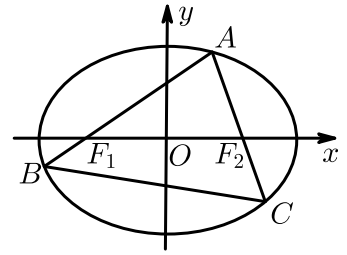


直线与椭圆的位置关系（二）练习题

1. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 $P\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆上, 且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 0$, $\odot O$ 是以 F_1F_2 为直径的圆, 直线 $l: y = kx + m$ 与 $\odot O$ 相切, 并且与椭圆交于不同的两点 A, B .
 - (1) 求椭圆的标准方程.
 - (2) 当 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}$ 时, 求 k 的值.
2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为8, 且经过点 $A(0, 2\sqrt{3})$.
 - (1) 求椭圆的方程.
 - (2) 是否存在过点 $E(0, -4)$ 的直线 l 交椭圆于点 R, T , 且满足 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OT} = \frac{16}{7}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.
3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ 分别是椭圆的左、右焦点, 过点 $F_2(1, 0)$ 作直线 l 于椭圆 C 交于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.
 - (1) 求椭圆 C 的方程.
 - (2) 若 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 求直线 l 的方程.
4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(2\sqrt{2}, 0)$, A 是椭圆短轴的一个端点, 直线 AF 与椭圆另一交点为 B , 且 $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{BF}$,
 - (1) 求椭圆方程.
 - (2) 若斜率为1的直线 l 交椭圆于 C, D , 且 CD 为底边的等腰三角形的顶点为 $P(-3, 2)$, 求 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的值.
5. 已知中心在原点 O , 焦点在 x 轴上的椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 A, B 分别是椭圆 C 的长轴、短轴的端点, 点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.
 - (1) 求椭圆 C 的标准方程.
 - (2) 已知点 $E(3, 0)$, 设点 P, Q 是椭圆 C 上的两个动点, 满足 $EP \perp EQ$, 求 $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{QP}$ 的取值范围.
6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$. 离心率为 $\frac{1}{2}$.
 - (1) 求椭圆的方程.
 - (2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆有且只有一个交点 P , 且与直线 $x = 4$ 交于点 Q , 设 $M(t, 0) (t \in \mathbf{R})$, 且满足 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ 恒成立, 求 t 的值.

7. 已知 $A(0, 2), B(3, 1)$ 是椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的两点 .
- (1) 求椭圆 G 的离心率 ;
 - (2) 已知直线 l 过点 B , 且与椭圆 G 交于另一点 C (不同于点 A) , 若以 BC 为直径的圆经过点 A , 求直线 l 的方程 .
8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 斜率为 k 的直线 l 经过点 $M(0, 1)$, 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B .
- (1) 求椭圆 C 的标准方程 .
 - (2) 当椭圆 C 的右焦点 F 在以 AB 为直径的圆内时 , 求 k 的取值范围 .
9. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程 .
 - (2) 过点 $(-1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 A, B 两点 , 判断点 $G\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系 , 并说明理由 .
10. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点 , 过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 , 直线 l 的倾斜角为 45° , F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的焦距 .
 - (2) 如果 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 求椭圆 C 的方程 .
11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆 C 于点 D , $|DF_2| = 1$.
- (1) 求椭圆 C 的方程 .
 - (2) 过 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 , 若 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$, 求 $\triangle AOB$ 的面积 .
12. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 且左、右焦点与短轴的一个端点是等边三角形的三个顶点 , 点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上 , 过点 A_1 的直线交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P , 交直线 $x = 4$ 于点 D , 直线 A_2D 与椭圆 C 的另一交点为 G , 直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H .
- (1) 求椭圆 C 的标准方程 .
 - (2) 若 $HG \perp A_1D$, 试求直线 A_1D 的方程 .
 - (3) 如果 $\overrightarrow{A_1H} = \lambda \overrightarrow{A_1P}$, 试求 λ 的取值范围 .
13. 如图 , A 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一个动点 , 弦 AB, AC 分别过焦点 F_1, F_2 . 当 AC 垂直于 x 轴时 , 恰好 $|AF_1| : |AF_2| = 3 : 1$.



- (1) 求该椭圆的离心率；
- (2) 设 $\overrightarrow{AF_1} = \lambda_1 \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{AF_2} = \lambda_2 \overrightarrow{F_2C}$, 试判断 $\lambda_1 + \lambda_2$ 是否为定值？若是，则求出该定值；若不是，请说明理由．