

01空间向量的基本概念与运算

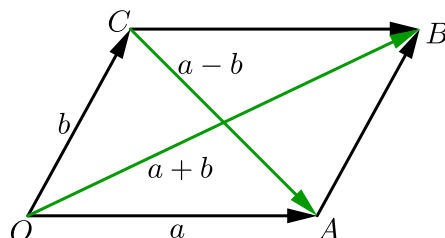
【金金备注】 类比平面向量，可引导学生回忆相等向量、相反向量、零向量、单位向量、向量的模长等基础知识点。

1. 空间向量的加减运算

1. 向量的加减运算法则

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{b}.$$



2. 空间向量的数乘运算

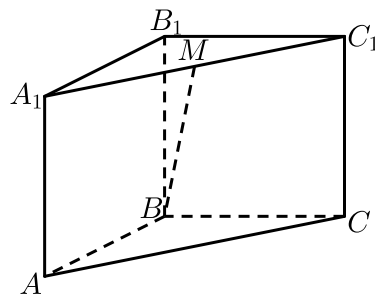
当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相同；

当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反；

$\lambda \vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍。

线性运算

1. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， M 为 A_1C_1 的中点，若 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AA_1} = \vec{c}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，则下列向量与 $\vec{BM}$ 相等的是（ ）。



- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
C. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

【答案】 C

【解析】 $\vec{BM} = \vec{BB_1} + \vec{B_1M}$,

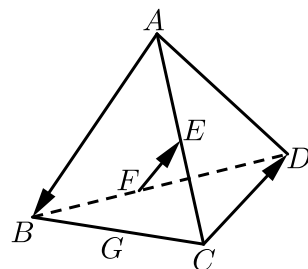
$\because M$ 为 A_1C_1 的中点，

$$\begin{aligned}
\therefore \overrightarrow{B_1M} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}, \\
\therefore \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M} \\
&= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1} \\
&= \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \text{ 故C正确.}
\end{aligned}$$

故选C.

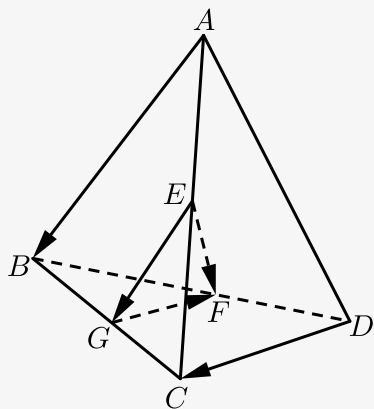
【标注】【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）

2. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{c}$ ， $\overrightarrow{CD} = 5\vec{a} + 6\vec{b} - 8\vec{c}$ ，棱 AC ， BD ， BC 的中点分别为 E ， F ， G ，若 $\overrightarrow{FE} = -3\vec{a} - 3\vec{b} + \lambda\vec{c}$ ，则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 5

【解析】 如图所示：



$$\therefore \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c},$$

又 $\because$ 在 $\triangle EFG$ 中，

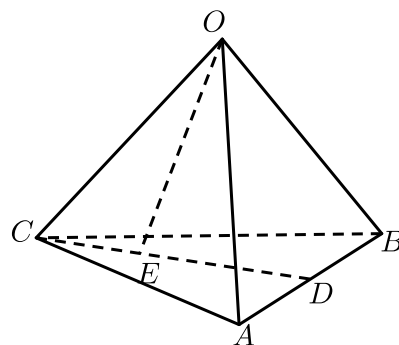
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) + \left(\frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}\right) = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c},$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = -3\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c}.$$

故答案为：5 .

【标注】【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）

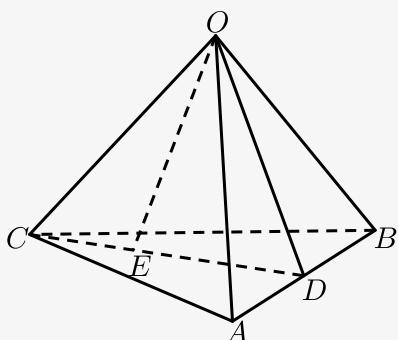
3. 如图, 在棱长均相等的四面体 $O-ABC$ 中, 点 D 为 AB 的中点, $CE = \frac{1}{2}ED$, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{OE} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 C. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$
 D. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

【答案】 D

【解析】 连结 OD ,



$$\begin{aligned} \because CE &= \frac{1}{2}ED, \\ \therefore CE &= \frac{1}{3}CD, ED = \frac{2}{3}CD, \\ \therefore \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}, \\ \because D &\text{ 为中点,} \\ \therefore \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \\ \therefore \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}. \end{aligned}$$

故选 D.

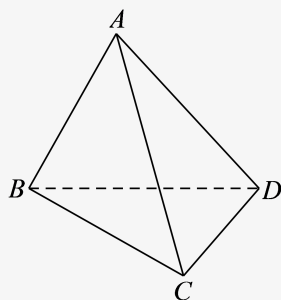
【标注】 【知识点】 空间向量的线性运算 (非坐标)

4. 已知在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{CD} = (\quad)$.

- A. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ C. $\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

【答案】B

【解析】∵在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$,

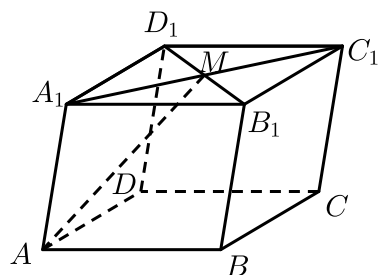


$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{BC} \\ &= (\vec{c} - \vec{a}) - \vec{b} \\ &= \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}.\end{aligned}$$

故选B.

【标注】【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）

5. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{AM}$ 相等的向量是 ().



- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
C. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

【答案】B

【解析】 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}.$

故选B.

【标注】【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）

2. 共线、共面向量

1. 共线向量定理

对空间任意两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$), $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

2. 共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

3. 共面向量定理的推论

推论1: 如图, 空间一点P位于平面MAB内的充要条件是存在有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}$, (*)

或对空间任一定点O, 有 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$.

在平面MAB内, 点P对应的有序实数对 (x, y) 是唯一的; (*)式叫做平面MAB的向量表示式.

推论2: 空间中的一点P与不共线的三点A, B, C共面的充要条件是存在唯一的有序实数组 $\{x, y, z\}$, 使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, 且 $x + y + z = 1$ (其中O为空间任一点).

4. 共面向量定理的延伸

如果三个不共面的向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足等式 $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0}$, 那么 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

🔗 共线共面问题

6. 已知空间向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$, $\vec{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 ().

A. A, B, D

B. A, B, C

C. C, B, D

D. A, C, D

【答案】 A

【解析】 $\vec{BD} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, 显然 $\vec{BD} = 2\vec{AB}$, 所以A, B, D共线.

故选A.

【标注】 【知识点】空间向量的线性运算 (非坐标)

7. 已知A, B, C三点不共线, 点O是平面ABC外一点, 下列各条件中, 能得到点M与A, B, C三点一定共面的是 ().

A. $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$

B. $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} + \vec{OC}$

C. $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

D. $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

【答案】 B

【解析】 若 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$,

根据空间向量基本定理, M 为 A 、 B 、 C 共面的充要条件为 $x + y + z = 1$,

A: $x + y + z = \frac{3}{2}$, 错误;

B: $x + y + z = 1$, 正确;

C: $x + y + z = 3$, 错误;

D: $x + y + z = 0$, 错误.

故选 B.

【标注】 【知识点】 空间向量基本定理; 空间向量的线性运算 (非坐标)

8. A, B, C 不共线, 对空间任意一点 O , 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$, 则 P, A, B, C 四点 () .

A. 不共面

B. 共面

C. 不一定共面

D. 无法判断是否共面

【答案】 B

【解析】 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$
 $= \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{8}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})$
 $= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC},$
 $\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC},$
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$

由共面的充要条件知 P, A, B, C 四点共面.

【标注】 【知识点】 空间向量的线性运算 (非坐标); 空间向量基本定理

3. 空间向量的基本定理

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **不共面**, 那么对空间任一向量 $\vec{p}$, 存在一个**唯一的**有序实数组 x, y, z , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

其中 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个**基底**, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做**基向量**.

【备注】 【教师备注】 空间基底中的向量是不共面向量, 故各基向量都不能为 $\vec{0}$

2.空间向量基本定理的推论

设O, A, B, C是**不共面**的四点, 则对空间任一点P, 都存在**唯一的**有序实数组 $\{x, y, z\}$, 使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

基底 (线性运算)

9. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量不共面的是 ().

A. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$

B. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$

C. $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$

D. $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

【答案】 B

【解析】 A选项: $\because \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底,

若向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$ 共面,

$$\text{则 } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) + \mu\vec{c}$$

$$= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c},$$

解得 $\lambda = \mu = 1$,

向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$ 共面;

B选项: 若向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$ 共面,

$$\text{则 } \vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) + \mu\vec{c}$$

$$= \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b} + \mu\vec{c},$$

λ, μ 无解, 即向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, B正确;

C选项: 若向量 $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$ 共面,

$$\text{则 } \vec{b} + \vec{c} = \lambda(\vec{b} - \vec{c}) + \mu\vec{b}$$

$$= \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c} + \mu\vec{b}$$

$$= (\lambda + \mu)\vec{b} - \lambda\vec{c},$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda = 1 \end{cases},$$

解得 $\lambda = -1, \mu = 2$,

即向量 $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$ 共面, C错误;

D选项: 若向量 $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 共面,

$$\text{则 } \vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (\lambda + \mu) \vec{a} - \mu \vec{b}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\mu = 1 \end{cases},$$

解得 $\lambda = 2, \mu = -1$,

即向量 $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 共面, D 错误.

故选 B.

【标注】【知识点】空间向量共面问题

10. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量, 则下列选项中能构成空间基底的一组向量是 ().

A. $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$

B. $2\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$

C. $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$

D. $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$

【答案】 C

【解析】 A. 设 $2\vec{a} = x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{a} + 2\vec{b}) = (x + y)\vec{a} + (-x + 2y)\vec{b}$, 解得 $x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}$, 所以 $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ 共面, 不能构成基底, 故 A 错误;

B. 设 $2\vec{b} = x(\vec{b} - \vec{a}) + y(\vec{b} + 2\vec{a}) = (-x + 2y)\vec{a} + (x + y)\vec{b}$, 解得 $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$, 所以 $2\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$ 共面, 不能构成基底, 故 B 错误;

C. 设 $\vec{a} = x(2\vec{b}) + y(\vec{b} - \vec{c}) = (2x + y)\vec{b} + (-y)\vec{c}$, x, y 无解, 所以 $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$ 不共面, 可以构成基底, 故 C 正确;

D. 设 $\vec{c} = x(\vec{a} + \vec{c}) + y(\vec{a} - \vec{c}) = (x + y)\vec{a} + (x - y)\vec{c}$, 解得 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$, 所以 $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$ 共面, 不能构成基底, 故 D 错误.

故选 C.

【标注】【知识点】空间向量基本定理; 空间向量的线性运算 (非坐标)

11. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量, 则能构成一个基底的一组向量是 ().

A. $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$

B. $2\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$

C. $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$

D. $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$

【答案】 C

【解析】 A 选项: 因为 $2\vec{a} = \frac{4}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$,

得： $2\vec{a}$ ， $\vec{a} - \vec{b}$ ， $\vec{a} + 2\vec{b}$ 三个向量共面，A不正确；

B选项：因为 $2\vec{b} = \frac{4}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + 2\vec{a})$ ，

得： $2\vec{b}$ ， $\vec{b} - \vec{a}$ ， $\vec{b} + 2\vec{a}$ 三个向量共面，

故不能构成一个基底，B不正确；

C选项：因为找不到实数 λ ， M ，

使 $\vec{a} = \lambda \cdot 2\vec{b} + M(\vec{b} - \vec{c})$ 成立，

故 $\vec{a}$ ， $2\vec{b}$ ， $\vec{b} - \vec{c}$ 三个向量不共面，

它们能构成一个基底，C正确；

D选项：因为 $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$ 得：

$\vec{c}$ ， $\vec{a} + \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{c}$ 三个向量共面，

故它们不能构成一个基底，D不正确。

故选C。

【标注】【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）；空间向量基本定理

4. 空间向量的数量积

1. 数量积定义

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

2. 数量积的性质

$$\textcircled{1} \vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \text{ 的充要条件是 } \vec{a} \perp \vec{b} (\vec{a}, \vec{b} \text{ 为非零向量}).$$

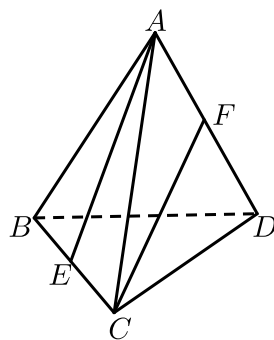
$$\textcircled{3} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

3. 投影

$$\vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 的方向上的投影} : |\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

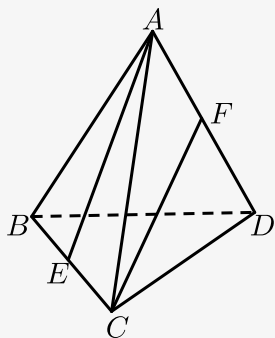
数量积的计算

12. 如图，在棱长为2的正四面体 $ABCD$ 中， E ， F 分别是 BC ， AD 的中点，则 $\vec{AE} \cdot \vec{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 -2

【解析】 如图所示：

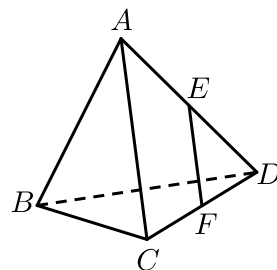


在棱长为2的正四面体 $ABCD$ 中， E, F 分别是 BC, AD 的中点，

$$\begin{aligned}\vec{AE} \cdot \vec{CF} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CD}) \\&= \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{CD}) \\&= \frac{1}{4}(2 \times 2 \times \cos 120^\circ + 2 \times 2 \times \cos 90^\circ + 2 \times 2 \times \cos 180^\circ + 2 \times 2 \times \cos 120^\circ) \\&= -2.\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 空间向量的数量积及其坐标表示

13. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为1，点 E, F 分别是 AD, DC 中点，则 $\vec{EF} \cdot \vec{AB} = (\quad)$.



A. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$
D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 点 E, F 分别是 AD, DC 中点，

$$\begin{aligned}\vec{EF} &= \frac{1}{2}\vec{AC}, \\ \vec{EF} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{2}\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

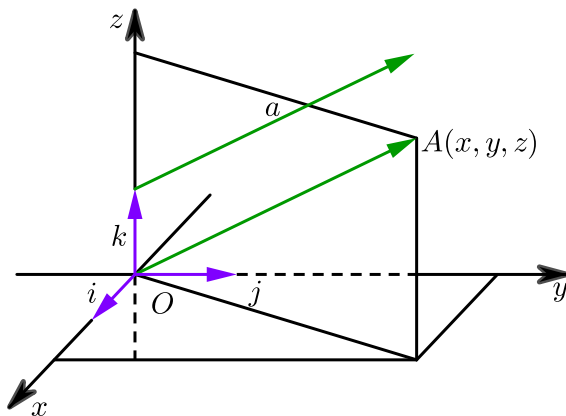
故选A .

【标注】 【知识点】 空间向量的线性运算（非坐标）；空间向量的数量积及其坐标表示

5. 空间直角坐标系及坐标运算

1. 空间直角坐标系的建立

如图所示, 以点O为原点, 分别以 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 的方向为正方向建立x轴, y轴, z轴, 这时我们说建立了一个**空间直角坐标系O-xyz**, 每两个坐标轴的平面分别称为xOy平面, yOz平面, zOx平面.



2. 空间向量的坐标

若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. 空间向量的坐标运算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则容易得到:

$$(1) \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

$$(2) \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3);$$

$$(3) \text{数量积: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

4. 空间向量的平行垂直关系

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$(1) \vec{a} // \vec{b} \left(\vec{b} \neq 0 \right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

5. 空间中的夹角和模长公式

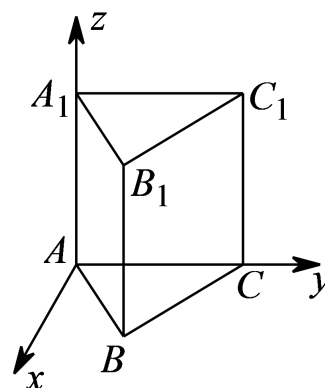
设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$(1) \text{模长公式: } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$(2) \text{夹角公式: } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

向量的坐标运算

如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是2，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，则顶点 B_1 的坐标是_____。



【答案】 $(\sqrt{3}, 1, 2)$

【解析】 $\because$ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是2，

$$\therefore B(\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\therefore \text{顶点 } B_1 \text{ 的坐标是 } (\sqrt{3}, 1, 2),$$

故答案为： $(\sqrt{3}, 1, 2)$ 。

【标注】 【知识点】 建立空间直角坐标系

15. 点 $A(3, 3, -5)$ ， $B(2, -3, 1)$ ， C 为线段 AB 上一点，且 $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ，则点 C 坐标为（ ）。

- A. $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
- B. $\left(\frac{3}{8}, -3, 2\right)$
- C. $\left(\frac{7}{3}, -1, -1\right)$
- D. $\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【答案】 C

【解析】 设 C 点坐标 (x, y, z) ，

$$\text{则向量 } \overrightarrow{AC} = (x - 3, y - 3, z + 5),$$

$$\text{向量 } \overrightarrow{AB} = (-1, -6, 6),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore (x - 3, y - 3, z + 5) = \frac{2}{3}(-1, -6, 6),$$

$$\therefore \begin{cases} x - 3 = -\frac{2}{3} \\ y - 3 = -4 \\ z + 5 = 4 \end{cases},$$

 数量积的坐标运算

18. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, $\vec{a} = (x-2, 2y, -2)$, $\vec{b} = (3x, 2y, -3x)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, 则 $m = x^2 + y^2 + 2x$ 的最小值是 _____, 最大值是 _____.

【答案】 $\frac{8}{5}$; 12

【解析】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x(x-2) + 4y^2 + bx^2 = 3x^2 + 4y^2 = 12$,

故 $y^2 = 3 - \frac{3}{4}x^2$, 所以

$$m = x^2 + y^2 + 2x$$

$$= x^2 + 3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x,$$

$$= \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3,$$

$$\because 3 - \frac{3}{4}x^2 \geq 0, \text{ 即 } x^2 \leq 4,$$

$$\text{故 } -2 \leq x \leq 2,$$

$$\text{当 } x = -\frac{4}{5} \text{ 时},$$

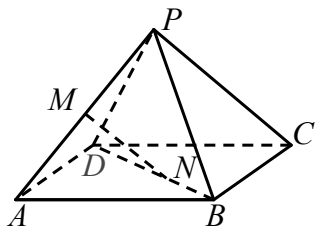
$$m_{\min} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} + 3 = \frac{8}{5},$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时}, m_{\max} = 5 + 4 + 3 = 12,$$

$$\text{故最小值为 } \frac{8}{5}, \text{ 最大值为 } 12.$$

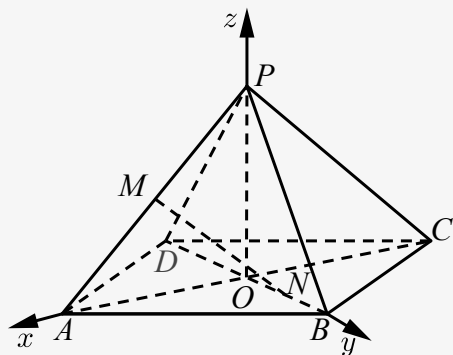
【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示; 定轴定区间求值域; 函数的值域

19. 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = AB$, 点 M 为 PA 的中点, $\vec{BD} = \lambda \vec{BN}$. 若 $MN \perp AD$, 则实数 $\lambda =$ _____.



【答案】 4

【解析】 连结 AC , 交 BD 于 O , 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



设 $PA = AB = 2$, 则 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -\sqrt{2}, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$, $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$,

$$\overrightarrow{BD} = (0, -2\sqrt{2}, 0) ,$$

设 $N(0, b, 0)$, 则 $\overrightarrow{BN} = (0, b - \sqrt{2}, 0)$,

$$\because \overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BN} , \therefore -2\sqrt{2} = \lambda(b - \sqrt{2}) , \therefore b = \frac{\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}}{\lambda} ,$$

$$\therefore N\left(0, \frac{\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}}{\lambda}, 0\right) , \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}}{\lambda}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ,$$

$$\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) ,$$

$$\because MN \perp AD ,$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 - \frac{2\lambda - 4}{\lambda} = 0 ,$$

解得实数 $\lambda = 4$.

故答案为 : 4 .

【标注】【素养】直观想象

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【方法】建系法

【知识点】建立空间直角坐标系

【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

【知识点】空间向量线性运算的坐标表示

【知识点】空间向量的线性运算（非坐标）

【思想】数形结合思想

平行垂直关系

20. 若向量 $\vec{a} = (x, -1, 3)$, 向量 $\vec{b} = (2, y, 6)$, 则 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1 ; -2

【解析】 $\because$ 向量 $\vec{a} = (x, -1, 3)$, 向量 $\vec{b} = (2, y, 6)$,

由 $\vec{a} // \vec{b}$,

则 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$,

$(x, -1, 3) = \lambda(2, y, 6)$,

$$\text{即} \begin{cases} 2\lambda = x \\ -1 = \lambda y \\ 3 = 6\lambda \end{cases}, \text{得} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = -2 \end{cases},$$

所以 $x = 1, y = -2$.

【标注】【知识点】空间向量线性运算的坐标表示

21. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 // l_2$, 则 ().

A. $x = \frac{9}{2}, y = 15$

B. $x = 3, y = \frac{15}{2}$

C. $x = 3, y = 15$

D. $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$

【答案】D

【解析】 $\because l_1 // l_2$,

$\therefore$ 存在非零实数 k 使得 $\vec{a} = k\vec{b}$,

$$\therefore \begin{cases} 2 = 3k \\ 3 = kx \\ 5 = ky \end{cases} \text{得} \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{15}{2} \end{cases}.$$

故选D.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题; 空间向量的正交分解及其坐标表示; 空间向量线性运算的坐标表示

22. 已知向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 ().

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{7}{4}$

【答案】D

【解析】 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{5}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$,

$$(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2k + 2k - 2 - 5 = 0,$$

$$\therefore k = \frac{7}{4}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决异面直线所成角问题

23. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$, 且 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 _____.

【答案】 $\frac{5}{7}$

【解析】 $\vec{a} + k\vec{b} = (1 - k, 1, 2k)$,
 $2\vec{a} - \vec{b} = (3, 2, -2)$.
因为 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直,
所以 $(1 - k, 1, 2k) \cdot (3, 2, -2) = 0$.
 $3(1 - k) + 2 - 4k = 0$.
解得 $k = \frac{5}{7}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；空间向量线性运算的坐标表示；空间向量的线性运算（非坐标）；空间向量的数量积及其坐标表示

🔗 模长的坐标运算

24. 若向量 $\vec{AB} = (2, -2, 1)$, $\vec{AC} = (2, -1, 3)$, 则 $|\vec{BC}| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 因为 $\vec{AB} = (2, -2, 1)$, $\vec{AC} = (2, -1, 3)$,
所以 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (0, 1, 2)$, 故 $|\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
故答案为 $\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】空间中两点间的距离

25. 已知 $\vec{a} = (1, 2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}| =$ _____.

【答案】 $1 + 2\sqrt{3}$

【解析】 $\because \vec{a} = (1, 2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-1, \sqrt{3}, 0)$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 2\sqrt{3}$,
 $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 3} = 2$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}| = 1 + 2\sqrt{3}$,
故答案为: $1 + 2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

26. 若 $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-3, 1, -4)$, 则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{258}$

【解析】 $\because \vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-3, 1, -4)$,
 $\therefore \vec{a} - 2\vec{b} = (8, -5, 13)$,
 $\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{64 + 25 + 169} = \sqrt{258}$.

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

27. 已知 M 为 z 轴上一点, 且点 M 到点 $A(-1, 0, 1)$ 与点 $B(1, -3, 2)$ 的距离相等, 则点 M 的坐标为 () .

A. $(3, 0, 0)$

B. $(0, -2, 0)$

C. $(0, 0, 6)$

D. $(0, 0, -3)$

【答案】 C

【解析】 设 $M(0, 0, z_0)$,
已知空间内任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$,
之间的距离为 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$,
 $\therefore |MA| = \sqrt{1 + (z_0 - 1)^2}$,
 $|MB| = \sqrt{1 + 9 + (z_0 - 2)^2}$
 $\therefore |MA| = |MB|$,
 $\therefore 1 + (z_0 - 1)^2 = 10 + (z_0 - 2)^2$,
解得 $z_0 = 6$,
 $\therefore M(0, 0, 6)$.

【标注】【知识点】空间中两点间的距离

28. 已知 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-4, 2, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】 $\because \vec{a} \perp \vec{b}$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-4) + 3 \times 2 + 1 \cdot x = 0$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\lambda \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$.

故选B.

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

31. 已知 $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, -1)$, $\vec{OA} + \lambda \vec{OB}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 120° , 则 λ 的值为 ().

A. $\pm \frac{\sqrt{6}}{6}$
C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
D. $\pm\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】 $\because \vec{OA} + \lambda \vec{OB} = (1, 0, 0) + \lambda(0, -1, -1) = (1, -\lambda, -\lambda)$,

$\vec{OA} + \lambda \vec{OB}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 120° ,

$$\therefore (1, -\lambda, -\lambda)(0, -1, -1) = \sqrt{1 + 2\lambda^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore 2\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + 2\lambda^2}, \text{ 且 } \lambda < 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故选C.

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

向量共面

32. 已知 $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 4, -2)$, $\vec{c} = (7, 5, \lambda)$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量共面, 则实数 λ 等于 ().

A. $\frac{62}{7}$

B. $\frac{63}{7}$

C. $\frac{64}{7}$

D. $\frac{65}{7}$

【答案】D

【解析】 $\because \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面,

$\therefore$ 存在实数 m, n ,

$$\text{使得 } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b},$$

$$\therefore (7, 5, \lambda) = m(2, -1, 3) + n(-1, 4, -2),$$

$$\therefore 2m - n = 7,$$

$$-m + 4n = 5,$$

$$\therefore 7n = 17,$$

$$n = \frac{17}{7},$$

$$\begin{aligned}
 \therefore m &= \frac{33}{7}, \\
 \therefore \lambda &= 3m - 2n \\
 &= 3 \times \frac{33}{7} - 2 \times \frac{17}{7} \\
 &= \frac{99 - 34}{7} \\
 &= \frac{65}{7}.
 \end{aligned}$$

故选D.

【标注】【知识点】空间向量共面问题

33. 下列各组向量共面的是 () .

- A. $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$
- B. $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$
- C. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$
- D. $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$

【答案】 A

【解析】 利用向量共面定理可知：

如果存在实数 m , n 使得 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ 成立 , 则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面 .

经过判定：对于A： $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$, 而B , C , D不满足向量共面定理 .

故选：A .

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决异面直线所成角问题