求二面角 A_1-ED-F 的正弦值.

【答案】(1) $\frac{3}{5}$, (2) 见解析 (3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【详解】方法一: 如图所示, 建立空间直角坐标系,



点 A 为坐标原点, 设 $AB=1$, 依题意得 $D(0, 2, 0)$,

$$F(1, 2, 1), A_1(0, 0, 4), E\left(1, \frac{3}{2}, 0\right)$$

$$(1) \text{ 解: 易得 } \overrightarrow{EF} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -4)$$

$$\text{于是 } \cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_1D} \rangle = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{A_1D}|} = -\frac{3}{5}$$

所以异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$

$$(2) \text{ 证明: 已知 } \overrightarrow{AF} = (1, 2, 1), \overrightarrow{EA_1} = \left(-1, -\frac{3}{2}, 4\right), \overrightarrow{ED} = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

于是 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EA_1} = 0, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$. 因此, $AF \perp EA_1, AF \perp ED$, 又 $EA_1 \cap ED = E$

所以 $AF \perp$ 平面 A_1ED

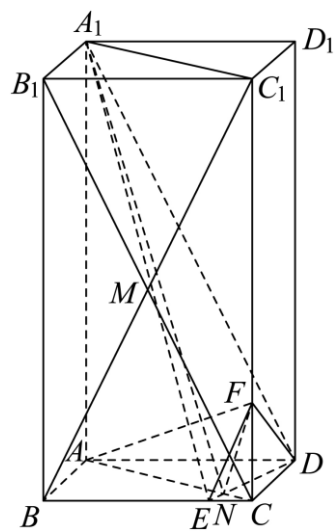
$$(3) \text{ 解: 设平面 } EFD \text{ 的法向量 } \vec{u} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}y + z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

不妨令 $x=1$, 可得 $\vec{u} = (1, 2, -1)$. 由 (2) 可知, $\overrightarrow{AF}$ 为平面 A_1ED 的一个法向量.

$$\text{于是 } \cos \langle \vec{u}, \overrightarrow{AF} \rangle = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\vec{u}| |\overrightarrow{AF}|} = \frac{2}{3}, \text{ 从而 } \sin \langle \vec{u}, \overrightarrow{AF} \rangle = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

所以二面角 A_1-ED-F 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

方法二: (1) 解: 设 $AB=1$, 可得 $AD=2, AA_1=4, CF=1, CE=\frac{1}{2}$



链接 B_1C, BC_1 , 设 B_1C 与 BC_1 交于点 M, 易知 $A_1D \parallel B_1C$, 由 $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CC_1} = \frac{1}{4}$, 可知 $EF \parallel BC_1$.

故 $\angle BMC$ 是异面直线 EF 与 A_1D 所成的角, 易知 $BM=CM=\frac{1}{2}B_1C=\sqrt{5}$, 所以

$$\cos \angle BMC = \frac{BM^2 + CM^2 - BC^2}{2BM \cdot CM} = \frac{3}{5}, \text{ 所以异面直线 } FE \text{ 与 } A_1D \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{3}{5}$$

(2) 证明: 连接 AC , 设 AC 与 DE 交点 N 因为 $\frac{CD}{BC} = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{2}$, 所以 $Rt\triangle DCE \sim Rt\triangle CBA$,

从而 $\angle CDE = \angle BCA$, 又由于 $\angle CDE + \angle CED = 90^\circ$, 所以 $\angle BCA + \angle CED = 90^\circ$, 故

$AC \perp DE$, 又因为 $CC_1 \perp DE$ 且 $CC_1 \cap AC = C$, 所以 $DE \perp$ 平面 ACF , 从而 $AF \perp DE$.

连接 BF , 同理可证 $B_1C \perp$ 平面 ABF , 从而 $AF \perp B_1C$, 所以 $AF \perp A_1D$ 因为 $DE \cap A_1D = D$, 所以 $AF \perp$ 平面 A_1ED

(3) 解: 连接 A_1N, FN , 由 (2) 可知 $DE \perp$ 平面 ACF , 又 $NF \subset$ 平面 $ACF, A_1N \subset$ 平面 ACF , 所以 $DE \perp NF, DE \perp A_1N$, 故 $\angle A_1NF$

为二面角 A_1-ED-F 的平面角

易知 $Rt\triangle CNE \sim Rt\triangle CBA$ ，所以 $\frac{CN}{BC} = \frac{EC}{AC}$ ，又 $AC = \sqrt{5}$ 所以 $CN = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，在

$Rt\triangle NCF$ 中， $NF = \sqrt{CF^2 + CN^2} = \frac{30}{5}$ 在 $Rt\triangle A_1AN$ 中 $NA_1 = \sqrt{A_1A^2 + AN^2} = \frac{4\sqrt{30}}{5}$

连接 A_1C_1, A_1F 在 $Rt\triangle A_1C_1F$ 中， $A_1F = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{14}$

在 $Rt\triangle A_1NF$ 中， $\cos \angle A_1NF = \frac{A_1N^2 + FN^2 - A_1F^2}{2A_1N \cdot FN} = \frac{2}{3}$ 。所以 $\sin \angle A_1NF = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 所以二面角 A_1-DE-F 正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

23. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 在平面直角坐标系中，已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左焦点和右焦点。

(1) 设 T 是椭圆 C 上的任意一点，求 $\overrightarrow{TF_1} \cdot \overrightarrow{TF_2}$ 取值范围；

(2) 设 $A(0, -1)$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点，若 $\triangle ABD$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程。

【答案】(1) $[-2, 1]$ ；(2) $y = \frac{3}{5}$ 或 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{3}{5}$ 。

【分析】(1) 求出焦点坐标，设点 $T(x_0, y_0)$ ，利用数量积的运算律得到关于 x_0 的函数，再确定其范围作答。

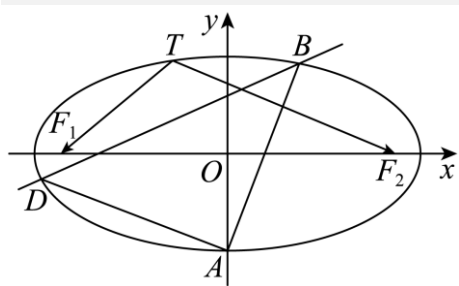
(2) 当 l 垂直于 y 轴时，求出 l 的方程；当 l 不垂直于 y 轴时，设出 l 的方程并与椭圆方程联立，结合韦达定理和等腰直角三角形的性质确定直线的斜率即可求得直线方程。

【详解】(1) 在椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中， $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，

设 $T(x_0, y_0)$ ，则有 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ，即 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ ， $\overrightarrow{TF_1} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0), \overrightarrow{TF_2} = (\sqrt{3} - x_0, -y_0)$ ，

于是 $\overrightarrow{TF_1} \cdot \overrightarrow{TF_2} = (-\sqrt{3} - x_0)(\sqrt{3} - x_0) + (-y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 - 3 = \frac{3}{4}x_0^2 - 2$ ，显然 $x_0^2 \in [0, 4]$ ，

所以 $\overrightarrow{TF_1} \cdot \overrightarrow{TF_2}$ 的取值范围是 $[-2, 1]$ 。



(2) 显然直线 l 不垂直于 x 轴，当直线 l 垂直于 y 轴时，由对称性知，点 B, D 关于 y 轴对称，

不妨令点 B 在 y 轴右侧，因为 $\triangle ABD$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，

则直线 AB 方程为： $y = x - 1$ ，由 $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 消去 y 得： $5x^2 - 8x = 0$ ，于是

得 $B(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ ，点 $D(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ ，

直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{5}$ ，

当直线 l 与坐标轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y = kx + m (m \neq -1, k \neq 0)$ ，设 $B(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ，

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 消去 y 得： $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$ ，

$$\text{则 } \Delta = 64k^2m^2 - 16(1+4k^2)(m^2-1) > 0, \text{ 即 } 4k^2+1 > m^2, \quad x_1+x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2},$$

因为 $\triangle ABD$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 $AB \perp AD$, 有 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,

$$\text{而 } \overrightarrow{AB} = (x_1, y_1+1), \overrightarrow{AD} = (x_2, y_2+1), \text{ 于是 } x_1x_2 + (y_1+1)(y_2+1) = 0,$$

$$\text{即 } x_1x_2 + (kx_1+m+1)(kx_2+m+1) = 0, \text{ 整理得 } (1+k^2)x_1x_2 + k(m+1)(x_1+x_2) + (m+1)^2 = 0,$$

$$\text{从而 } (1+k^2) \cdot \frac{4m^2-4}{1+4k^2} - k(m+1) \cdot \frac{8km}{1+4k^2} + (m+1)^2 = 0,$$

$$\text{化为 } 4(1+k^2)(m-1) - 8k^2m + (1+4k^2)(m+1) = 0, \text{ 解得 } m = \frac{3}{5},$$

$$\text{又线段 } BD \text{ 的中垂线过点 } \left(\frac{-4km}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2} \right) \text{ 及点 } A, \text{ 因此 } \frac{\frac{m}{1+4k^2}+1}{\frac{-4km}{1+4k^2}} = -\frac{1}{k},$$

$$\text{即 } 3m = 1+4k^2, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 而当 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, m = \frac{3}{5} \text{ 时, } 4k^2+1 > m^2 \text{ 成立, 即 } \Delta > 0,$$

$$\text{因此直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{3}{5},$$

$$\text{所以满足条件的直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{5} \text{ 或 } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{3}{5}.$$

【点睛】思路点睛：解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x (或 y) 建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系。涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形。

24. (2023 天津河西 统考一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

(2) 点 P 在椭圆 C 上，且 P 点不在 x 轴上，线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q ，若 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，求点 P 横坐标。

$$\text{【答案】(1) 椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 焦点坐标为 } (\pm\sqrt{2}, 0); (2) -\frac{2}{5}.$$

【分析】(1) 由 $|AB| = \sqrt{6}$ ，求得 b ，得椭圆方程，再计算 c 得焦点坐标；

(2) 设 AB 方程为 $y = k(x+2)$ ， $k \neq 0$ ，代入椭圆方程求得 P 点坐标，然后求出 AP 的中垂线方程，得 N 点坐标，再利用 $|AP| = |AN|$ 求得 k 后得 P 点横坐标。

【详解】(1) 由题意左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{4+b^2} = \sqrt{6}$ ，解得 $b = \sqrt{2}$ ，所以 $c = \sqrt{2}$ ，

$$\text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 焦点坐标为 } (\pm\sqrt{2}, 0);$$

(2) 由已知 $A(-2, 0)$ ，设 AB 方程为 $y = k(x+2)$ ， $k \neq 0$ ，代入椭圆方程并整理得：

$$(1+2k^2)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0,$$

由 $x = -2$ 是此方程的一个解得 $x_p = -\frac{4k^2-2}{1+2k^2}$ ，所以 $y_p = \frac{4k}{1+2k^2}$ ，

AP 的中点坐标为 $(-\frac{4k^2}{1+2k^2}, \frac{2k}{1+2k^2})$ ， AP 的垂直平分线方程为 $y - \frac{2k}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}(x + \frac{4k^2}{1+2k^2})$ ，

令 $x = 0$ 得 $y_N = -\frac{2k}{1+2k^2}$ ， $\triangle PAQ$ 为等边三角形，则 $|AP| = |AQ|$ ，

所以 $\left(-\frac{4k^2-2}{1+2k^2} + 2\right)^2 + \left(\frac{4k}{1+2k^2}\right)^2 = (-2)^2 + \left(-\frac{2k}{1+2k^2}\right)^2$ ，解得 $k^2 = \frac{3}{4}$ ，所以 $x_p = -\frac{4 \times \frac{3}{4} - 2}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = -\frac{2}{5}$ 。

25. (2023 天津河北 统考一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2，点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在 C 上。

(1) 求 C 的方程；

(2) 若过动点 P 的两条直线 l_1, l_2 均与 C 相切，且 l_1, l_2 的斜率之积为 -1，点 $A(-\sqrt{3}, 0)$ ，问是否存在定点 B ，使得 $PA \cdot PB = 0$ ？若存在，求出点 B 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ；(2) 存在，点 $B(\sqrt{3}, 0)$ 。

【分析】(1) 根据给定条件可得椭圆 C 的二焦点坐标，利用椭圆定义求出椭圆的长轴长即可计算作答。

(2) 设出过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线方程，与椭圆 C 的方程联立，由判别式 $\Delta = 0$ 探求出 x_0, y_0 的关系即可推理作答。

【详解】(1) 由题意知，椭圆 C 的半焦距 $c = 1$ ，焦点分别为 $(-1, 0)$ ， $(1, 0)$ ，

由椭圆定义得：椭圆长轴长 $2a = \sqrt{(1-1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + \sqrt{(1+1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2\sqrt{2}$ ，即 $a = \sqrt{2}$ ， $b^2 = a^2 - 1 = 1$ ，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$ ，显然 $x_0 \neq \pm\sqrt{2}$ ，过点 P 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，

由 $\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ 消去 y 并整理得： $(1 + 2k^2)x^2 + 4k(y_0 - kx_0)x + 2(y_0 - kx_0)^2 - 2 = 0$ ，

因为直线 l 与 C 相切，则 $\Delta = 16k^2(y_0 - kx_0)^2 - 8(1 + 2k^2)[(y_0 - kx_0)^2 - 1] = 0$ ，得 $(y_0 - kx_0)^2 = 1 + 2k^2$ ，

即 $(x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$ ，设直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 ，显然 k_1, k_2 是上述关于 k 的一元二次方程的两个根，

则 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 2} = -1$ ，化简得 $x_0^2 + y_0^2 = 3$ ，即点 P 到坐标原点 O 的距离 $|PO| = \sqrt{3}$ ，

故点 P 在以 O 为圆心， $\sqrt{3}$ 为半径的圆上，并且是动点，而点 A 为该圆上一定点，

则当满足 $PA \cdot PB = 0$ 时， AB 为圆 O 的直径，即点 $B(\sqrt{3}, 0)$ ，

所以存在点 $B(\sqrt{3}, 0)$ 满足题意。

【点睛】思路点睛：涉及动直线与圆锥曲线相交满足某个条件问题，设出直线方程并与圆锥曲线方程联立，结合已

知条件及韦达定理推理求解.

26. (2023 天津 校联考一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为点 F , A 、 B 分别为椭圆 C 的上、下顶点, 若椭圆中心到直线 AF 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 过点 B 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 交椭圆 C 于另一点 N (异于椭圆的右顶点), 交 x 轴于点 P , 直线 AN 与直线 $x = a$ 相交于点 Q , 过点 A 且与 PQ 平行的直线截椭圆所得弦长为 $\sqrt{14}$, 求椭圆 C 的标准方程.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$

【分析】(1) 椭圆中心到直线 AF 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 由面积法列出 a 、 c 齐次式, 可求椭圆的离心率;

(2) 设出直线 l 的方程, 与椭圆联立方程组, 求得点 N 坐标, 得到直线 AN 的方程和点 Q 坐标, 左顶点 $D(-2c, 0)$, 由直线 PQ 的斜率可得弦为 AD , 可求出椭圆方程.

【详解】(1) 由题意 $F(c, 0)$, $A(0, b)$, 椭圆中心到直线 AF 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 由直角三角形面积关系得 $bc = \frac{1}{4} \times 2b \times \sqrt{b^2 + c^2}$, 即 $bc = \frac{1}{4} \times 2b \times a$, 解得椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得 $a = 2c$, $b = \sqrt{3}c$, 易得 $A(0, \sqrt{3}c)$, $B(0, -\sqrt{3}c)$,

直线 l 的方程为 $y = kx - \sqrt{3}c$, 因为直线 l 不过右顶点 $(2c, 0)$, 所以 $k \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \\ y = kx - \sqrt{3}c \end{cases}$, 得 $(3 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}kcx = 0$, $\therefore x_N = \frac{8\sqrt{3}kc}{3 + 4k^2}$,

从而 $N\left(\frac{8\sqrt{3}kc}{3 + 4k^2}, \frac{4\sqrt{3}k^2c - 3\sqrt{3}c}{3 + 4k^2}\right)$, $P\left(\frac{\sqrt{3}c}{k}, 0\right)$,

直线 AN 的斜率为 $\frac{\frac{4\sqrt{3}k^2c - 3\sqrt{3}c}{3 + 4k^2} - \sqrt{3}c}{\frac{8\sqrt{3}kc}{3 + 4k^2} - \frac{\sqrt{3}c}{k}} = \frac{-6\sqrt{3}c}{8\sqrt{3}kc} = -\frac{3}{4k}$,

故直线 AN 的方程为 $y = -\frac{3}{4k}x + \sqrt{3}c$, 令 $x = 2c$, 得 $Q\left(2c, -\frac{3c}{2k} + \sqrt{3}c\right)$,

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{-\frac{3c}{2k} + \sqrt{3}c}{2c - \frac{\sqrt{3}c}{k}} = \frac{-3c + 2\sqrt{3}kc}{4kc - 2\sqrt{3}c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$A(0, \sqrt{3}c)$, 左顶点 $D(-2c, 0)$, $k_{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $|AD|^2 = a^2 + b^2 = 14$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 解得 $a^2 = 8$, $b^2 = 6$, $c^2 = 2$.

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$

【点睛】方法点睛：解决直线与椭圆的综合问题时，要注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题。

27. (2023 天津南开 统考一模) 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点，过 $F_2(1, 0)$ 的直线 l 交 C 于 P, Q 两点，当 l 垂直于 x 轴时，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是 $\frac{3}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设椭圆 C 的左顶点为 A ，当 l 不与 x 轴重合时，直线 AP 交直线 $m: x = 2a$ 于点 M ，若直线 m 上存在另一点 N ，使 $F_2M \cdot F_2N = 0$ ，求证： A, Q, N 三点共线。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (2) 证明见解析

【分析】(1) 根据已知条件及椭圆的定义求得 a, b 的值即可。

(2) 设直线 PQ 方程，联立其与椭圆方程可得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ ，联立直线 AP 的方程与直线 m 方程可得点 M 坐标，求出 F_2M 的斜率，得到直线 F_2N 的斜率，求出直线 F_2N 的方程，得到点 N 坐标，再证明 $k_{AQ} = k_{AN}$ 即可。

【详解】(1) 依题意知， $c = 1$ ，所以 $a^2 = b^2 + 1$ 。

因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是 $\frac{3}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} \times 2 \times |PF_2| = \frac{3}{2}$ ，解得 $|PF_2| = \frac{3}{2}$ ，所以 $|PF_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \frac{5}{2}$ ，

从而 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 4$ ，解得 $a = 2$ ，所以 $b^2 = 3$ ，椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 由 (1) 知， $A(-2, 0)$ 。

依题意，设直线 l 方程为 $x = my + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} x = my + 1, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$ ，

则 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$ ，直线 AP 的斜率 $k_{PA} = \frac{y_1}{x_1 + 2}$ ，直线 AP 的方程： $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ ，

而直线 $m: x = 4$ ，所以 $M\left(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right)$ 。直线 F_2M 的斜率 $k_{F_2M} = \frac{\frac{6y_1}{x_1 + 2}}{4 - 1} = \frac{2y_1}{x_1 + 2}$ ，

而 $F_2M \cdot F_2N = 0$ ，即 $F_2M \perp F_2N$ ，所以直线 F_2N 的斜率 $k_{F_2N} = -\frac{x_1 + 2}{2y_1}$ 。

因此直线 F_2N 的方程： $y = -\frac{x_1 + 2}{2y_1}(x - 1)$ ，则点 $N\left(4, -\frac{3x_1 + 6}{2y_1}\right)$ ，所以直线 AN 的斜率 $k_{AN} = \frac{-\frac{3x_1 + 6}{2y_1}}{4 - (-2)} = -\frac{x_1 + 2}{4y_1}$ 。

又直线 AQ 的斜率 $k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2 + 2}$ ，

则 $k_{AQ} - k_{AN} = \frac{y_2}{x_2 + 2} - \left(-\frac{x_1 + 2}{4y_1}\right) = \frac{y_2}{my_2 + 3} + \frac{my_1 + 3}{4y_1} = \frac{(m^2 + 4)y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9}{4y_1(my_2 + 3)}$ ，

而 $(m^2 + 4)y_1y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9 = \frac{-9(m^2 + 4)}{3m^2 + 4} + \frac{-6m \cdot 3m}{3m^2 + 4} + 9 = 0$ ，即 $k_{AQ} = k_{AN}$ ，所以 A, Q, N 三点共线。

28. (2023 天津·大港一中校联考·一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，直线 $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 与椭圆 C 相交于两点 M, N ，且 $|MN| = \frac{12}{5}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点， F_1, F_2 为左、右焦点，连接 PF_1, PF_2 ，设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PQ 交椭圆 C 的长轴于点 $Q(m, 0)$ ，求 m 的取值范围。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【分析】(1) 由已知可得 $a^2 = 4b^2$ ，则椭圆 C 的方程可化为 $x^2 + 4y^2 = 4b^2$ ，将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立，列出韦达定理，结合弦长公式以及 $|MN| = \frac{12}{5}$ 可求出 b^2 的值，由此可得出椭圆 C 的方程；

(2) 由角平分线的性质可得出 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|} = \frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - m}$ ，可求得 $|PF_2| = \frac{2(\sqrt{3} - m)}{\sqrt{3}}$ ，求出 $|PF_2|$ 的取值范围，可得出关于实数 m 的不等式，解之即可。

【详解】(1) 解：因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且 $c^2 = a^2 - b^2$ ，则 $a^2 = 4b^2$ ，

所以，椭圆 C 的方程可化为 $x^2 + 4y^2 = 4b^2$ ，

联立 $\begin{cases} y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + 4y^2 = 4b^2 \end{cases}$ ，消去 y 可得 $5x^2 + 4\sqrt{2}x + 2 - 4b^2 = 0$ ，

$\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \times 5 \times (2 - 4b^2) = 80b^2 - 8 > 0$ ，可得 $b^2 > \frac{1}{10}$ ，

设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ， $x_1x_2 = \frac{2 - 4b^2}{5}$ ，

所以 $|MN| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2 - \frac{4(2 - 4b^2)}{5}} = \frac{4\sqrt{10b^2 - 1}}{5} = \frac{12}{5}$ ，

解得： $b^2 = 1$ ，从而 $a^2 = 4$ ，故所求椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 解：在椭圆 C 中， $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ ，则点 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，

因为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PQ 交椭圆 C 的长轴于点 $Q(m, 0)$ ，

在点 Q 到直线 PF_1, PF_2 的距离相等，则 $\frac{S_{\triangle QPF_1}}{S_{\triangle QPF_2}} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|} = \frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - m}$ ，

由椭圆的定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$ ，

$$\text{所以, } \frac{4 - |PF_2|}{|PF_2|} = \frac{\sqrt{3} + m}{\sqrt{3} - m}, \text{ 解得 } |PF_2| = \frac{2(\sqrt{3} - m)}{\sqrt{3}},$$

设点 $P(x_0, y_0)$, 其中 $-2 < x_0 < 2$, 且 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$,

$$\text{所以, } |PF_2| = \sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - 2\sqrt{3}x_0 + 3 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x_0^2}{4} - 2\sqrt{3}x_0 + 4}$$

$$= \left| 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 \right| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}),$$

$$\text{所以, } 2 - \sqrt{3} < \frac{2(\sqrt{3} - m)}{\sqrt{3}} < 2 + \sqrt{3}, \text{ 解得 } -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

因此, 实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中取值范围问题的五种求解策略：

- (1) 利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；
- (2) 利用已知参数的范围，求新的参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；
- (3) 利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；
- (4) 利用已知的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；
- (5) 利用求函数值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围.

29. (2023 天津红桥 统考一模) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 长轴为 4, 且过椭圆右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -2$, 其中 O 为坐标原点, 求直线 l 的斜率;

(3) 若 AB 是椭圆 C 经过原点 O 的弦, 且 $MN \parallel AB$, 判断 $\frac{|AB|^2}{|MN|}$ 是否为定值? 若是定值, 请求出, 若不是定值, 请说明理由. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (2) $\pm\sqrt{2}$ (3) 是定值, 定值为 4

【分析】(1) 由离心率和长轴, 求出 a 和 c , 再由 $b^2 = a^2 - c^2$ 求得 b^2 , 即可求出椭圆标准方程;

(2) 设直线 l 的方程为: $y = k(x - 1)$, 直线 l 与椭圆 C 交于两点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线方程与椭圆方程联立, 分别表示出 $x_1 \cdot x_2$ 和 $y_1 \cdot y_2$, 由 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -2$ 列出方程, 即可求出斜率值;

(3) 由弦长公式表示出 $|MN|$, 再由 AB 是椭圆 C 经过原点 O 的弦, 且 $MN \parallel AB$, 表示出 $|AB|^2$, 即可得出答案.

【详解】(1) 解: 由离心率 $e = \frac{1}{2}$, 长轴为 4, 得 $a = 2$, $c = 1$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 故椭圆 C 的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 得椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(1, 0)$,

设直线 l 的方程为: $y = k(x - 1)$, 直线 l 与椭圆 C 交于两点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases} \text{得, } (3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\text{所以 } y_1 \cdot y_2 = k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = \frac{-9k^2}{3 + 4k^2}, \text{ 因为 } \vec{OM} \cdot \vec{ON} = -2,$$

$$\text{所以 } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = -2, \text{ 即 } \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{9k^2}{3 + 4k^2} = -2, \text{ 解得 } k = \pm\sqrt{2},$$

故直线 l 的斜率为 $\pm\sqrt{2}$.

(3) $\frac{|AB|^2}{|MN|}$ 是定值, 理由如下,

由 (2) 得: 直线 l 的方程为: $y = k(x - 1)$, 直线 l 与椭圆 C 交于两点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 则 } |MN| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{(1 + k^2)[(\frac{8k^2}{3 + 4k^2})^2 - 4 \times \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}]} \\ &= \sqrt{(1 + k^2) \times \frac{144(1 + k^2)}{(3 + 4k^2)^2}} = \frac{12(1 + k^2)}{3 + 4k^2}, \end{aligned}$$

由 AB 是椭圆 C 经过原点 O 的弦, 设 $A(m, n)$, $B(-m, -n)$, 直线 AB 的斜率为 k_{AB} , 则 $|AB|^2 = 4m^2 + 4n^2$,

$$\text{由 } MN \parallel AB \text{ 得, } k_{AB} = \frac{2n}{2m} = \frac{n}{m} = k, \text{ 且 } \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{3} = 1, \text{ 得 } |AB|^2 = \frac{48(1 + k^2)}{3 + 4k^2}, \text{ 所以 } \frac{|AB|^2}{|MN|} = \frac{\frac{48(1 + k^2)}{3 + 4k^2}}{\frac{12(1 + k^2)}{3 + 4k^2}} = 4, \text{ 为定值.}$$

30. (2023 天津河东 一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 右焦点为 $F(2, 0)$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与直线 $x = 3$ 交于点 C , $\triangle ABC$ 为等边三角形, 求

直线 l 的方程. 【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ (2) $y = x - 2$ 或 $y = -x + 2$

【分析】(1) 根据离心率和焦点坐标可求出 $a = \sqrt{6}$, 再根据 $b^2 = a^2 - c^2$, 可求得 $b^2 = 2$, 即可求解;

(2) 讨论直线 AB 的斜率存在还是不存在, 当斜率存在且 $k \neq 0$ 时, 直线代入椭圆可得 $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2 + 1}$,

$$x_1x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1}, \text{ 可求出 } AB \text{ 的中点为 } D\left(\frac{6k^2}{3k^2 + 1}, \frac{-2k}{3k^2 + 1}\right), \text{ 通过弦长公式和两点距离求出 } |AB|, |CD|, \text{ 利用 } \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

即可求解

【详解】(1) 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 解得 $a = \sqrt{6}$,

由 $b^2 = a^2 - c^2$, $\therefore b^2 = 2$, 则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 当直线 AB 为 x 轴时, 易得线段 AB 的垂直平分线与直线 $x = 3$ 没有交点, 故不满足题意;

当 AB 所在直线的斜率存在且不为 x 轴时, 设该直线方程为 $y = k(x - 2) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y = k(x-2) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{解为 } (3k^2+1)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0, \Delta = 144k^4 - 4(3k^2+1)(12k^2-6) = 24(k^2+1) > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2+1}, x_1x_2 = \frac{12k^2-6}{3k^2+1} y_1 + y_2 = k(x_1-2) + k(x_2-2) = k(x_1+x_2-4) = \frac{-4k}{3k^2+1},$$

$$\text{设 } AB \text{ 的中点为 } D, \text{ 则 } D\left(\frac{6k^2}{3k^2+1}, \frac{-2k}{3k^2+1}\right), \text{ 设 } C(3, y_c), \text{ 由 } \triangle ABC \text{ 为等边三角形, } \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2}{\sqrt{3}}, k_{CD} = -\frac{1}{k},$$

$$|CD| = \sqrt{k_{CD}^2 + 1} \left(3 - \frac{6k^2}{3k^2+1}\right) = \sqrt{\frac{k^2+1}{k^2} \frac{3k^2+3}{3k^2+1}},$$

$$|AB| = \sqrt{k^2+1} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{k^2+1} \sqrt{\left(\frac{12k^2}{3k^2+1}\right)^2 - 4 \times \frac{12k^2-6}{3k^2+1}} = \frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1} \text{ 所以}$$

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+3} \times \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 解得 } k^2 = 1, \text{ 所以 } k = \pm 1,$$

$$\text{当 } AB \text{ 所在直线的斜率不存在时, 将 } x=2 \text{ 代入 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ 可得 } y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } |AB| = \frac{2\sqrt{6}}{3}, |CD| = 1, \text{ 不满足题意,}$$

综上所述, 直线 l 的方程为 $y = x - 2$ 或 $y = -x + 2$

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

(1) 设直线方程, 设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$; (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于 x (或 y) 的一元二次方程, 必要时计算 Δ ; (3) 列出韦达定理;

(4) 将所求问题或题中的关系转化为 $x_1 + x_2, x_1x_2$ (或 $y_1 + y_2, y_1y_2$) 的形式; (5) 代入韦达定理求解.

31. (2023 天津 统考一模) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的直线与椭圆相交于 M, N 两点, 且 MF_2 与 x 轴垂直. (1) 求椭圆的离心率; (2) 若三角形 F_2MN 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$, 求椭圆的方程.

$$\text{【答案】(1) } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (2) } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

【分析】(1) 求出点 M 的坐标, 根据 $k_{MF_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 可得出关于 a, c 的齐次等式, 即可解得该椭圆的离心率的值;

(2) 由 (1) 可得出椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$, 将直线 MN 的方程与椭圆的方程联立, 求出点 M, N 的坐标, 利用三角形的面积公式可求得 c 的值, 即可得出椭圆的方程.

【详解】(1) 解: 将 $x=c$ 代入椭圆的方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 因为直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 易知点

$$M\left(c, \frac{b^2}{a}\right), \text{ 所以, } k_{MN} = k_{MF_1} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} = \frac{b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 所以, } \sqrt{2}b^2 = \sqrt{2}(a^2 - c^2) = ac,$$

$$\text{等式 } \sqrt{2}(a^2 - c^2) = ac \text{ 两边同时除以 } a^2 \text{ 可得 } \sqrt{2}e^2 + e - \sqrt{2} = 0, \text{ 因为 } 0 < e < 1, \text{ 解得 } e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此, 该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 解: 由 (1) 知, $a = \sqrt{2}c$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = c$, 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$,

由题意, 则直线 MN 的方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + c)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2c^2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + c) \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并化简可得 } 5x^2 + 2cx - 7c^2 = 0, \text{ 显然 } \Delta > 0,$$

$$\text{设点 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = c \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}c \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{7c}{5} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{10}c \end{cases}, \text{ 故点 } M\left(c, \frac{\sqrt{2}}{2}c\right), N\left(-\frac{7c}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}c\right),$$

$$\text{所以, } S_{\triangle F_2MN} = \frac{1}{2} \times 2c \times |y_1 - y_2| = \frac{3\sqrt{2}}{5}c^2 = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \text{ 解得 } c = 1, \text{ 因此, 椭圆的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

32. (2023 天津和平 统考一模) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 A 是椭圆与 x 轴负半轴的交点, 点 B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点, 且直线 AB 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知斜率大于 0 的直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M , 过点 A 作直线 l 的平行线交椭圆 C 于点 P , 若 $\triangle MOP$ 的面积为 $\frac{3}{4}$, 求直线 l 的方程. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (2) $y = \frac{\sqrt{13}}{2}x \pm 4$.

【分析】(1) 由题可得直线 AB 的方程, 然后利用直线与圆的位置关系即得;

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m (k > 0)$, 根据椭圆与直线的位置关系可得 $m^2 = 4k^2 + 3$ 及 $M\left(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m}\right)$, 进而可得直线 $AP: y = k(x + 2)$, 结合椭圆方程可得 $P\left(\frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3}\right)$, 然后根据三角形面积结合条件进而即得.

【详解】(1) 设椭圆的半焦距为 c , 由 $e = \frac{1}{2}$, 可得 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$, 则 $A(-2c, 0), B(0, \sqrt{3}c)$,

所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{-2c} + \frac{y}{\sqrt{3}c} = 1$, 即 $\sqrt{3}x - 2y + 2\sqrt{3}c = 0$, 因为直线 AB 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$ 相切,

所以 $\frac{|2\sqrt{3}c|}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{12}{7}}$, 解得 $c = 1, a = 2, b = \sqrt{3}$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m (k > 0)$, $M(x_1, y_1)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0, \text{ 所以 } \Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0, \text{ 可得 } m^2 = 4k^2 + 3,$$

$$\text{所以 } x_1 = -\frac{4km}{4k^2 + 3} = -\frac{4k}{m}, y_1 = k \cdot \left(-\frac{4k}{m}\right) + m = \frac{m^2 - 4k^2}{m} = \frac{3}{m}, \text{ 即 } M\left(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m}\right),$$

所以直线 OM 的方程为 $y = -\frac{3}{4k}x$, 即 $3x + 4ky = 0$, 又 $A(-2, 0)$, 由题可得直线 $AP: y = k(x + 2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } (4k^2 + 3)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \text{ 显然 } \Delta > 0,$$

设 $P(x_2, y_2)$ ，则 $-2x_2 = \frac{16k^2 - 12}{4k^2 + 3}$ ， $x_2 = \frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3}$ ， $y_2 = k \cdot \left(\frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3} + 2 \right) = \frac{12k}{4k^2 + 3}$ ，即 $P\left(\frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3}\right)$ ，

则 P 到直线 OM 距离为 $d = \frac{\left| 3 \cdot \frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3} + 4k \cdot \frac{12k}{4k^2 + 3} \right|}{\sqrt{9 + 16k^2}} = \frac{6}{\sqrt{9 + 16k^2}}$ ，

所以三角形的面积为 $S_{\triangle MOP} = \frac{1}{2} |OM| d = \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{4k}{m}\right)^2 + \left(\frac{3}{m}\right)^2} \cdot \frac{6}{\sqrt{9 + 16k^2}} = \frac{3}{|m|} = \frac{3}{4}$ ，所以 $|m| = 4$ ， $m^2 = 4k^2 + 3 = 16$ ，又

$k > 0$ ，所以 $k = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $m = \pm 4$ ，所以直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{13}}{2}x \pm 4$ 。

33. (2023 天津 校联考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，且满足

$$a_1 + a_2 = b_2, \quad a_2 + a_3 = b_3, \quad a_4 + a_5 = b_4.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k b_k$ ；

(3) 令 $c_n = \frac{a_{n+2} b_{n+2}}{(a_n b_n + 1)(a_{n+1} b_{n+1} + 1)} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求证：对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $1 < S_n < \frac{4}{3}$ 。

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$ ， $b_n = 2^n$ (2) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k b_k = \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{18}\right)4^{n+1}$ (3) 证明见解析

【分析】(1) 利用等差数列，等比数列的通项公式可得到结果；

(2) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k b_k$ 可转化为等差乘等比类型，利用错位相减法可解；(3) 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可利用裂项相消，然后用放缩可证。

【详解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 1)$ ，则 $a_n = 1 + (n - 1)d$ ， $b_n = b_1 q^{n-1}$ 。

由题意知， $b_3^2 = b_2 b_4 = (a_2 + a_3)^2 = (a_1 + a_2)(a_4 + a_5)$ ，

所以 $(2 + 3d)^2 = (2 + d)(2 + 7d)$ ，解之得 $d = 2$ ， $d = 0$ ，

当 $d = 0$ 时， $a_n = 1$ ，则 $b_2 = a_1 + a_2 = 2$ ， $b_3 = a_2 + a_3 = 2$ ，即 $q = \frac{b_3}{b_2} = 1$ 与 $q \neq 1$ 矛盾，故舍去；

当 $d = 2$ 时， $a_n = 2n - 1$ ，则 $b_2 = a_1 + a_2 = 4$ ， $b_3 = a_2 + a_3 = 8$ ，

所以 $q = \frac{b_3}{b_2} = 2$ ， $b_1 = \frac{b_2}{q} = 2$ ，满足题意；所以 $a_n = 2n - 1$ ， $b_n = 2^n$ 。

(2) 设 $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k b_k = (-a_1 b_1) + a_2 b_2 + (-a_3 b_3) + a_4 b_4 + \cdots + a_{2n} b_{2n}$ ，

$$T_n = (-a_1 b_1) + a_2 b_2 + (-a_3 b_3) + a_4 b_4 + \cdots + a_{2n} b_{2n},$$

设 $t_n = a_{2n} b_{2n} - a_{2n-1} b_{2n-1} = (4n - 1)2^{2n} - (4n - 3)2^{2n-1} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)4^n$ ，

则 $T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{5}{2} \times 4 + \frac{9}{2} \times 4^2 + \cdots + \left(2n + \frac{1}{2}\right)4^n$ ， $4T_n = \frac{5}{2} \times 4^2 + \frac{9}{2} \times 4^3 + \cdots + \left(2n + \frac{1}{2}\right)4^{n+1}$ ，

两式相减得 $3T_n = -10 - 2 \times 4^2 - 2 \times 4^3 - \dots - (-2) \times 4^n + \left(2n + \frac{1}{2}\right) 4^{n+1}$,

所以 $T_n = \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{18}\right) 4^{n+1}$, 即 $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k b_k = \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{18}\right) 4^{n+1}$.

(3) 证明: $c_n = \frac{a_{n+2} b_{n+2}}{(a_n b_n + 1)(a_{n+1} b_{n+1} + 1)} = \frac{(2n+3)2^{n+2}}{((2n-1)2^n + 1)((2n+1)2^{n+1} + 1)} = 4 \left(\frac{1}{(2n-1)2^n + 1} - \frac{1}{(2n+1)2^{n+1} + 1} \right)$,

$S_n = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^n + 1} - \frac{1}{(2n+1)2^{n+1} + 1} \right)$, $S_n = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)2^{n+1} + 1} \right)$,

因为 $n \in \mathbf{N}^+$, 易知 S_n 随着 n 的增大而增大, 所以 $S_n > S_1 = \frac{40}{39} > 1$, $S_n < \frac{4}{3}$, 所以 $1 < S_n < \frac{4}{3}$.

【点睛】方法点睛:

求数列前 n 项和常见的方法:

公式法: 适用于等差数列、等比数列以及其他特殊数列.

分组求和法: 在直接运用公式法求和有困难时, 常将“和式”中“同类项”先合并在一起, 再运用公式法求和.

倒序相加法: 若和式中到首尾距离相等的两项和有其共性或数列的通项与组合数相关联, 则常可考虑选用倒序相加法, 发挥其共性的作用求和 (这也是等差数列前 n 项公式的推导方法).

错位相减法: 如果数列的通项是由一个等差数列的通项与一个等比数列的通项相乘构成, 那么常选用错位相减法 (这也是等比数列前 n 项公式的推导方法).

裂项相消法: 如果数列的通项可“分裂成两项差”的形式, 且相邻项分裂后相关联, 那么常选用裂项相消法求和. 常用

裂项形式有: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$; $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$;

$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

通项转换法: 先对通项进行变形, 发现其内在特征, 再运用分组求和法求和.

34. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$, $n \in \mathbf{N}^+$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+2}}{a_i \cdot a_{i+1}}$;

(3) 若 $b_n = \frac{a_n}{n}$, 抽去数列 $\{b_n\}$ 中的第 1 项, 第 4 项, 第 7 项, ……第 $3n-2$ 项, ……余下的项顺序不变, 组成一个

新数列 $\{c_n\}$, 若 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 当 n 为奇数时, $\frac{12}{5} < \frac{T_{n+1}}{T_n} \leq 3$.

【答案】(1) $a_n = n \cdot 2^n$ (2) $2 - \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$ (3) 证明见解析

【分析】(1) 利用已知得出 $S_{n-1} = (n-2)2^n + 2 (n \geq 2)$, 两式相减即可得出 $a_n = n \cdot 2^n$, 再检验 $n=1$ 时是否成立, 即可

得出答案. (2) 化简 $\frac{a_{i+2}}{a_i a_{i+1}}$, 然后利用裂项相消法求和即可.

(3) 根据题意判断出数列 $\{c_n\}$ 奇数项和偶数项各自成等比数列, 按照 n 为奇数, 表示出 $\frac{T_{n+1}}{T_n}$, 即可得出结论.

【详解】(1) 由 $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ ，得 $a_1 = 2$ ， $S_{n-1} = (n-2)2^n + 2 (n > 2)$ ，两式相减得 $a_n = n \cdot 2^n$ ，

当 $n=1$ 时，代入上式，求得 $a_1 = 2$ ，所以 $a_n = n \cdot 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

$$(2) \text{ 由(1)知, } a_n = n \cdot 2^n (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 则 } \frac{a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{(n+2)2^{n+2}}{n2^n (n+1)2^{n+1}} = 4 \left[\frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right],$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+2}}{a_i \cdot a_{i+1}} &= \frac{a_3}{a_1 a_2} + \frac{a_4}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = 4 \left[\frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \cdots + \frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right] \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right] = 2 - \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}. \end{aligned}$$

(3) 由题知， $b_n = \frac{a_n}{n} = 2^n$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 为 $2^2, 2^3, 2^5, 2^6, 2^8, 2^9, \cdots$ ，

它的奇数项组成以 4 为首项，公比为 8 的等比数列；

偶数项组成以 8 为首项，公比为 8 的等比数列；

$\therefore$ 当 n 为奇数，即 $n = 2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，

$$T_n = (c_1 + c_3 + \cdots + c_{2k-1}) + (c_2 + c_4 + \cdots + c_{2k-2}) = \frac{4(1-8^k)}{1-8} + \frac{8(1-8^{k-1})}{1-8} = \frac{5}{7} \times 8^k - \frac{12}{7},$$

$$T_{n+1} = T_n + c_{n+1} = \frac{5}{7} \times 8^k - \frac{12}{7} + 2^{3k} = \frac{12}{7} \times 8^k - \frac{12}{7},$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{12 \times 8^k - 12}{5 \times 8^k - 12} = \frac{12}{5} + \frac{84}{5(5 \times 8^k - 12)}, \quad \because 5 \times 8^k - 12 \geq 28, \quad \therefore \frac{12}{5} < \frac{T_{n+1}}{T_n} \leq 3.$$

35. (2023 天津河西 统考一模) 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，其前 7 项的和为 $\frac{49}{2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，

$b_1 = \frac{1}{2}, b_3 - b_2 = -\frac{1}{8}$. (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2) 令 $c_n = \frac{1}{b_{2n}} + b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 的通项公式；

(3) 求 $\sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] \cdot (c_k^2 - c_{2k})$ 。

$$\text{【答案】(1) } a_n = \frac{2n-1}{2} (n \in \mathbf{N}^*), \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*) \quad (2) c_n^2 - c_{2n} = 2^{n+1} \quad (3) \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}$$

【分析】(1) 应用等差数列前 n 项和公式、等比数列通项公式求基本量，进而写出通项公式；

(2) 由 (1) 得 $c_n = 2^{2n} + \frac{1}{2^n}$ ，即可得 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 的通项公式；

(3) 由 $\sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] \cdot (c_k^2 - c_{2k}) = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$ ，利用错位相减法及等比数列前 n 项和公式求 $\sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$ ，即可得结果。

【详解】(1) 由数列 $\{a_n\}$ 是公差 d 为 1 的等差数列，其前 7 项的和为 $\frac{49}{2}$ ，

$$\text{所以 } 7a_1 + \frac{1}{2} \times 7 \times 6d = \frac{49}{2}, \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{1}{2} + (n-1) = \frac{2n-1}{2} (n \in \mathbf{N}^*);$$

由数列 $\{b_n\}$ 是等比数列， $b_1 = \frac{1}{2}$ ， $b_3 - b_2 = -\frac{1}{8}$ ，得 $4q^2 - 4q = -1$ ，解得 $q = \frac{1}{2}$ ，

所以 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n \in \mathbb{N}^+)$.

(2) 因为 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以 $c_n = \frac{1}{b_{2n}} + b_n = 2^{2n} + \frac{1}{2^n}$, 所以 $c_n^2 - c_{2n} = \left(2^{2n} + \frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(2^{4n} + \frac{1}{2^{2n}}\right) = 2^{n+1}$.

(3) 因为 $[a_{2k} - (-1)^{2k-1}a_{2k-1}] \cdot (c_{2k-1}^2 - c_{2(2k-1)}) + [a_{2k+1} - (-1)^{2k}a_{2k}] \cdot (c_{2k}^2 - c_{2(2k)}) = k \cdot 4^{k+1}$,

所以 $\sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] \cdot (c_k^2 - c_{2k}) = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$, 设 $T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$, 则 $T_n = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + \cdots + n \times 4^{n+1}$ ①,

所以 $4T_n = 1 \times 4^3 + 2 \times 4^4 + \cdots + n \times 4^{n+2}$ ②, ①-②, 得:

$$-3T_n = (4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n+1}) - n \cdot 4^{n+2} = \frac{4^2(1-4^n)}{1-4} - n \cdot 4^{n+2} = \frac{(1-3n)4^{n+2} - 16}{3},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}, \text{ 即 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] \cdot (c_k^2 - c_{2k}) = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}.$$

36. (2023 天津 校联考一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 若椭圆的短轴长为 $2\sqrt{3}$ 且经过点 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, 过点 $T(\sqrt{3}, 0)$ 的直线交椭圆于 P, Q 两点.

(1) 求椭圆方程; (2) 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值, 并求此时直线 PQ 的方程;

(3) 若直线 PQ 与 x 轴不垂直, 在 x 轴上是否存在点 $S(s, 0)$ 使得 $\angle PST = \angle QST$ 恒成立? 若存在, 求出 s 的值; 若不存在, 说明理由. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\triangle OPQ$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 此时直线 PQ 的方程为 $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 3 = 0$ 或 $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y - 3 = 0$;

(3) 存在, $s = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 理由见解析

【分析】(1) 由短轴长求出 $b = \sqrt{3}$, 将 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程求出 $a^2 = 4$, 得到答案;

(2) 直线 PQ 的斜率为 0 时, 此时 O, P, Q 三点共线, 舍去, 当直线 PQ 的斜率不为 0 时, 设出直线 PQ 的方程为

$x = ty + \sqrt{3}$, 联立椭圆方程, 得到两根之和, 两根之积, 表达出 $\triangle OPQ$ 的面积为 $6 \sqrt{\frac{1}{(3t^2+1) + \frac{9}{3t^2+1} + 6}}$, 利用基本

不等式求出最值, 并得到此时直线 PQ 的方程;

(3) 由角相等得到 $k_{PS} + k_{QS} = 0$, 转化为 $2ty_1y_2 + (\sqrt{3}-s)(y_1+y_2) = 0$, 在第二问的基础上, 代入化简得到答案.

【详解】(1) 由题意得 $2b = 2\sqrt{3}$, 解得 $b = \sqrt{3}$, 将 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程, 得到 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 故 $a^2 = 4$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 当直线 PQ 的斜率为 0 时, 此时 O, P, Q 三点共线, 不合要求, 舍去;

当直线 PQ 的斜率不为 0 时, 设直线 PQ 的方程为 $x = ty + \sqrt{3}$,

与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 得 $(3t^2 + 4)y^2 + 6\sqrt{3}ty - 3 = 0$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{6\sqrt{3}t}{3t^2 + 4}, y_1y_2 = -\frac{3}{3t^2 + 4}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle OPQ} &= \frac{1}{2} |OP| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(-\frac{6\sqrt{3}t}{3t^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{3t^2 + 4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{108t^2}{(3t^2 + 4)^2} + \frac{12}{3t^2 + 4}} = 6 \sqrt{\frac{3t^2 + 1}{[(3t^2 + 1) + 3]^2}} = 6 \sqrt{\frac{3t^2 + 1}{(3t^2 + 1)^2 + 6(3t^2 + 1) + 9}} \\ &= 6 \sqrt{\frac{1}{(3t^2 + 1) + \frac{9}{3t^2 + 1} + 6}} \leq 6 \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{(3t^2 + 1) \cdot \frac{9}{3t^2 + 1}} + 6}} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $3t^2 + 1 = \frac{9}{3t^2 + 1}$, 即 $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, 等号成立,

故 $\triangle OPQ$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 此时直线 PQ 的方程为 $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 3 = 0$ 或 $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y - 3 = 0$;

(3) 在 x 轴上存在点 $S\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 使得 $\angle PST = \angle QST$ 恒成立, 理由如下: 因为 $\angle PST = \angle QST$, 所以 $k_{PS} + k_{QS} = 0$,

即 $\frac{y_1}{x_1 - s} + \frac{y_2}{x_2 - s} = 0$, 整理得 $(x_2 - s)y_1 + (x_1 - s)y_2 = 0$, 即 $(ty_2 + \sqrt{3})y_1 + (ty_1 + \sqrt{3})y_2 - s(y_1 + y_2) = 0$,

所以 $2ty_1y_2 + (\sqrt{3} - s)(y_1 + y_2) = 0$, 则 $2t\left(-\frac{3}{3t^2 + 4}\right) + (\sqrt{3} - s)\left(-\frac{6\sqrt{3}t}{3t^2 + 4}\right) = 0$, 解得 $s = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故在 x 轴上存在点 $S\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, 使得 $\angle PST = \angle QST$ 恒成立.

【点睛】处理定点问题的思路:

(1) 确定题目中的核心变量 (此处设为 k),

(2) 利用条件找到 k 与过定点的曲线 $F(x, y) = 0$ 的联系, 得到有关 k 与 x, y 的等式,

(3) 所谓定点, 是指存在一个特殊的点 (x_0, y_0) , 使得无论 k 的值如何变化, 等式恒成立, 此时要将关于 k 与 x, y 的等式进行变形, 直至找到 (x_0, y_0) ,

①若等式的形式为整式, 则考虑将含 k 的式子归为一组, 变形为“ $k \cdot (\quad)$ ”的形式, 让括号中式子等于 0, 求出定点;

②若等式的形式是分式, 一方面可考虑让分子等于 0, 一方面考虑分子和分母为倍数关系, 可消去 k 变为常数.

37. (2023 天津河北 统考一模) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $n \in \mathbf{N}^*$, 若 $a_1 = -2$, 且 S_{n+2} 、 S_n 、 S_{n+1} 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $b_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $n \in \mathbf{N}^*$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 10 项

的和; (3) 设 $c_n = (2n-1)a_{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = (-2)^n$ (2) 3186 (3) $T_n = \frac{(6n-5) \times 4^{n+1} + 20}{9}$

【分析】(1) 由 S_{n+2} 、 S_n 、 S_{n+1} 成等差数列可求出数列 $\{a_n\}$ 的公比，结合 a_1 的值可求得等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求出 $b_{2k-1} = k$ ， $b_{2k} = k$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，即可求得数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 10 项的和；

(3) 求得 $c_n = (2n-1) \cdot 4^n$ ，利用错位相减法可求得 T_n 。

【详解】(1) 解：因为 S_{n+2} 、 S_n 、 S_{n+1} 成等差数列，则 $S_{n+1} + S_{n+2} = 2S_n$ ，

即 $(S_{n+2} - S_n) + (S_{n+1} - S_n) = 0$ ，即 $a_{n+2} + a_{n+1} + a_{n+1} = 0$ ，即 $a_{n+2} = -2a_{n+1}$ ，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $q = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = -2$ ，

又因为 $a_1 = -2$ ，则 $a_n = a_1 q^{n-1} = (-2)^n$ 。

(2) 解：依题意，对任意的 $k \in \mathbf{N}^*$ ， $b_{2k-1} = \left\lfloor \frac{2k-1+1}{2} \right\rfloor = k$ ， $b_{2k} = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k$ ，

设数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 10 项的和为 A ，

$$\text{则 } A = (a_1 b_1 + a_3 b_3 + \cdots + a_9 b_9) + (a_2 b_2 + a_4 b_4 + \cdots + a_{10} b_{10}) = (a_1 + 2a_3 + \cdots + 5a_9) + (a_2 + 2a_4 + \cdots + 5a_{10})$$

$$= (a_1 + 2a_3 + \cdots + 5a_9) - 2(a_1 + 2a_3 + \cdots + 5a_9)$$

$$= -(a_1 + 2a_3 + \cdots + 5a_9) = 1 \times 2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 5 \times 2^9 = 2 + 16 + 96 + 512 + 2560 = 3186。$$

(3) 解：由 (1) 可得 $c_n = (2n-1)a_{2n} = (2n-1) \cdot 4^n$ ，所以， $T_n = 1 \times 4 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \cdots + (2n-1) \times 4^n$ ，

$4T_n = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \cdots + (2n-3) \times 4^n + (2n-1) \times 4^{n+1}$ ，上述两个等式作差可得

$$-3T_n = 4 + 2 \times (4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n) - (2n-1) \times 4^{n+1}$$

$$= 4 + \frac{2 \times 4^2 (1 - 4^{n-1})}{1 - 4} - (2n-1) \times 4^{n+1} = -\frac{20}{3} + \left(\frac{5}{3} - 2n\right) \times 4^{n+1}，化简得 T_n = \frac{(6n-5) \times 4^{n+1} + 20}{9}。$$

38. (2023 天津 校联考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2$ ，其前 8 项的和为 64；数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数

列， $b_1 = 3$ ， $b_3 - b_2 = 18$ 。(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2) 记 $c_n = \frac{a_{n+2} - 1}{a_n a_{n+1} b_n}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ；

$$(3) \text{ 记 } d_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot a_n, n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ \frac{a_n + 1}{\frac{b_n}{2}}, n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \end{cases}, \text{ 求 } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} d_k。$$

【答案】(1) $a_n = 2n-1$ ， $b_n = 3^n$ (2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1) \cdot 3^n}$

$$(3) S_{2n} = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) - 2n+1, n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) + 2n, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

【分析】(1) 根据条件得到等差数列的公差，利用前 n 项和公式，求出首项，得到通项公式，设出公比，得到方程，求出公比，写成通项公式；

(2) 写出 $\{c_n\}$ 的通项公式，利用裂项相消法求和；

(3) 方法一：变形得到 $S_{2n} = (d_2 + d_4 + d_6 + \cdots + d_{2n}) + (d_1 + d_3 + d_5 + \cdots + d_{2n-1})$ ，其中 $d_2 + d_4 + d_6 + \cdots + d_{2n}$ 利用错位相减法求和， $d_1 + d_3 + d_5 + \cdots + d_{2n-1}$ 分 n 为偶数和 n 为奇数两种情况求解，最终求出 S_{2n} ；

方法二：变形后， $d_2 + d_4 + d_6 + \cdots + d_{2n}$ 利用裂项相消法求和， $d_1 + d_3 + d_5 + \cdots + d_{2n-1}$ 分 n 为偶数和 n 为奇数两种情况求解，最终求出 S_{2n} 。

【详解】(1) $\because a_{n+1} - a_n = 2$ ， $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d = 2$ 等差数列，且 $S_8 = 64$ ，

$$\therefore 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 2 = 64，解得 a_1 = 1，\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1；$$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)， $\because b_1 = 3$ ， $b_3 - b_2 = 18$ ， $\therefore 3q^2 - 3q = 18$ ，即 $q^2 - q - 6 = 0$ ，

解得 $q = -2$ (舍去) 或 $q = 3$ ， $\therefore b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

$$(2) 由 (1) 得 c_n = \frac{a_{n+2} - 1}{a_n a_{n+1} b_n} = \frac{2(n+2) - 2}{(2n-1)(2n+1) \cdot 3^n}$$

$$= \frac{2n+2}{(2n-1)(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1)3^n} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{3 \times 3^1} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 3^1} - \frac{1}{5 \times 3^2} \right) + \left(\frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1) \cdot 3^n} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1) \cdot 3^n}，$$

(3) 方法一：

$$\because d_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot a_n, n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{a_n + 1}{2}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{b_n}{2} \end{cases}，\therefore S_{2n} = (d_2 + d_4 + d_6 + \cdots + d_{2n}) + (d_1 + d_3 + d_5 + \cdots + d_{2n-1})$$

$$= \left[\frac{a_1 + 1}{b_1} + \frac{a_2 + 1}{b_2} + \frac{a_3 + 1}{b_3} + \cdots + \frac{a_n + 1}{b_n} \right] + \left[-a_1 + a_3 - a_5 + \cdots + (-1)^n \cdot a_{2n-1} \right]$$

$$= \left[\frac{2}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \cdots + \frac{2n}{3^n} \right] + \left[-1 + 5 - 9 + 13 \cdots + (-1)^n \cdot (4n-3) \right]$$

$$= P_n + Q_n$$

$$\therefore P_n = \frac{2}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \cdots + \frac{2n}{3^n} \quad ①$$

$$\therefore \frac{1}{3} P_n = \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} + \cdots + \frac{2n-2}{3^n} + \frac{2n}{3^{n+1}} \quad ②$$

两式相减得，

$$\frac{2}{3} P_n = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2n}{3^{n+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}},$$

$$\therefore P_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2 \cdot 3^n},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } Q_n = \left[-1 + 5 - 9 + 13 \cdots + (-1)^n \cdot a_{2n-1} \right]$$

$$= (-1+5) + (-9+13) + \cdots + \left[-(4n-7) + (4n-3) \right] = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times \frac{n}{2} = 2n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } Q_n = 4 + 4 + \cdots + 4 - (4n-3) = 4 \times \frac{n-1}{2} - (4n-3) = -2n+1$$

$$\therefore Q_n = \begin{cases} -2n+1, n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2n, n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases},$$

$$\therefore S_{2n} = P_n + Q_n = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) - 2n+1, n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) + 2n, n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

$$\text{方法二: } d_n = \begin{cases} \frac{a_n+1}{2}, n \text{ 为偶数} \\ b_{\frac{n}{2}} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot a_n, n \text{ 为奇数} \end{cases} = \begin{cases} \frac{a_k+1}{b_k}, n=2k \\ (-1)^k \cdot a_{2k-1}, n=2k-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2k}{3^k}, n=2k \\ (-1)^k \cdot (4k-3), n=2k-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{2k+1}{3^{k-1}} - \frac{2k+3}{3^k} \right), n=2k \\ (-1)^k \cdot (4k-3), n=2k-1 \end{cases}$$

$$\therefore P_n = (d_2 + d_4 + d_6 + \cdots + d_{2n}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{3^0} - \frac{5}{3^1} \right) + \left(\frac{5}{3^1} - \frac{7}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{2n+1}{3^{n-1}} - \frac{2n+3}{3^n} \right) \right] = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2 \cdot 3^n} \text{ 当 } n \text{ 为偶数时,}$$

$$Q_n = \left[-1 + 5 - 9 + 13 \cdots + (-1)^n \cdot a_{2n-1} \right]$$

$$= (-1+5) + (-9+13) + \cdots + \left[-(4n-7) + (4n-3) \right] = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times \frac{n}{2} = 2n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } Q_n = 4 + 4 + \cdots + 4 - (4n-3) = 4 \times \frac{n-1}{2} - (4n-3) = -2n+1$$

$$\therefore Q_n = \begin{cases} -2n+1, n=2k-1, k \in \mathbb{N}^+ \\ 2n, n=2k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases},$$

$$\therefore S_{2n} = P_n + Q_n = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) - 2n+1, n=2k-1, k \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right) + 2n, n=2k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}.$$

【点睛】方法点睛：常见的裂项相消法求和类型：

$$\text{分式型：} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right), \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

等；

$$\text{指数型：} \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}, \quad \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \text{等},$$

$$\text{根式型：} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) \text{等},$$

$$\text{对数型：} \log_m \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_m a_{n+1} - \log_m a_n, \quad m > 0 \text{ 且 } m \neq 1;$$

39. (2023 天津南开 统考一模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 前 n 项和为 S_n , 单调递增的等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为

2, 且满足 $b_2 + S_2 = 7, b_3 + S_3 = 14$. (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 证明: $3S_n = a_n S_{n+1} - (a_n - 1)S_n (n \in \mathbb{N}^+)$;

(3) 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{T_i S_i}{b_i} < \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

【分析】(1) 根据条件, 列出关于 q, d 的方程组, 即可求解;

(2) 根据数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系, 集合等差数列的通项公式, 即可证明;

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

(3) 首先化简并放缩不等式, $\frac{T_i S_i}{b_i} < i(i+1) = \frac{1}{3} [i(i+1)(i+2) - (i-1)i(i+1)]$, 再利用裂项相消求和, 即可证明.

【详解】(1) 由题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 1)$,

$$\text{因为 } b_2 + S_2 = 7, b_3 + S_3 = 14, \text{ 所以 } \begin{cases} 2q + d + 2 = 7, \\ 2q^2 + 3d + 3 = 14, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2q + d = 5, \\ 2q^2 + 3d = 11. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} q=1, \\ d=3 \end{cases} \text{ (舍去), 或 } \begin{cases} q=2, \\ d=1, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = n, b_n = 2^n.$$

(2) 由 (1) 知 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $a_n S_{n+1} - (a_n - 1)S_n = a_n (S_n + a_{n+1}) - (a_n - 1)S_n = S_n + a_n a_{n+1} = S_n + n(n+1) = 3S_n$.

(3) 由 (1) 知 $T_n = \frac{2 \cdot (1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

$$\text{所以 } \frac{T_i S_i}{b_i} = \frac{(2^{i+1}-1) \cdot \frac{i(i+1)}{2}}{2^i} = \frac{(2^{i+1}-1) \cdot i(i+1)}{2^{i+1}} < i(i+1)$$

$$= \frac{1}{3} [i(i+1)(i+2) - (i-1)i(i+1)]$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{T_i S_i}{b_i} < \frac{1}{3} [1 \cdot (1+1)(1+2) - (1-1) \cdot 1 \cdot (1+1)] + \frac{1}{3} [2 \cdot (2+1)(2+2) - (2-1) \cdot 2 \cdot (2+1)]$$

$$+ \cdots + \frac{1}{3} [(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n] + \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)] < \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

$$\text{即 } \sum_{i=1}^n \frac{T_i S_i}{b_i} < \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

40. (2023 天津·大港一中校联考一模) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{a_n + 1}{S_{2n-1} \cdot S_{2n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的取值范围;

(3) 若 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n + 1), n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$, 从数列 $\{c_n\}$ 中抽出部分项 (奇数项与偶数项均不少于两项), 将抽出的项

按照某一顺序排列后构成等差数列. 当等差数列的项数最大时, 求所有满足条件的等差数列.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$ (2) $T_n = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right]; \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{4} \right)$ (3) 1, 2, 3, 4, 5 和 5, 4, 3, 2, 1.

【分析】(1) 利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 由 (1) 求得 S_n 的表达式, 然后利用裂项求和法求得 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 利用差比较法证得数列 $\{T_n\}$ 递增, 进而求得 T_n 的取值范围.

(3) 先判断出数列 $\{c_n\}$ 的奇数项均为奇数, 偶数项均为偶数. 然后假设抽出的数列中有三个偶数, 推出矛盾, 由此证得偶数只有两项. 进而证得奇数最多有 3 项. 由此求得所有满足条件的等差数列.

【详解】(1) 当 $n=1$ 时, 由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n - 1$, 得 $a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 - 1$, 得 $a_1 = 1$,

由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n - 1$, 得 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} - 1$, 两式相减, 得

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n = 4a_{n+1}, \text{ 即 } a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2(a_{n+1} + a_n) = 0, \text{ 即 } (a_{n+1} - a_n - 2)(a_{n+1} + a_n) = 0$$

因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 所以 $a_{n+1} + a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.

因此, $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$, 即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

(2) 由(1)知 $a_n = 2n - 1$, 所以 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$

$$\text{所以 } b_n = \frac{a_n + 1}{S_{2n-1} \cdot S_{2n+1}} = \frac{2n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{2}{1^2 \times 3^2} + \frac{4}{3^2 \times 5^2} + \frac{6}{5^2 \times 7^2} + \cdots + \frac{2n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{令 } f(n) = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ 则 } f(n+1) - f(n) = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+3)^2} = \frac{8(n+1)}{(2n+3)^2(2n+1)^2} > 0$$

所以 $f(n)$ 是单调递增数列, 数列 $\{T_n\}$ 递增,

$$\text{所以 } T_n > T_1 = \frac{2}{9}, \text{ 又 } T_n < \frac{1}{4}, \text{ 所以 } T_n \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{4} \right).$$

$$(3) \quad c_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ \frac{n}{2^2}, & n = 2k \end{cases}$$

设奇数项取了 s 项, 偶数项取了 k 项, 其中 $s, k \in \mathbf{N}^+, s \geq 2, k \geq 2$.

因为数列 $\{c_n\}$ 的奇数项均为奇数, 偶数项均为偶数, 因此, 若抽出的项按照某种顺序构成等差数列, 则该数列中相邻的项必定一个是奇数, 一个是偶数.

假设抽出的数列中有三个偶数, 则每两个相邻偶数的等差中项为奇数.

设抽出的三个偶数从小到大依次为 $2^i, 2^j, 2^p (1 \leq i < j < p)$,

$$\text{则 } \frac{2^i + 2^j}{2} = 2^{i-1} + 2^{j-1} \text{ 为奇数, 而 } i \geq 1, j \geq 2, \text{ 则 } 2^{j-1} \text{ 为偶数, } 2^{i-1} \text{ 为奇数, 所以 } i = 1.$$

$$\text{又 } \frac{2^j + 2^p}{2} = 2^{j-1} + 2^{p-1} \text{ 为奇数, 而 } j \geq 2, p \geq 3, \text{ 则 } 2^{j-1} \text{ 与 } 2^{p-1} \text{ 均为偶数, 矛盾.}$$

又因为 $k \geq 2$, 所以 $k = 2$, 即偶数只有两项,

则奇数最多有 3 项, 即 $s + k$ 的最大值为 5.

设此等差数列为 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , 则 d_1, d_3, d_5 为奇数, d_2, d_4 为偶数, 且 $d_2 = 2$.

$$\text{由 } d_1 + d_3 = 2d_2 = 4, \text{ 得 } d_1 = 1, d_3 = 3, \text{ 此数列为 } 1, 2, 3, 4, 5.$$

同理, 若从大到小排列, 此数列为 5, 4, 3, 2, 1.

综上, 当等差数列的项数最大时, 满足条件的数列为 1, 2, 3, 4, 5 和 5, 4, 3, 2, 1.

【点睛】本小题主要考查已知 S_n 求 a_n , 考查裂项求和法, 考查数列单调性, 考查化归与转化的数学思想方法, 综合性较强, 属于难题.

41. (2023 天津红桥 统考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项的和为 64. 数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1 = 3$, $b_3 - b_2 = 18$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = (-1)^n a_n^2, n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;

(3) 记 $d_n = \frac{a_{n+2} - 1}{a_n a_{n+1} b_n}, n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3^n$ (2) $S_{2n} = 8n^2$ (3) $T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1) \cdot 3^n}$

【分析】(1) 设等差数列的首项为 a_1 , 利用等差数列的前 n 项和公式求出 a_1 , 进而求出等差数列的通项公式; 设等比数列的公比为 q , 利用通项公式和已知条件求出 q , 进而求出等比数列的通项公式;

(2) 先求出 $c_{2n-1} + c_{2n} = 16n - 8$, 再利用分组求和法和等差数列的求和公式进行求解;

(3) 先得到 $d_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right]$, 再利用裂项抵消法进行求和.

【详解】(1) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 且 $S_8 = 64$, 所以 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 2 = 64$, 解得 $a_1 = 1$,

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$; 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$), 因为 $b_1 = 3$, $b_3 - b_2 = 18$,

所以 $3q^2 - 3q = 18$, 即 $q^2 - q - 6 = 0$, 解得 $q = -2$ (舍去) 或 $q = 3$, 所以 $b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$.

(2) 由 (1) 得 $c_n = (-1)^n a_n^2 = (-1)^n \cdot (2n-1)^2$,

则 $c_{2n-1} + c_{2n} = (-1)^{2n-1} \cdot [2(2n-1) - 1]^2 + (-1)^{2n} \cdot (4n-1)^2 = -(-1)^{2n} \cdot (4n-3)^2 + (-1)^{2n} \cdot (4n-1)^2$

$= (4n-1)^2 - (4n-3)^2 = 16n - 8$,

则 $S_{2n} = (c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \cdots + (c_{2n-1} + c_{2n}) = 8[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] = 8 \times \frac{n[1 + (2n-1)]}{2} = 8n^2$

(3) 由 (1) 得 $d_n = \frac{a_{n+2} - 1}{a_n a_{n+1} b_n} = \frac{2(n+2) - 2}{(2n-1)(2n+1) \cdot 3^n}$

$= \frac{2n+2}{(2n-1)(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right]$,

则 $T_n = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n$

$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{3 \times 3^1} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 3^1} - \frac{1}{5 \times 3^2} \right) + \left(\frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1) \cdot 3^n}$,

42. (2023 天津河东 一模) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $b_1 = -a_1 = a_3 - b_2 = a_4 - b_3 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n ，求证： $2^{\frac{s_n}{n}} = b_{n-1}$ ；(3) 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}$ 。

【答案】(1) $a_n = 2n - 3$ ， $b_n = 2^{n-1}$ (2) 证明见解析 (3) $2^n - 2n - 1$

【详解】(1) 设 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， $b_n = b_1 q^{n-1}$ ， $q > 0$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 由已知 $a_1 = -1$ ， $b_1 = 1$ ，

$$\begin{cases} 2d - q = 2 \\ 3d - q^2 = 2 \end{cases}, \text{ 解为 } q = d = 2, \quad a_n = 2n - 3, \quad b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由已知 $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = n(n-2)$ 左式 $2^{\frac{s_n}{n}} = 2^{n-2}$ ，右式 $b_{n-1} = 2^{n-1-1} = 2^{n-2}$ ， $\therefore 2^{\frac{s_n}{n}} = b_{n-1}$ 。

(3) 由已知 $T_n = \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1$ ，

$$T_n = (-1) \times 2^{n-1} + 1 \times 2^{n-2} + \cdots + (2n-5) \times 2^1 + (2n-3) \times 2^0 \quad ①$$

$$2T_n = (-1) \times 2^n + 1 \times 2^{n-1} + \cdots + (2n-5) \times 2^2 + (2n-3) \times 2^1 \quad ②$$

$$② - ① \text{ 为 } T_n = (-1) \times 2^n + 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 - (2n-3) \times 2^0,$$

$$T_n = 4 \times \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} - (2n-3) \times 2^0 = 2^n - 2n - 1.$$

43. (2023 天津 统考一模) 在公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中， s_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知

$a_2 = b_1 = 3$, $S_9 = b_4$ ，且 a_2 是 a_1 与 a_5 的等比中项. (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n ；(3) 求 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k \cdot a_{k+1}}$ 。

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$ ， $b_n = 3^n$ (2) $T_n = 3 + (n-1) \times 3^{n+1}$ (3) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{2n+2}{2n+1}, n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

【分析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $\{b_n\}$ 的公比为 q ，由题意可得 $9 = (3-d)(3+3d)$ ，求得 $d = 2$ ， $a_1 = 1$ ，即可求得 $\{a_n\}$

的通项公式，接着可得 $b_4 = S_9 = 3 \times q^3 = 81$ ，算出 $q = 3$ 即可；

(2) 利用错位相减法求解即可；

(3) 化简 $(-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k a_{k+1}} = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right)$ ，然后分 n 为偶数和 n 为奇数进行求和即可

【详解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $\{b_n\}$ 的公比为 q ，由题意

$$a_2^2 = a_1 a_5, \text{ 即 } 9 = (3-d)(3+3d), \quad \therefore d \neq 0, \text{ 解得 } d = 2, \quad \therefore a_1 = 1, \quad \therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

$$\therefore S_9 = 9 + \frac{9 \times 8}{2} \times 2 = 81, \quad \therefore b_4 = 3 \times q^3 = 81, \quad \therefore q = 3 \quad \therefore b_n = 3^n.$$

$$(2) \quad a_n \cdot b_n = (2n-1) \times 3^n$$

$$\therefore T_n = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-3) \times 3^{n-1} + (2n-1) \times 3^n \quad ①$$

$$\therefore 3T_n = 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \cdots + (2n-3) \times 3^n + (2n-1) \times 3^{n+1} \quad ②$$

①-②得

$$-2T_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + \cdots + 2 \times 3^n - (2n-1) \times 3^{n+1}$$

$$= 3 + 2 \times \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \times 3^{n+1} = -6 - (2n-2) \times 3^{n+1}$$

$$\therefore T_n = 3 + (n-1) \times 3^{n+1}.$$

$$(3) \quad (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k a_{k+1}} = (-1)^{k-1} \frac{4k}{(2k-1)(2k+1)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right)$$

当 n 为偶数时,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

当 n 为奇数时,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \cdots - \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{4k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

44. (2023 天津和平 统考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 为首项 $a_1 = 1$ 的等比数列, 且 $a_n, 3a_{n+1}, 9a_{n+2}$ 成等差数列; 数列 $\{b_n\}$ 为首项 $b_1 = 1$ 的单调递增的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_1, S_2, S_4 + 3$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i (2b_i + 3)}{b_i b_{i+1}}, (n \in \mathbb{N}^*)$;

(3) 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{na_n}{3}$, 记 G_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $T_n < \frac{G_n}{2}$.

【答案】(1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_n = 3n - 2$; (2) $(-1)^n \frac{1}{3n+1} - 1$; (3) 证明见解析.

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ($d > 0$).

由题知: $6a_{n+1} = a_n + 9a_{n+2}$, 所以 $6q = 1 + 9q^2$, 即 $9q^2 - 6q + 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{3}$,

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 又 $S_2^2 = S_1 \cdot (S_4 + 3)$, 即 $(2+d)^2 = 1 \cdot (7+6d)$, 解得 $d = -1$ (舍) 或 $d = 3$,

所以 $b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$;

$$(2) \text{ 由 } b_n = 3n - 2, \text{ 可得 } \frac{(-1)^n (2b_n + 3)}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^n (6n - 1)}{(3n - 2)(3n + 1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{3n - 2} + \frac{1}{3n + 1} \right),$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i (2b_i + 3)}{b_i b_{i+1}} = -\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{3n - 2} + \frac{1}{3n + 1}\right)$$

$$= -1 + (-1)^n \frac{1}{3n+1} = (-1)^n \frac{1}{3n+1} - 1;$$

$$(3) \text{ 因为 } a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } c_n = \frac{na_n}{3} = \frac{n}{3^n}, \quad G_n = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right),$$

$$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}, \text{ 则 } \frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} + n\right) \frac{1}{3^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{9}{4} + \frac{3n}{2}\right) \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n}, \text{ 所以 } T_n - \frac{G_n}{2} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = -\frac{n}{2 \cdot 3^n} < 0,$$

$$\text{所以 } T_n < \frac{G_n}{2}.$$

45. (2023 天津河西 统考一模) 已知函数 $f(x) = 2a \ln x - x + a$, $g(x) = (a - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{2}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, ①求曲线 $y = f(x)$ 的单调区间和极值; ②求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) ①函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$, 单调递减区间为 $(2, +\infty)$; $f(x)$ 的极大值为 $2 \ln 2 - 1$, 无极小值;

$$\text{② } y = \left(\frac{2}{e} - 1\right)x + 1 \quad (2) a \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

【分析】(1) ①求函数 $y = f(x)$ 的定义域和导函数, 解方程 $f'(x) = 0$, 分区间研究导数的正负, 由此确定函数的单调性和极值;

②利用导数的几何意义, 求切线的斜率, 结合点斜式即可求切线方程;

(2) 首先求函数 $h(x)$ 的导函数可得 $h'(x) = \frac{[(1-2a)x - 2a](x-1)}{x}$, 讨论 $a > \frac{1}{2}$, 和 $a < \frac{1}{2}$ 两种情况研究函数的单调性结合零点存在性定理确定函数的零点个数由此确定 a 的取值范围.

【详解】(1) ①当 $a = 1$ 时, $f(x) = 2 \ln x - x + 1$,

函数 $f(x) = 2 \ln x - x + 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$, 单调递减区间为 $(2, +\infty)$;

函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 时取极大值, 极大值为 $f(2) = 2 \ln 2 - 1$, 无极小值.

②由 (i) 可知当 $f(e) = 2 \ln e - e + 1 = 3 - e$, $f'(e) = \frac{2}{e} - 1$. 则所求切线方程为 $y - (3 - e) = \left(\frac{2}{e} - 1\right)(x - e)$,

$$\text{即 } y = \left(\frac{2}{e} - 1\right)x + 1.$$

(2) 由已知可得, 方程 $2a \ln x - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - x + a + \frac{1}{2} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个不等实根,

设 $h(x) = 2a \ln x - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - x + a + \frac{1}{2}$, 则函数 $h(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ 且 $h(1) = 0$,

$$h'(x) = \frac{2a}{x} - (2a-1)x - 1 = \frac{[(1-2a)x - 2a](x-1)}{x}. \text{ 当 } 1-2a \leq 0, \text{ 即 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

若 $0 < x < 1$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 若 $x > 1$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 则所求方程只有一个解 $x = 1$, 不符合题意, 舍去.

$$\text{当 } 1-2a > 0, \text{ 即 } a < \frac{1}{2} \text{ 时. } h'(x) = \frac{(1-2a)}{x} \left(x - \frac{2a}{1-2a}\right)(x-1),$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{2a}{1-2a} \leq 0, \text{ 即 } a \leq 0 \text{ 时,}$$

若 $0 < x < 1$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减; 若 $x > 1$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 则所求方程只有一个解 $x = 1$, 不符合题意, 舍去;

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{2a}{1-2a} = 1, \text{ 即 } a = \frac{1}{4} \text{ 时, 若 } x > 0, \text{ 则 } h'(x) \geq 0, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时, 取等号,}$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(1) = 0$, 则所求方程只有一个解 $x = 1$, 不符合题意, 舍去;

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 0 < \frac{2a}{1-2a} < 1, \text{ 即 } 0 < a < \frac{1}{4} \text{ 时,}$$

若 $0 < x < \frac{2a}{1-2a}$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 若 $\frac{2a}{1-2a} < x < 1$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

若 $x > 1$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$$\text{又 } h(1) = 0, \text{ 可知 } h\left(\frac{2a}{1-2a}\right) > 0. \text{ 因为 } h\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = 2a \ln e^{-\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}} + a - \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{1}{2a}}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - e^{-\frac{1}{a}} + a + \left(\frac{1}{2} - a\right)\frac{1}{e}.$$

$$\text{因为 } 0 < a < \frac{1}{4}, \text{ 所以 } -\frac{3}{2} - e^{-\frac{1}{a}} + a + \left(\frac{1}{2} - a\right)\frac{1}{e} < -\frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2} - a\right)\frac{1}{e} < -\frac{5}{4} + 1 < 0, \text{ 即 } h\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) < 0.$$

$$\text{因为 } x \in \left(\frac{2a}{1-2a}, 1\right) \text{ 时, } h(x) > 0,$$

$$\text{因为 } e^{-\frac{1}{a}} < 1, \text{ 所以 } e^{-\frac{1}{a}} \in \left(0, \frac{2a}{1-2a}\right), \text{ 所以 } h(x) \text{ 在区间 } \left(e^{-\frac{1}{a}}, \frac{2a}{1-2a}\right) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{由零点存在定理, 可得存在唯一 } x_0 \in \left(e^{-\frac{1}{a}}, \frac{2a}{1-2a}\right), \text{ 使得 } h(x_0) = 0, \text{ 又 } h(1) = 0.$$

此时, 所求方程有 2 个不同解, 符合题意.

$$\textcircled{4} \text{ 当 } \frac{2a}{1-2a} > 1, \text{ 即 } \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \text{ 时, 若 } 0 < x < 1, \text{ 则 } h'(x) > 0, \text{ } h(x) \text{ 单调递增;}$$

$$\text{若 } 1 < x < \frac{2a}{1-2a}, \text{ 则 } h'(x) < 0, \text{ } h(x) \text{ 单调递减; 若 } x > \frac{2a}{1-2a}, \text{ 则 } h'(x) > 0, \text{ } h(x) \text{ 单调递增.}$$

又 $h(1) = 0$ ，于是 $h\left(\frac{2a}{1-2a}\right) < 0$ ，

令 $m(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ ， $m'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ， $m(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m(x) \geq m(1) = 0$ ，所以 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ，

所以 $h(x) = 2a \ln x - x + a - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{2} \geq 2a\left(1 - \frac{1}{x}\right) - x + a - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{2}$ ，

所以 $h(x) \geq \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 - x - \frac{2a}{x} + 3a + \frac{1}{2}$ 设 $n(x) = \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 - x - \frac{2a}{x} + 3a + \frac{1}{2}$ ，则

$$n\left(\frac{6a}{1-2a}\right) = \frac{1-2a}{2} \cdot \frac{36a^2}{(1-2a)^2} - \frac{6a}{1-2a} - \frac{1-2a}{3} + 3a + \frac{1}{2}, \quad n\left(\frac{6a}{1-2a}\right) = \frac{12a}{1-2a} - \frac{1-2a}{3} + 3a + \frac{1}{2} = \frac{-44a^2 + 92a + 1}{6(1-2a)}$$

因为 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ ，所以 $1-2a > 0$ ，函数 $y = -44a^2 + 92a + 1$ 在 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 单调递增，

当 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ 时， $y = -44a^2 + 92a + 1 > -44 \times \frac{1}{16} + 92 \times \frac{1}{4} + 1 > 0$ ， $h\left(\frac{6a}{1-2a}\right) \geq n\left(\frac{6a}{1-2a}\right) > 0$ ，

因为 $h(x)$ 在 $\left(\frac{2a}{1-2a}, +\infty\right)$ 上单调递增，由零点存在定理，得存在唯一 $x_1 \in \left(\frac{2a}{1-2a}, +\infty\right)$ ，

使得 $h(x_1) = 0$ ，又 $h(1) = 0$ 。此时，所求方程有 2 个不同解，符合题意。

综上所述，当 $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 时，函数 $h(x)$ 有两个不同零点。

46. (2023 天津 校联考一模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a$ ， $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间；(2) 当 $a = 1$ 时，令 $g(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$ 。

① 证明：当 $x > 0$ 时， $g(x) > 1$ ；② 若数列 $\{x_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 满足 $x_1 = \frac{1}{3}$ ， $e^{x_{n+1}} = g(x_n)$ ，证明： $2^n(e^{x_n} - 1) < 1$ 。

【分析】(1) 求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ ，再讨论 $f'(x)$ 的符号即可计算作答。

(2) ① 等价变形所证不等式，构造函数 $F(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x} - 1$ ，利用导数探讨单调性即可；

② 由已知证明 $e^{x_1} - 1 < \frac{1}{2}$ ，由①分析探讨，等价转化，再构造函数 $h(x) = \frac{(x-2)e^x}{x+2} + 1$ ，利用递推变换即可作答。

【详解】(1) 函数 $f(x) = e^x - ax - a$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，求得 $f'(x) = e^x - a$ ，

当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) > 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，

当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = e^x - a > 0$ ，解得 $x > \ln a$ ，令 $f'(x) = e^x - a < 0$ ，解得 $x < \ln a$ ，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增，

所以，当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增。

(2) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = \frac{2(e^x - x - 1)}{x^2}$,

① 当 $x > 0$ 时, $\frac{2(e^x - x - 1)}{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x} < 1$,

令 $F(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x} - 1$, $x > 0$, $F'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x} < 0$ 恒成立, 则 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$F(x) < F(0) = \frac{1}{e^0} - 1 = 0$, 因此, $\frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x} < 1$ 成立, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > 1$.

② 由①可知, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > 1$, 由 $x_1 = \frac{1}{3}$ 得 $e^{x_2} = g(x_1) > 1$, 即 $x_2 > 0$, 由 $e^{x_{n+1}} = g(x_n)$, 可得 $x_n > 0$,

而 $e^{x_1} - 1 = e^{\frac{1}{3}} - 1$, 又 $e - \left(\frac{3}{2}\right)^3 = e - \frac{27}{8} < 0$, 即 $e^{\frac{1}{3}} < \frac{3}{2}$, 则 $e^{x_1} - 1 = e^{\frac{1}{3}} - 1 < \frac{1}{2}$,

由于 $2^n(e^{x_n} - 1) < 1 \Leftrightarrow e^{x_n} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 只需证 $e^{x_{n+1}} - 1 < \frac{1}{2}(e^{x_n} - 1) \Leftrightarrow g(x_n) - 1 < \frac{1}{2}e^{x_n} - \frac{1}{2}$,

又当 $x > 0$ 时, $g(x) - 1 < \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x^2 - 4)e^x + x^2 + 4x + 4 = (x - 2)(x + 2)e^x + (x + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)e^x}{x + 2} + 1 > 0$,

令 $h(x) = \frac{(x - 2)e^x}{x + 2} + 1$, $x > 0$, $h'(x) = \frac{x^2 e^x}{(x + 2)^2} > 0$ 恒成立, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $h(x) > h(0) = 0$,

则当 $x > 0$ 时, 恒有 $\frac{x - 2}{x + 2} \cdot e^x + 1 > 0$, 而 $x_n > 0$, 即 $g(x_n) - 1 < \frac{1}{2}e^{x_n} - \frac{1}{2}$ 成立, 不等式 $e^{x_{n+1}} - 1 < \frac{1}{2}(e^{x_n} - 1)$ 成立,

因此 $e^{x_{n+1}} - 1 < \frac{1}{2}(e^{x_n} - 1) < \frac{1}{2^2}(e^{x_{n-1}} - 1) < \cdots < \frac{1}{2^n}(e^{x_1} - 1) < \frac{1}{2^{n+1}}$ 成立, 即 $e^{x_n} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 成立,

所以原不等式得证. 【点睛】思路点睛: 函数不等式证明问题, 将所证不等式造价转化, 构造新函数, 再借助函数的单调性、极(最)值问题处理.

47. (2023 天津河北 统考一模) 已知函数 $f(x) = x - \ln x - 2$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程; (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 都有 $x \ln x + x > k(x - 1)$ 成立, 求整数 k 的最大值.

【答案】(1) $y = -1$; (2) 递减区间是 $(0, 1)$, 递增区间是 $(1, +\infty)$; (3) 3.

【分析】(1) 求出函数 $f(x)$ 的导数, 再利用导数的几何意义求出切线方程作答.

(2) 利用导数求出 $f(x)$ 的单调区间作答.

(3) 等价变形给定的不等式, 构造函数, 利用导数求出函数的最小值情况作答.

【详解】(1) 函数 $f(x) = x - \ln x - 2$, 求得 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 则 $f'(1) = 0$, 而 $f(1) = -1$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = -1$.

(2) 函数 $f(x) = x - \ln x - 2$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 的递减区间是 $(0, 1)$, 递增区间是 $(1, +\infty)$.

(3) $\forall x \in (1, +\infty)$, $x \ln x + x > k(x-1) \Leftrightarrow k < \frac{x \ln x + x}{x-1}$,

令 $g(x) = \frac{x \ln x + x}{x-1}$, $x > 1$, 求导得 $g'(x) = \frac{(2 + \ln x)(x-1) - (x \ln x + x)}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}$,

由 (2) 知, $f(x) = x - \ln x - 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(3) = 1 - \ln 3 < 0$, $f(4) = 2(1 - \ln 2) > 0$,

因此存在唯一 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即 $x_0 - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0 - 2$,

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

因此函数 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

于是 $g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1} = \frac{x_0(x_0 - 2) + x_0}{x_0 - 1} = x_0$, 则 $k < x_0 \in (3, 4)$,

所以整数 k 的最大值是 3.

【点睛】关键点睛: 涉及不等式恒成立问题, 将给定不等式等价转化, 构造函数, 利用导数探求函数单调性、最值是解决问题的关键.

48. (2023 天津 校联考一模) 已知函数 $f(x) = ae^x - \sin x - a$. (注: $e = 2.718281\cdots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的极值点 x_1 .

①求实数 a 的取值范围;

②求证: $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 < 2x_1$.

【答案】(1) $y = x$ (2) ① $(0, 1)$; ②证明见解析

【分析】(1) 由导数的几何意义, 求切点处的切线方程;

(2) 利用导数研究单调性得到极值的个数, 利用函数单调性并通过构造新函数比较零点和极值点的大小关系.

【详解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2e^x - \sin x - 2$, $f'(x) = 2e^x - \cos x$,

切线的斜率 $k = f'(0) = 2 - 1 = 1$, 又 $f(0) = 0$, 所以切点为 $(0, 0)$,

所以, 切线方程为 $y = x$

(2) ①. 函数 $f(x) = ae^x - \sin x - a$, $f'(x) = ae^x - \cos x$,

(i) 当 $a > 1$ 时, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $ae^x > 1$, $\cos x \in (0, 1)$, $\therefore f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 没有极值

点，不合题意，舍去；

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时，设 $\varphi(x) = ae^x - \cos x$ ，则 $\varphi'(x) = ae^x + \sin x > 0$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，即

$f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，

又 $f'(0) = a - 1 < 0$ ， $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ae^{\frac{\pi}{2}} > 0$ ，所以 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点 x_1 ，

当 $x \in (0, x_1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一极值点，符合题意，综上， a 的取值范围是 $(0, 1)$ 。

②. 由①知 $0 < a < 1$ ，当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时， $f'(x) = ae^x - \cos x > 0$ ，

当 $x \in (0, x_1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x \in (x_1, \pi)$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增；

所以 $x \in (0, x_1)$ 时， $f(x) < f(0) = 0$ ，则 $f(x_1) < 0$ ，

又因为 $f(\pi) = ae^\pi - a = a(e^\pi - 1) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 (x_1, π) 上有唯一零点 x_0 ，

即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点 x_0 。因为 $f(2x_1) = ae^{2x_1} - \sin 2x_1 - a$ ，

由①知 $f'(x_1) = 0$ ，所以 $ae^{x_1} = \cos x_1$ ，

则 $f(2x_1) = ae^{2x_1} - \sin 2x_1 - a = e^{x_1} \cos x_1 - 2 \sin x_1 \cos x_1 - \frac{\cos x_1}{e^{x_1}}$

$= \cos x_1 \left(e^{x_1} - 2 \sin x_1 - \frac{1}{e^{x_1}} \right)$ ， $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

设 $h(x) = e^x - 2 \sin x - e^{-x}$ ， $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

则 $h'(x) = e^x - 2 \cos x + e^{-x}$ ，

$\because e^x + e^{-x} > 2$ ， $2 \cos x < 2$ ，所以 $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x > 0$

$h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 为单调递增，又 $h(0) = 0$ ，所以 $h(x) > 0$ ，

又 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $\cos x_1 > 0$ ，所以 $f(2x_1) = \cos x_1 \left(e^{x_1} - 2 \sin x_1 - \frac{1}{e^{x_1}} \right) > 0$ 。

所以 $f(2x_1) > f(x_0) = 0$ 。

由前面讨论知 $x_1 < 2x_1 < \pi$ ， $x_1 < x_0 < \pi$ ， $f(x)$ 在 (x_1, π) 单调递增，

所以 $x_0 < 2x_1$ 。

【点睛】思路点睛：

1. 导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题。注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理。

2. 利用导数解决含参函数的单调性问题时，一般将其转化为不等式恒成立问题，解题过程中要注意分类讨论和数形

结合思想的应用.

3.证明不等式,构造一个适当的函数,利用它的单调性进行解题,是一种常用技巧,许多问题,如果运用这种思想去解决,往往能获得简洁明快的思路,有着非凡的功效.

49. (2023 天津南开 统考一模) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 有极大值, 试确定 a 的取值范围;

(3) 若存在 x_0 使得 $f(x_0) + (\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{3}{4}x_0^2 - \left(\frac{3}{2}a + 2\right)x_0 + \frac{11}{4}a^2 + \frac{1}{5}$ 成立, 求 a 的值.

【答案】(1) $y + 5 = 0$ (2) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (3) $a = \frac{1}{5}$

【分析】(1) 利用导数的几何意义, 求曲线的切线方程;

(2) 首先求函数的导数, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x-a)}{x}$, 再讨论 a , 判断函数的单调性, 讨论函数的极值;

(3) 不等式转化为 $(x_0 - a)^2 + (2 \ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{4}{5}$, 利用两点间的距离的几何意义, 转化为点到直线的距离, 求 a 的值.

【详解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln x$,

依题意, $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x}$, 可得 $f'(1) = 2 - 6 + 4 = 0$, 又 $f(1) = -5$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 5 = 0$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ $f'(x) = 2x - 2(a+1) + \frac{2a}{x} = \frac{2(x-1)(x-a)}{x}$,

① 当 $a = 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 无极大值;

② 当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$ 或 $x > a$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, a)$ 上单调递减,

此时 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 符合题意;

③ 当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < a$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $a < x < 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, 1)$ 上单调递减,

此时 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极大值, 符合题意;

④ 当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 无极大值;

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(3) f(x_0) + (\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{3}{4}x_0^2 - \left(\frac{3}{2}a + 2\right)x_0 + \frac{11}{4}a^2 + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (2\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{4}{5}.$$

$(x - a)^2 + (2\ln x - 2a)^2$ 可以看作是动点 $P(x, 2\ln x)$ 与动点 $Q(a, 2a)$ 之间距离的平方,

动点 P 在函数 $y = 2\ln x$ 的图象上, Q 在直线 $y = 2x$ 的图象上,

问题转化为求直线上的动点到曲线上的最小距离,

由 $y = 2\ln x$ 得, $y' = \frac{2}{x} = 2$, 解得 $x = 1$,

所以曲线上点 $P(1, 0)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离最小, 最小距离 $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\text{则 } (x - a)^2 + (2\ln x - 2a)^2 \geq \frac{4}{5},$$

根据题意, 要使 $(x_0 - a)^2 + (2\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{4}{5}$,

则 $(x_0 - a)^2 + (2\ln x_0 - 2a)^2 = \frac{4}{5}$, 此时 Q 恰好为垂足,

$$\text{由 } \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}(x - 1) \end{cases}, \text{ 可得 } Q\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

所以 $a = \frac{1}{5}$.

【点睛】本题考查利用导数研究函数的性质的综合应用的问题, 本题的关键是第三问, 不等式变形转化为

$(x_0 - a)^2 + (2\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{4}{5}$, 再转化为直线 $y = 2x$ 和函数 $y = 2\ln x$ 的图象上点的距离问题.

50. (2023 天津 大港一中校联考一模) 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = mx^2$. $m \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数.

(1) 如果函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求 m 的取值范围;

(2) 若直线 $y = kx + 1$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条切线, 求实数 k 的值;

(3) 设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

【答案】(1) $m \leq \frac{e}{2}$ (2) 1 (3) 见解析.

【分析】(1) 依题意 $h'(x) = e^x - 2mx \geq 0$ ($0, +\infty$) 上恒成立. 即 $m \leq \left(\frac{e^x}{2x}\right)_{\min}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 即求函数 $p(x) = \frac{e^x}{2x}$

的最小值即可; (2) 设切点 (x_0, e^{x_0}) , 则切线方程为 $\begin{cases} e^{x_0} = kx_0 + 1 \\ k = e^{x_0} \end{cases}$ 进而得到 $k \ln k - k + 1 = 0$ ($k > 0$), 令 $p(k) = k \ln k - k + 1$

对函数求导得到函数的单调性和零点即可得到 k 值 (3): 要证 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ($x_2 > x_1$), 只要证

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} > \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} \quad (x_2 > x_1), \text{ 两边同时除以 } e^{x_1} \text{ 令 } x_2 - x_1 = t, t > 0, \text{ 即证 } (t - 2)e^t + t + 2 > 0, \text{ 利用 } p(t) = (t - 2)e^t + t + 2,$$

($t > 0$) 单调性即可证明

【详解】: (1) $h(x) = e^x - mx^2$, $h'(x) = e^x - 2mx$

要使 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

$$\therefore e^x - 2mx > 0, \therefore m \leq \left(\frac{e^x}{2x} \right)_{\min}, \text{ 令 } p(x) = \frac{e^x}{2x}, p'(x) = \frac{e^x(x-1)}{2x^2}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增

$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, } p(x) \text{ 有最小值为 } p(1) = \frac{e}{2}, \therefore m \leq \frac{e}{2}$$

$$(2) \because f(x) = e^x, \therefore f'(x) = e^x, \text{ 设切点为 } (x_0, e^{x_0}), \text{ 则 } \begin{cases} e^{x_0} = kx_0 + 1 \\ k = e^{x_0} \end{cases}$$

$$\therefore k \ln k - k + 1 = 0 (k > 0), \text{ 令 } p(k) = k \ln k - k + 1, p'(k) = \ln k$$

$\therefore 0 < k < 1$ 时, $p'(k) < 0$, $p(k)$ 单调递减, 当 $k > 1$ 时, $p'(k) > 0$, $p(k)$ 单调递增

$\therefore k=1$ 时, $p(k)_{\min} = 0$, $\therefore p(k) = 0$ 时, $k=1$. $\therefore$ 实数 k 的值为 1.

$$(3) \text{ 要证 } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x_2 > x_1)$$

只要证 $\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} > \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} (x_2 > x_1)$, 两边同时除以 e^{x_1} 得:

$$\frac{1 + e^{x_2 - x_1}}{2} > \frac{e^{x_2 - x_1} - 1}{x_2 - x_1}, \text{ 令 } t = x_2 - x_1, t > 0 \text{ 得: } \frac{1 + e^t}{2} > \frac{e^t - 1}{t}$$

所以只要证: $(t-2)e^t + t + 2 > 0$, 令 $p(t) = (t-2)e^t + t + 2$

$$\therefore p'(t) = (t-1)e^t + 1, [p'(t)]' = te^t > 0, \therefore p(t) > p(0) = 0$$

即 $(t-2)e^t + t + 2 > 0$, $\therefore$ 原不等式成立.

【点睛】 本题考查了利用导数研究过曲线上某点处的切线方程, 考查了利用导数求函数的最值, 体现了数学转化思想方法和函数构造法, 本题综合考查了学生的逻辑思维能力和灵活应变能力, 难度较大. 求函数在某一点处的切线方程; 步骤一般为: 一, 对函数求导, 代入已知点得到在这一点处的斜率; 二, 求出这个点的横纵坐标; 三, 利用点斜式写出直线方程.

51. (2023 天津红桥 统考一模) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - k$.

(1) 当 $k = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

【答案】(1) $y = \frac{1}{e}$ (2) $k \geq \frac{1}{e}$ (3) 证明见解析

【分析】(1) 对 $f(x)$ 求导，得到函数在 $x = e$ 处的导数，利用直线方程得点斜式即可得出答案；

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立，则 $k \geq \left(\frac{\ln x}{x} \right)_{\max}$ ，设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$ ，对 $g(x)$ 求导，得到 $g(x)$ 的单调性，可求出 $g(x)$ 最大值；

【详解】(1) 当 $k = 0$ 时， $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程的斜率为 $k = f'(e) = 0$ ，又 $f(e) = \frac{1}{e}$

则切线方程为 $y = \frac{1}{e}$ 。

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立，则 $k \geq \left(\frac{\ln x}{x} \right)_{\max}$ ，

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$ ， $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

由 $g'(x) > 0$ ，得 $0 < x < e$ ，由 $g'(x) < 0$ ，得 $x > e$ ，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

$g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$ ，所以 $k \geq \frac{1}{e}$ 。

52. (2023 天津河东 一模) 已知函数 $f(x) = ax - \frac{4a}{x}$ ， $g(x) = \ln \frac{x}{2}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) $F(x) = g(x) - f(x)$ ， $0 < a < \frac{1}{4}$ ， $x > 0$ 。

(i) 证明 $F(x) + F\left(\frac{4}{x}\right) = 0$ ；(ii) 求函数 $F(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{a^2}\right)$ 上零点的个数证明。

【答案】(1) $5ax - y - 8a = 0$ (2) (i) 证明见解析；(ii) 3 个，证明见解析

【分析】(1) 根据导数的几何意义，结合直线方程，即可得到结果；

(2) (i) 直接代入计算，即可证明；

(ii) 求导可得 $F'(x)$ ，得到其极值点，通过对其单调性的研究分不同区间进行讨论，即可得到其零点个数；

【详解】(1) $f'(x) = a + \frac{4a}{x^2}$ ，切线斜率为 $f'(1) = 5a$ ， $f(1) = -3a$ ，

切线方程为 $y + 3a = 5a(x - 1)$ ， $\therefore 5ax - y - 8a = 0$

(2) (i) $F\left(\frac{4}{x}\right) = \ln \frac{2}{x} - \frac{4a}{x} + 4a \times \frac{x}{4} = -\ln \frac{x}{2} - \frac{4a}{x} + ax = -F(x)$ ， $F(x) + F\left(\frac{4}{x}\right) = 0$ ；

(ii) $F'(x) = \frac{1}{x} - a - \frac{4a}{x^2} = 0$ 即为 $-ax^2 + x - 4a = 0$ ， $\Delta = 1 - 16a^2 > 0$

解得 $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16a^2}}{2a}$ ， $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 16a^2}}{2a}$ ， $x_1 > x_2 > 0$ ，

当 $x \in (0, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ 时， $F'(x) < 0$ ；当 $x \in (x_2, x_1)$ 时， $F'(x) > 0$ ，

且 $F(x)$ 在区间 $(0, x_2)$, $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 在区间 (x_2, x_1) 上单调递增,

$$F(2) = \ln 1 - 2a + 2a = 0, \quad \because x_1 x_2 = 4, \quad \therefore x_2 < 2 < x_1$$

$F(x)$ 在区间 (x_2, x_1) 上单调递增, $F(x_1) > F(2) = 0$, $F(x_2) < F(2) = 0$

$$F\left(\frac{1}{a^2}\right) = -\ln 2a^2 - \frac{1}{a} + 4a^3, \quad \text{令 } G(a) = -\ln 2a^2 - \frac{1}{a} + 4a^3$$

$$G'(a) = \frac{-4a}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + 12a^2 = \frac{12a^4 - 2a + 1}{a^2}$$

$$\text{令 } h(a) = 12a^4 - 2a + 1, \quad h'(a) = 48a^3 - 2, \quad \because a < \frac{1}{4}, \quad \therefore a^3 < \frac{1}{64}, \quad h'(a) < 0$$

$$h(a) \text{ 在 } 0 < a < \frac{1}{4} \text{ 上单调减, } h(a) > h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{64} - \frac{1}{2} + 1 > 0, \quad \therefore G'(a) > 0$$

$$G(a) \text{ 在 } 0 < a < \frac{1}{4} \text{ 上单调递增, } G(a) < G\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln \frac{1}{8} - 4 + \frac{1}{16} < 0$$

$$x_1 < \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} < \frac{1}{a^2}, \quad F(x_1) > 0, \quad F\left(\frac{1}{a^2}\right) < 0, \quad F(x) \text{ 在区间 } (x_1, +\infty) \text{ 单调递减}$$

因此 $F(x)$ 在区间 $\left[x_1, \frac{1}{a^2}\right]$ 上存在唯一零点 x_3 由已知 $0 < \frac{4}{x_3} < \frac{4}{x_1} = x_2 < 2 < x_1 < x_3 < \frac{1}{a^2}$, 由 (2) (i)

$$F(x_3) + F\left(\frac{4}{x_3}\right) = 0, \quad F(x_3) = 0, \quad \therefore F\left(\frac{4}{x_3}\right) = 0 \quad F(x) \text{ 在区间 } (0, x_2) \text{ 单调递减, } F(x) \text{ 在区间 } (0, x_2) \text{ 上存在唯一零点 } \frac{4}{x_3}$$

综上所述, $F(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{a^2}\right]$ 上存在 3 个零点.

【点睛】思路点睛: 构造函数是基本的解题思路, 因此观察题目所给的数的结构特点, 以及数与数之间的内在联系, 合理构造函数, 利用导数判断单调性是解题的关键.

53. (2023 天津 统考一模) 已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1 - \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程; (2) 求 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的极值;

(3) 设函数 $g(x) = (x-a)^2 \ln x$, $h(x) = x + \frac{e^2}{x}$. 当 $a > -2$ 时, $\forall x_1 \in [1, e]$, $\forall x_2 \in [2, 3]$, 不等式 $g(x_1) \leq h^2(x_2)$ 恒成立, 求

a 的取值范围. 【答案】(1) $y = 3$ (2) 答案见解析 (3) $[-2, 3e]$

【分析】(1) 求出函数的导函数, 即可求出切线的斜率, 从而求出切线方程;

(2) 求出函数的导函数, 分 $a > -2$ 、 $a < -2$ 两种情况讨论, 分别求出函数的极值;

(3) 根据对勾函数的性质求出 $h^2(x_2)_{\min}$, 依题意不等式 $g(x_1) \leq h^2(x_2)$ 恒成立, 只需 $g(x)_{\max} \leq 4e^2$ 恒成立, 利用导数说明函数的单调性, 结合 (2) 中的结论求出参数的取值范围.

$$\text{【详解】(1) 当 } a = -2 \text{ 时, } f(x) = 2\ln x + 1 + \frac{2}{x}, \quad f'(x) = \frac{2x-2}{x^2},$$

所以 $k = f'(1) = 0$, $f(1) = 3$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 3$.

$$(2) \quad f'(x) = \frac{2x+a}{x^2}, \quad x \in (1, +\infty).$$

①当 $a > -2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调增, 所以 $f(x)$ 无极值;

②当 $a < -2$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{a}{2}$, 列表如下:

x	$\left(1, -\frac{a}{2}\right)$	$-\frac{a}{2}$	$\left(-\frac{a}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2\ln\left(-\frac{a}{2}\right) + 3$, 无极大值;

综上可得: 当 $a \geq -2$ 时函数无极值, 当 $a < -2$ 时极小值为 $2\ln\left(-\frac{a}{2}\right) + 3$, 无极大值;

(3) 易知 $h(x) = x + \frac{e^2}{x}$ 在 $[2, e]$ 上单调递减, 在 $[e, 3]$ 上单调递增,

所以 $h(x) = x + \frac{e^2}{x}$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值为 $h(e) = 2e$. 所以 $h^2(x_2)_{\min} = 4e^2$.

因为 $g'(x) = (x-a)\left(2\ln x + 1 - \frac{a}{x}\right) = (x-a)f(x)$,

由题意, 对于任意的实数 $x_1 \in [1, e]$, $x_2 \in [2, 3]$, 不等式 $g(x_1) \leq h^2(x_2)$ 恒成立, 只需 $g(x)_{\max} \leq 4e^2$ 恒成立, 所以

$$\begin{cases} g(1) = 0 \leq 4e^2 \\ g(e) = (e-a)^2 \leq 4e^2 \end{cases}, \text{解得 } -e \leq a \leq 3e, \text{ 又 } a \geq -2, \text{ 所以 } -2 \leq a \leq 3e.$$

①当 $-2 \leq a \leq 1$ 时, 因为 $x \in [1, e]$, 所以 $x-a \geq 0$,

由 (2) 知, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调增, 所以 $f(x) \geq f(1) = 1-a \geq 0$. 所以 $g'(x) \geq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调增, 则 $[g(x)]_{\max} = g(e) \leq 4e^2$, 解得

$-e \leq a \leq 3e$, 此时, $-2 \leq a \leq 1$

②当 $1 < a \leq 3e$ 时, 由 (2) 知, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 且 $\begin{cases} f(1) = 1-a < 0 \\ f(e) = 3 - \frac{a}{e} > 0 \end{cases}$, 又 $f(a) = 2a > 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, a)$,

且 $x_0 \in (1, e]$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即 $2\ln x_0 + 1 - \frac{a}{x_0} = 0$, 得 $x_0 - a = -2x_0 \ln x_0$.

所以 $g'(x) = 0$ 的解为 x_0 和 a , 列表如下:

x	$(1, x_0)$	x_0	(x_0, a)	a	$(a, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x_0) = (x_0 - a)^2 \ln x_0 \leq 4e^2$, 即 $x_0^2 \ln^3 x_0 \leq e^2$, 又 $1 < x_0 \leq e$, 所以 $x_0^2 \ln^3 x_0 \leq e^2$ 恒成立, 此时 $1 < a \leq 3e$,

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[-2, 3e]$

【点睛】方法点睛: 导函数中常用的两种常用的转化方法: 一是利用导数研究含参函数的单调性, 常化为不等式恒成立问题. 注意分类讨论与数形结合思想的应用; 二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

54. (2023 天津和平 统考一模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax, g(x) = \ln(x+2) - a$, 其中 e 为自然对数的底数, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(1)$, 求 a ;

(2) 证明: $f'(x) > g(x)$ 恒成立;

(3) 证明: $\ln 2 + \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\ln \frac{4}{3}\right)^3 + \dots + \left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{e}{e-1}$.

【分析】(1) 求导, 求极值点, 讨论函数单调性, 找到极小值即可解决问题;

(2) 不等式 $f'(x) > g(x)$ 恒成立, 即 $e^x - \ln(x+2) > 0$ 恒成立,

设 $h(x) = e^x - \ln(x+2)$, 构造新函数求导利用函数导数单调性进行分析即可证明结论.

(2) 由 (2) 知, $e^x > \ln(x+2)$, 令 $x = \frac{-t+1}{t}$, 则 $e^{\frac{-t+1}{t}} > \ln\left(\frac{-t+1}{t} + 2\right) = \ln \frac{t+1}{t}$,

从而有 $e^{-t+1} > \left(\ln \frac{t+1}{t}\right)^t$, 由 t 的不同值, 分别写出不等式, 然后累加, 结合等比数列求和进行放缩, 分析得到结论.

【详解】(1) $f'(x) = e^x - a (a > 0)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln a$,

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a)$, 所以 $\ln a = 1$, 即 $a = e$.

(2) 证明: 不等式 $f'(x) > g(x)$ 恒成立, 即 $e^x - \ln(x+2) > 0$ 恒成立,

设 $h(x) = e^x - \ln(x+2)$, 则 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$,

易知 $h'(x)$ 是定义域上的增函数, 又 $h'(0) = 1 - \frac{1}{2} > 0, h'(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$,

则 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x+2} = 0$ 在 $(-1, 0)$ 上有一个根 x_0 , 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 2}$,

当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $h'(x) > 0$

此时 $h(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, 0)$ 单调递增,

$h(x)$ 的最小值为 $h(x_0) = e^{x_0} - \ln(x_0 + 2)$,

$$\because e^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 2}, \therefore x_0 = -\ln(x_0 + 2),$$

$$\because x_0 \in (-1, 0), \therefore h(x_0) = \frac{1}{x_0 + 2} + x_0 = \frac{1 + x_0^2 + 2x_0}{x_0 + 2} = \frac{(1 + x_0)^2}{x_0 + 2} > 0,$$

$\therefore e^x - \ln(x + 2) > 0$ 恒成立，故结论成立.

(3) 证明：由 (2) 知， $e^x > \ln(x + 2)$ ，令 $x = \frac{-t+1}{t}$ ，

$$\text{则 } e^{\frac{-t+1}{t}} > \ln\left(\frac{-t+1}{t} + 2\right) = \ln \frac{t+1}{t}, \therefore e^{-t+1} > \left(\ln \frac{t+1}{t}\right)^t. \text{ 由此可知，当 } t=1 \text{ 时， } e^0 > \ln 2,$$

$$\text{当 } t=2 \text{ 时， } e^{-1} > \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2, \text{ 当 } t=3 \text{ 时， } e^{-2} > \left(\ln \frac{4}{3}\right)^3,$$

.....,

$$\text{当 } t=n \text{ 时， } e^{-n+1} > \left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^n,$$

累加得：

$$e^0 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n+1} > \ln 2 + \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\ln \frac{4}{3}\right)^3 + \dots + \left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^n,$$

$$\text{又 } e^0 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n+1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1},$$

$$\text{所以 } \ln 2 + \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\ln \frac{4}{3}\right)^3 + \dots + \left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{e}{e-1}.$$

【点睛】函数与导数综合简答题常常以压轴题的形式出现，

难度相当大，主要考向有以下几点：

- 1、求函数的单调区间（含参数）或判断函数（含参数）的单调性；
- 2、求函数在某点处的切线方程，或知道切线方程求参数；
- 3、求函数的极值（最值）；
- 4、求函数的零点（零点个数），或知道零点个数求参数的取值范围；
- 5、证明不等式；

解决方法：对函数进行求导，结合函数导数与函数的单调性等性质解决，

在证明不等式或求参数取值范围时，通常会对函数进行参变分离，构造新函数，

对新函数求导再结合导数与单调性等解决.