

直线与椭圆的位置关系（二）练习题

1. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 $P\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆上, 且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 0$, $\odot O$ 是以 F_1F_2 为直径的圆, 直线 $l: y = kx + m$ 与 $\odot O$ 相切, 并且与椭圆交于不同的两点 A, B .
- (1) 求椭圆的标准方程.
- (2) 当 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}$ 时, 求 k 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ± 1 .

【解析】 (1) 依题意, 可知 $PF_1 \perp F_1F_2$,

$$\begin{cases} c = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 椭圆方程为: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 直线 $l: y = kx + m$ 与 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ 相切,

则 $\frac{|m|}{\sqrt{b^2 + 1}} = 1$ 即 $m^2 = k^2 + 1$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$,

$\therefore$ 直线 l 与椭圆交于不同两点 A, B ,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$\therefore \Delta > 0 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2} \\ x_1x_2 = \frac{2m^2-2}{1+2k^2} \end{cases},$$

$$y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m)$$

$$= k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$$

$$= \frac{m^2 - 2k^2}{1 + 2k^2} = \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2}.$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1 + k^2}{1 + 2k^2} = \frac{2}{3},$$

$\therefore k = \pm 1$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；求曲线方程的问题；向量问题

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为8, 且经过点 $A(0, 2\sqrt{3})$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 是否存在过点 $E(0, -4)$ 的直线 l 交椭圆于点 R, T , 且满足 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OT} = \frac{16}{7}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(2) 存在. $x + y + 4 = 0$ 或 $x - y - 4 = 0$.

【解析】 (1) 由题意得 $b = 2\sqrt{3}$, $2a = 8$, 即 $a = 4$,

$\therefore$ 椭圆的方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(2) 假设存在满足题意得直线 l , 易知当直线的斜率不存在时, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OT} < 0$, 不满足题意.

故设直线 l 的斜率为 k , $R(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$,

$$\therefore \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OT} = \frac{16}{7},$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \frac{16}{7},$$

由 $\begin{cases} y = kx - 4 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$ 可得 $(3 + 4k^2)x^2 - 32kx + 16 = 0$, 由

$$\Delta = (-32k)^2 - 4(3 + 4k^2) \cdot 16 > 0,$$

$$\text{解得 } k^2 > \frac{1}{4} \text{ ①.}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{32k}{3 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{16}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore y_1 \cdot y_2 = (kx_1 - 4)(kx_2 - 4) = k^2 x_1 \cdot x_2 - 4k(x_1 + x_2) + 16,$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \frac{16}{3 + 4k^2} + \frac{16k^2}{3 + 4k^2} - \frac{128k^2}{3 + 4k^2} + 16 = \frac{16}{7},$$

$$\therefore k^2 = 1 \text{ ②,}$$

由①、②解得 $k = \pm 1$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \pm x - 4$,

故存在直线 $l: x + y + 4 = 0$, 或 $x - y - 4 = 0$, 满足题意.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 向量问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ 分别是椭圆的左、右焦点, 过点 $F_2(1, 0)$ 作直线 l 于椭圆 C 交于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【解析】 (1) $\because$ 焦点坐标为 $(1, 0)$,

$$\therefore c = 1,$$

$$\because \triangle ABF_1 \text{ 周长} = |AF_1| + |BF_1| + |AF_2| + |BF_2| = 4a = 4\sqrt{2},$$

$$a = \sqrt{2},$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆方程 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) ① 当直线斜率不存在时,

$$\text{直线 } l \text{ 方程为 } x = 1,$$

$$\text{那么 } A \text{ 点坐标为 } \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$B \text{ 点坐标为 } \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\therefore$ 不成立.

② 当斜率存在时,

$$\text{直线方程可设为 } y = k(x - 1),$$

$$\because \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB},$$

$$\text{设 } A \text{ 点坐标为 } (x_1, y_1),$$

$$B \text{ 点坐标为 } (x_2, y_2),$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-4k^2}{1 + 2k^2} = \frac{4k^2}{1 + 2k^2},$$

$$y_1 y_2 = k^2[x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1],$$

$$y_1 y_2 = -\frac{1}{1 + 2k^2},$$

$$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

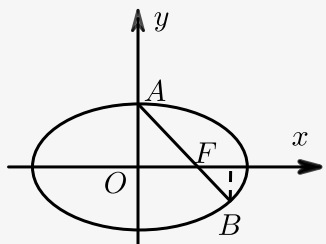
【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(2\sqrt{2}, 0)$ ， A 是椭圆短轴的一个端点，直线 AF 与椭圆另一交点为 B ，且 $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{BF}$ ，
- (1) 求椭圆方程。
- (2) 若斜率为 1 的直线 l 交椭圆于 C, D ，且 CD 为底边的等腰三角形的顶点为 $P(-3, 2)$ ，求 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的值。

【答案】(1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$ 。

【解析】(1)



椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 $F(2\sqrt{2}, 0)$ ，

A 是椭圆短轴的一个端点，

设 A 为上顶点 $(0, b)$ ，

直线 AF 与椭圆另一个交点为 B ，且 $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{BF}$ ，

设 $B(x_0, y_0)$ ，

$$\overrightarrow{AF} = (2\sqrt{2}, -b),$$

$$\overrightarrow{BF} = (2\sqrt{2} - x_0, -y_0),$$

$$\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{BF}$$

$$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{2} = -5(2\sqrt{2} - x_0) \\ -b = -5(-y_0) \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_0 = -\frac{b}{5} \end{cases},$$

$\therefore (x_0, y_0)$ 在椭圆上，

$$\therefore \frac{288}{a^2} + \frac{b^2}{25} = 1,$$

$$\therefore \frac{288}{25a^2} = \frac{24}{25},$$

$$\therefore a^2 = 12,$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 4,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 斜率为1的直线 l 交椭圆于 C, D 两点,

且 CD 为底边的等腰三角形的顶点为 $P(-3, 2)$,

$$\text{设 } CD \text{ 的中点为 } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

$$\therefore PM \perp CD, \text{ 即 } k_{PM} = -1,$$

$$\text{设 } C(x_1, y_1), D(x_2, y_2),$$

$$\overrightarrow{PC} = (x_1 + 3, y_1 - 2), \overrightarrow{PD} = (x_2 + 3, y_2 - 2),$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = (x_1 + 3)(x_2 + 3) + (y_1 - 2)(y_2 - 2).$$

$$\text{设 } l \text{ 为: } y = x + m,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 + y_1y_2 - 2(y_1 + y_2) + 4$$

$$= x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 + x_1x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) + m^2 - 4m + 4$$

$$= 2x_1x_2 + (m + 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 4m + 13,$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x + m \end{cases} \text{联立得:}$$

$$x^2 + 3(x^2 + 2mx + m^2) - 12 = 0,$$

$$4x^2 + 6mx + 3m^2 - 12 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}m, x_1x_2 = \frac{3m^2 - 12}{4},$$

$$\Delta = 36m^2 - 4 \cdot 4(3m^2 - 12) = -12(m^2 - 16) > 0,$$

$$\therefore -4 < m < 4,$$

$$CD \text{ 中点 } M\left(-\frac{3}{4}m, \frac{1}{4}m\right),$$

$$\therefore k_{PM} = \frac{\frac{1}{4}m - 2}{-\frac{3}{4}m + 3} = -1,$$

$$\frac{1}{4}m - 2 = \frac{3}{4}m - 3,$$

$$m = 2, \text{ 满足条件,}$$

$$\text{此时 } x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 + (2 + 1)(-3) + 4 - 8 + 13 = 0.$$

【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

5. 已知中心在原点 O ，焦点在 x 轴上的椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，点 A, B 分别是椭圆 C 的长轴、短轴的端点，点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 已知点 $E(3, 0)$ ，设点 P, Q 是椭圆 C 上的两个动点，满足 $EP \perp EQ$ ，求 $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{QP}$ 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

(2) $[6, 81]$ 。

【解析】 (1) 由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，
得 $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore a = 2b,$$

$$\therefore \text{原点 } O \text{ 到 } AB \text{ 的距离为 } \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore b^2 = 9, a^2 = 36,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(2) $\because EP \perp EQ$,

$$\therefore \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EQ} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{EP}(\overrightarrow{EP} - \overrightarrow{EQ}) = \overrightarrow{EP}^2,$$

$$\text{设 } P(x, y), \text{ 则: } \overrightarrow{EP}^2 = (x - 3)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + 9 - \frac{x^2}{4},$$

$$= \frac{3}{4}(x - 4)^2 + 6,$$

$$\therefore -6 \leq x \leq 6,$$

$$\therefore 6 \leq \frac{3}{4}(x - 4)^2 + 6 \leq 81,$$

$$\therefore \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{QP} \in [6, 81].$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；椭圆的标准方程

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆有且只有一个交点 P ，且与直线 $x = 4$ 交于点 Q ，设

$M(t, 0) (t \in \mathbf{R})$ ，且满足 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ 恒成立，求 t 的值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $t = 1$.

【解析】 (1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 由已知有 $c = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $a = 2$.

$b = \sqrt{3}$, $c = 1$.

故椭圆 c 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,

消去 y 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,

所以 $\Delta = 64k^2m^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12)$,

即 $m^2 = 3 + 4k^2$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = -\frac{4km}{3 + 4k^2} = -\frac{4k}{m}$,

$y_0 = kx_0 + m = -\frac{4k^2}{m} + m = \frac{3}{m}$,

即 $P\left(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m}\right)$.

因 $Q(4, 4k + m)$,

所以 $\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{4k}{m} - t, \frac{3}{m}\right)$, $\overrightarrow{MQ} = (4 - t, 4k + m)$,

由 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ 恒成立可得,

即 $\left(-\frac{4k}{m} - t, \frac{3}{m}\right)(4 - t, 4k + m) = t^2 - 4t + 3 + \frac{4k}{m}(t - 1) = 0$ 恒成立,

故 $\begin{cases} t = 1 \\ t^2 - 4t + 3 = 0 \end{cases}$

所以 $t = 1$.

【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

7. 已知 $A(0, 2)$, $B(3, 1)$ 是椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的两点.

(1) 求椭圆 G 的离心率;

(2) 已知直线 l 过点 B , 且与椭圆 G 交于另一点 C (不同于点 A), 若以 BC 为直径的圆经过点 A , 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $y = \frac{2}{3}x - 1$.

【解析】 (1) 由已知 $b = 2$,

由点 $B(3, 1)$ 在椭圆 G 上可得 $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$,

解得 $a^2 = 12, a = 2\sqrt{3}$.

所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 8, c = 2\sqrt{2}$,

所以椭圆G的离心率是 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 因为以BC为直径的圆经过点A, 所以 $AB \perp AC$,

由斜率公式和 $A(0, 2), B(3, 1)$ 可得 $k_{AB} = -\frac{1}{3}$,

所以 $k_{AC} = 3$,

设直线AC的方程为 $y = 3x + 2$.

由 $\begin{cases} y = 3x + 2, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得 $7x^2 + 9x = 0$,

由题设条件可得 $x_A = 0, x_C = -\frac{9}{7}$,

所以 $C(-\frac{9}{7}, -\frac{13}{7})$,

所以直线BC的方程为 $y = \frac{2}{3}x - 1$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；椭圆的离心率；直线和椭圆的位置关系

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为4, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 斜率为 k 的直线 l 经过点 $M(0, 1)$, 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B .

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 当椭圆 C 的右焦点 F 在以 AB 为直径的圆内时, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) $\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 直线 l 的斜率 k 的范围为 $(-\infty, \frac{1}{8})$.

【解析】 (1) $\therefore$ 焦距为4,

$\therefore c = 2$, 又 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore a = 2\sqrt{2}, b = 2$,

$\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 l 方程: $y = kx + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立椭圆方程, 消去 y , 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kx - 6 = 0, \Delta > 0$ 恒成立,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-4k}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{-6}{1 + 2k^2}$, 由 (1) 知右焦点 F 坐标为 $(2, 0)$,

$\therefore$ 右焦点 F 在圆内部, $\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF} < 0$,

$\therefore (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1y_2 < 0$,

即 $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + k^2x_1x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 < 0$,

$$\begin{aligned} \therefore (1+2k^2)\frac{-6}{1+2k^2} + (k-2)\frac{-4}{1+2k^2} + 5 &= \frac{8k-1}{1+2k^2} < 0, \\ \therefore k &< \frac{1}{8}, \\ \text{经检验得} k &< \frac{1}{8} \text{ 时, 直线} l \text{ 与椭圆相交,} \\ \therefore \text{直线} l \text{ 的斜率} k &\text{ 的范围为 } \left(-\infty, \frac{1}{8}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

9. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(0, \sqrt{2})$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 过点 $(-1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 A, B 两点, 判断点 $G\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) G 在圆外, 理由见解析.

【解析】 (1) 由已知得:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2}, \frac{c}{a} = \sqrt{2}, a^2 = b^2 + c^2, \\ \text{解得: } a &= 2, b = c = \sqrt{2}, \\ \therefore \text{椭圆} E \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

AB 中点为 $H(x_0, y_0)$,

$$l: x = my - 1,$$

$$\begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得: } (m^2 + 2)y^2 - 2my - 3 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2},$$

$$\therefore y_0 = \frac{m}{m^2 + 2}, G\left(-\frac{9}{4}, 0\right),$$

$\therefore$

$$|GH|^2 = \left(x_0 + \frac{9}{4}\right)^2 + y_0^2 = \left(my_0 + \frac{5}{4}\right)^2 + y_0^2 = (m^2 + 1)y_0^2 + \frac{5}{2}my_0 + \frac{25}{16}$$

,

$$\frac{|AB|^2}{4} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{4} = \frac{(m^2 + 1)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]}{4} = (m^2 + 1)(y_0^2 - y_1 y_2)$$

,

$$\begin{aligned}
 \text{故 } |GH|^2 - \frac{|AB|^2}{4} &= \frac{5}{2}my_0 + (m^2 + 1)y_1y_2 + \frac{25}{16} \\
 &= \frac{5m^2}{2(m^2 + 2)} - \frac{3(m^2 + 1)}{m^2 + 2} + \frac{25}{16} \\
 &= \frac{17m^2 + 2}{16(m^2 + 2)} > 0, \\
 \therefore |GH| &> \frac{|AB|}{2},
 \end{aligned}$$

故 G 在以 AB 为直径的圆外.

【标注】【知识点】点与圆的位置关系问题

10. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 45° , F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的焦距.

(2) 如果 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 求椭圆 C 的方程.

【答案】 (1) 4.

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

【解析】 (1) 设焦距为 $2c$, 由已知可得 F_1 到直线 l 的距离 $\sqrt{3}c = 2\sqrt{3}$,

所以 $c = 2$,

所以椭圆 C 的焦距为 4.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 可设 $y_1 < 0, y_2 > 0$,

直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - 2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \sqrt{3}(x - 2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \frac{3a^2 + b^2}{3a^2b^2}y^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3a^2}y + \frac{4}{a^2} - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } y_1 = \frac{-\sqrt{3}b^2(2 + 2a)}{3a^2 + b^2}, y_2 = \frac{-\sqrt{3}b^2(2 - 2a)}{3a^2 + b^2}.$$

因为 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$,

所以 $-y_1 = 2y_2$,

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}b^2(2 + 2a)}{3a^2 + b^2} = 2 \cdot \frac{-\sqrt{3}b^2(2 - 2a)}{3a^2 + b^2}.$$

得 $a = 3$. 而 $a^2 - b^2 = 4$,

所以 $b = \sqrt{5}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 椭圆的定义; 共线比例问题

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆 C 于点 D , $|DF_2| = 1$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A 、 B 两点, 若 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $\frac{3\sqrt{14}}{8}$.

【解析】 (1) 由题可知, $F_2(c, 0)$,

当 $x = c$ 时, 代入椭圆 C 方程, 得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$,

$$\text{则} \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ |DF_2| = \frac{b^2}{a} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{2} \\ c = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由题可知, 直线 l 的斜率显然存在且不为 0,

$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, 设直线 l 方程为: $x = my - \sqrt{2}$,

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立: } \begin{cases} x = my - \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{得: } (m^2 + 2)y^2 - 2\sqrt{2}my - 2 = 0,$$

$$\Delta = (2\sqrt{2}m)^2 + 8(m^2 + 2) > 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2 + 2},$$

$$\overrightarrow{AF_1} = (-1 - x_1, -y_1), \overrightarrow{F_1B} = (x_2 + 1, y_2),$$

由 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$ 可得: $y_1 = -2y_2$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -y_2 = \frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}, y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2},$$

$$y_1 \cdot y_2 = -2y_2^2 = -2\left(-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}\right)^2 = \frac{-2}{m^2 + 2}, \text{解得: } m^2 = \frac{2}{7},$$

$\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOF_1} + S_{\triangle BOF_1}$

$$= \frac{1}{2} \times |OF_1| \times |y_1 - y_2|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{8m^2}{(m^2 + 2)^2} + \frac{8}{m^2 + 2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{8\sqrt{14}}{8},$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 的面积为 } \frac{3\sqrt{14}}{8}.$$

【标注】【知识点】面积问题；共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

12. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，且左、右焦点与短轴的一个端点是等边三角形的三个顶点，点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，过点 A_1 的直线交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P ，交直线 $x = 4$ 于点 D ，直线 A_2D 与椭圆 C 的另一交点为 G ，直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H 。
- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 若 $HG \perp A_1D$ ，试求直线 A_1D 的方程。
- (3) 如果 $\overrightarrow{A_1H} = \lambda \overrightarrow{A_1P}$ ，试求 λ 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $y = \frac{\sqrt{6}}{6}(x+2)$ 。

(3) $\lambda \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$ 。

【解析】 (1) 由题意得：

$$\begin{cases} b = \sqrt{3}c \\ \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得： $c = 1, b = \sqrt{3}, a = 2$ ，

因此椭圆 C 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。①

(2) 由上一问可得 $A_1(-2, 0)$ ，

设直线 $A_1D: y = k(x-2) (k > 0)$ ，②

则 $D(4, 6k)$ ，

又 $A_2(2, 0)$ ，

所以直线 $A_2D: y = 3k(x-2)$ ，

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = 3k(x-2) \end{cases}$ ，

整理得，

$$(1 + 12k^2)x^2 - 48k^2x + 48k^2 - 4 = 0,$$

可得： $G\left(\frac{24k^2 - 2}{12k^2 + 1}, \frac{12k}{12k^2 + 1}\right)$ ，

则直线 OG 的斜率为 $k_{OG} = \frac{6k}{12k^2 - 1}$ 。③

因为 $OG \perp A_1D$ ，

$$\text{故 } \frac{6k}{12k^2 - 1} \cdot k = -1,$$

$$\text{又 } k > 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{故直线 } A_1D \text{ 的方程为: } y = \frac{\sqrt{6}}{6}(x+2).$$

$$(3) \text{ 由上一问中③知直线 } OG: y = \frac{6k}{12k^2 - 1}x,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{6k}{12k^2 - 1}x, \\ y = k(x+2) \end{cases},$$

$$\text{可得: } H\left(\frac{-24k^2 + 2}{12k^2 + 5}, \frac{12k}{12k^2 + 5}\right),$$

$$\text{联立①②得: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x+2) \end{cases},$$

$$\text{可得: } P\left(\frac{6 - 8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3}\right),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{A_1H} = \lambda \overrightarrow{A_1P},$$

$$\text{所以 } (x_H + 2, y_H) = \lambda(x_P + 2, y_H),$$

$$\text{则 } y_H = \lambda y_P,$$

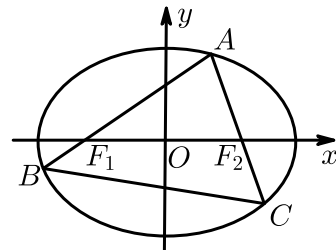
$$\text{因为 } \lambda = \frac{y_H}{y_P} = \frac{\frac{12k}{12k^2 + 5}}{\frac{12k}{4k^2 + 3}} = \frac{4k^2 + 3}{12k^2 + 5} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3(12k^2 + 5)},$$

$$\text{因为 } k > 0,$$

$$\text{所以 } \lambda \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right).$$

【标注】【知识点】共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；判定两条直线的位置关系

13. 如图, A 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一个动点, 弦 AB, AC 分别过焦点 F_1, F_2 . 当 AC 垂直于 x 轴时, 恰好 $|AF_1| : |AF_2| = 3 : 1$.



(1) 求该椭圆的离心率;

(2) 设 $\overrightarrow{AF_1} = \lambda_1 \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{AF_2} = \lambda_2 \overrightarrow{F_2C}$, 试判断 $\lambda_1 + \lambda_2$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 是定值6.

【解析】(1) 当AC垂直于x轴时, $|AF_1| : |AF_2| = 3 : 1$, 由 $|AF_1| + |AF_2| = 2a$,

得 $|AF_1| = \frac{3a}{2}$, $|AF_2| = \frac{a}{2}$ 在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中, 解得 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 由 $e = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 故椭圆方程可化简为 $x^2 + 2y^2 = 2c^2$.

设 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则 $\lambda_1 = -\frac{y_0}{y_1}$, $\lambda_2 = -\frac{y_0}{y_2}$.

①若AC斜率存在, 设 $AC: y = \frac{y_0}{x_0 - c}(x - c)$, 与椭圆方程联立消去x得:

$(3c^2 - 2cx_0)y^2 + 2cy_0(x_0 - c)y - c^2y_0^2 = 0$, 由韦达定理:

$y_0y_2 = \frac{-c^2y_0^2}{3c^2 - 2cx_0}$, 故 $\lambda_2 = -\frac{y_0}{y_2} = \frac{3c - 2x_0}{c}$.

同理由 $AB: y = \frac{y_0}{x_0 + c}(x + c)$, 重复上述步骤可求得 $\lambda_1 = -\frac{y_0}{y_1} = \frac{3c + 2x_0}{c}$,

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$.

②当AC斜率不存在时, $AC: x = c$, 由椭圆的对称性得 $\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2C}} = \frac{|\overrightarrow{AF_2}|}{|\overrightarrow{F_2C}|} = 1$

, 此时可求得 $\lambda_1 = 5$, 所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ 同样成立.

综上, $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系