

直线与椭圆的位置关系 (二)

一、 向量数量积

我们需要知道的是向量数量积在圆锥曲线位置关系中运用的很多,有些情况是题目所求就是数量积的形式,有些情况是给出了位置关系,我们需要有向量数量积加以转化,下面就是几种常见的给出位置关系,我们将之转化为向量数量积进行计算的形式。

1. 以 AB 为直径的圆过原点 $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

$$y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2,$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \quad x_1x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

$$0 = x_1x_2 + y_1y_2 = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1)}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{\frac{2k^2m^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m^2,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$, 整体处理得:

$$(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1) - \frac{2k^2m^2}{b^2} + m^2(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = 0,$$

消去高次项 $\frac{k^2m^2}{b^2}$ 得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} = 0$ 即找了 a, b, m, k 的关系式.

2. 角度问题, 成锐角或钝角

原点 O 在以 AB 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$,

$$\text{易得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} < 0;$$

原点 O 在以 AB 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$,

$$\text{易得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} > 0.$$

1. 典型例题

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为4, 且与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 有相同的离心率, 斜率为 k 的直线 l 经过 $M(0, 1)$, 与椭圆 C 交于不同两点 A, B .

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 当椭圆 C 的右焦点 F 在以 AB 为直径的圆内时, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$(2) \left(-\infty, \frac{1}{8}\right).$$

【解析】(1) ∵ 焦距为4,

$$\therefore c = 2,$$

$$\text{又} \because \text{椭圆 } x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ 离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2}, b = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 标准方程为: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$,

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kx - 6 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-4k}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{-6}{1 + 2k^2},$$

又 ∵ $F(2, 0)$ 在圆内部,

$$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF} < 0,$$

$$\therefore (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 < 0,$$

$$\text{即 } x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 < 0,$$

$$\therefore (1 + k^2) \cdot \frac{-6}{1 + 2k^2} + (k - 2) \cdot \frac{-4k}{1 + 2k^2} + 5 = \frac{8k - 1}{1 + 2k^2} < 0,$$

$$\therefore k < \frac{1}{8}, \text{ 直线 } l \text{ 与椭圆相交},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的斜率 } k \text{ 的范围为 } \left(-\infty, \frac{1}{8}\right).$$

【标注】【知识点】向量问题；椭圆的离心率；直线和椭圆的位置关系

备注：2018-2019学年天津河西区天津市新华中学高二上学期中第16题

2. 设 M 点为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 M 在 x 轴上的投影为 N . 动点 P 满足 $\overrightarrow{2PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN}$, 动点 P 的轨迹为 E .

(1) 求 E 的方程.

(2) 设 E 的左顶点为 D , 若直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于两点 A, B (A, B 不是左右顶点), 且满足 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|$, 求证: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) 证明见解析, $\left(-\frac{2}{7}, 0\right).$

【解析】(1) 设P点 (x, y) , M点 (x_0, y_0) ,

由题意可知 $N(x_0, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{2PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN},$$

$$\therefore 2(x_0 - x, -y) = \sqrt{3}(0, -y_0),$$

$$\text{即 } x_0 = x, y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}y,$$

又 $\because$ 点M在圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上,

$$\therefore x_0^2 + y_0^2 = 4, \text{ 代入得: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

$$\therefore E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由(1)可知 $D(-2, 0)$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得: } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } y_1y_2 &= (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2, \\ &= \frac{3m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2}, \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|,$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB} \text{ 即 } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0,$$

$$\text{即 } (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_2 + 2, y_2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1y_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - 2 \times \frac{8km}{3 + 4k^2} + 4 + \frac{3m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2} = 0,$$

$$\therefore 7m^2 - 16mk + 4k^2 = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = 2k, m_2 = \frac{2}{7}k,$$

当 $m_1 = 2k$ 时,

l 的方程为 $y = kx + 2k = k(x + 2)$, 恒过 $(-2, 0)$ 与已知矛盾,

当 $m_2 = \frac{2}{7}k$ 时, l 的方程为 $y = kx + \frac{2}{7}k = k\left(x + \frac{2}{7}\right)$, 恒过 $\left(-\frac{2}{7}, 0\right)$,

$\therefore$ 直线 l 过定点, 定点坐标为 $\left(-\frac{2}{7}, 0\right)$.

【标注】【知识点】求曲线方程的问题; 定点问题; 直线和椭圆的位置关系

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 若椭圆 C 的一个顶点坐标是 $(0, -2)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 $P(4, 0)$ 的直线与椭圆交于 M, N 两点.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 求 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $[-8, 6)$.

【解析】 (1) $b = 2, e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}, \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$
 $1 - \frac{4}{a^2} = \frac{1}{2}, a^2 = 8, \therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 由题意可知直线的斜率存在, 设直线 l 方程为 $y = k(x - 4)$,

设直线与椭圆的交点坐标为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, $\therefore$ 联立 $\begin{cases} y = k(x - 4) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

$(1 + 2k^2)x^2 - 16k^2x + 32k^2 - 8 = 0, \Delta > 0$

$\Delta = (16k^2)^2 - 4(1 + 2k^2)(32k^2 - 8) > 0$

$\Delta = 256k^4 - 64k^2 - 256k^4 + 32 > 0,$

$\Delta = -64k^2 + 32 > 0,$

$\therefore 64k^2 < 32,$

$\therefore k^2 < \frac{1}{2},$

$\therefore 0 \leq k^2 < \frac{1}{2},$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2},$

$x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{32k^2 - 8}{1 + 2k^2}, y_1y_2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2},$

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{32k^2 - 8}{1 + 2k^2} + \frac{8k^2}{1 + 2k^2} = \frac{40k^2 - 8}{1 + 2k^2},$

分离常数 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 20 \cdot \frac{28}{1 + 2k^2} \in [-8, 6)$.

【标注】【知识点】向量问题

备注：2017-2018学年天津高二上学期期末文科新四区联考第19题14分

2. 巩固练习

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以原点 O 为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2)

已知直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 A 、 B 两点，若以线段 AB 为直径的圆恰好经过坐标原点 O ，试求出 k 的取值。

【答案】 (1) $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $k = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$.

【解析】 (1) 由题意知： $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$,
 $\therefore a^2 = 4b^2$,

又： $\because$ 圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 与直线 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 相切，

$\therefore b = 1, a^2 = 4$,

$\therefore C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

AB 中点为 M ,

由 $\begin{cases} y = kx - \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$,

得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}kx + 8 = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{8}{1 + 4k^2}$,

$\therefore x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}$,

$y_M = kx_M - \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{1 + 4k^2}$,

$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$,

$= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$,

$= \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{(1 + k^2)(2k^2 - 1)}}{1 + 4k^2}$,

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆的方程为

$$\left(x - \frac{4\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{1 + 4k^2}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{(1 + k^2)(2k^2 - 1)}}{1 + 4k^2}\right)^2 ,$$

又： $\because$ 该圆经过原点，

$$\therefore \left(0 - \frac{4\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{1 + 4k^2}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{(1 + k^2)(2k^2 - 1)}}{1 + 4k^2}\right)^2 ,$$

化简得 $(4k^2 - 11)(4k^2 + 1) = 0$,

$\therefore k^2 = \frac{11}{4}$,

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；向量问题

备注：2017-2018学年天津西青区高二上学期期末理科第20题14分

5. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点，过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点。若

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8, \text{ 求 } k \text{ 的值。}$$

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) $k = \pm\sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) 根据椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 。

$\therefore$ 过焦点且垂直于长轴的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\therefore \frac{2b^2}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } b = \sqrt{2}, c = 1, a = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 直线 $CD: y = k(x+1)$ ，设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } (2+3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{2+3k^2}, x_1x_2 = \frac{3k^2-6}{2+3k^2},$$

$$\text{又 } A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$= (x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot (\sqrt{3} - x_2, -y_2) + (x_2 + \sqrt{3}, y_2) \cdot (\sqrt{3} - x_1, -y_1)$$

$$= 6 - (2+2k^2)x_1x_2 - 2k^2(x_1+x_2) - 2k^2$$

$$= 6 + \frac{2k^2+12}{2+3k^2} = 8,$$

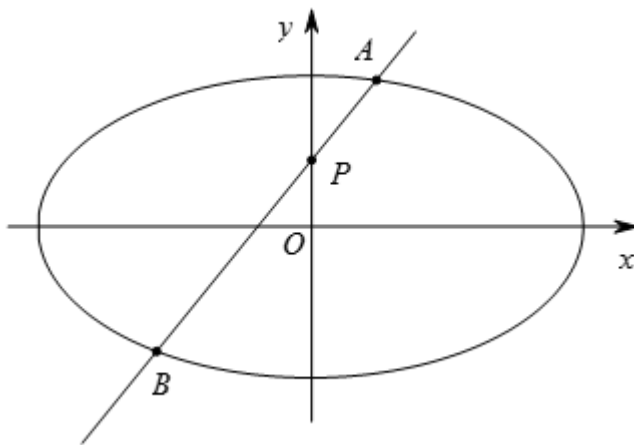
$$\text{解得 } k = \pm\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

备注：2017-2018学年12月天津河北区天津市第二中学高二上学期月考理科第18题13分

二、共线比例问题

比例问题



共线问题可以用向量 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 来解答。

设A点坐标为 (x_1, y_1) , B点坐标为 (x_2, y_2) , P点坐标为 $(0, t)$

则有 $\overrightarrow{PA} = (x_1, y_1 - t)$, $\overrightarrow{PB} = (x_2, y_2 - t)$, 由 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$

可得 $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 - t = \lambda(y_1 - t) \end{cases}$, 直线AB的方程可设为 $y = kx + t$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + t \end{cases}$, 消去 y 留下关于 x 的一元二次方程, 则可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(k) \\ x_1 x_2 = g(k) \end{cases}$

又因为 $x_2 = \lambda x_1$, 这样则有 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_1 = f(k) \\ \lambda x_1^2 = g(k) \end{cases}$, 这样消去 x_1 即可得 $\frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} = \frac{f^2(k)}{g(k)}$

这样在我们知道 λ 的情况下可以求解 k , 知道 k 也可以求解 λ 。

教法备注：

设直线AB与 x 轴交点为 $Q(s, 0)$, 若 $\overrightarrow{QA} = \mu \overrightarrow{QB}$, 可以引导学生思考这样的情况下满足的关系式, 在这个过程中我们会发现我们在联立直线和椭圆方程时消去 x 留下关于 y 的一元二次方程可能计算会更加方便, 那么此时我们设的直线方程的形式可以是 $x = my + s$ 。

共线问题

我们在处理三点共线问题的主要思路是转化成向量共线或者斜率相等来计算。

A, B, C 三点共线等价于 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 或者 $K_{AB} = K_{AC}$

1. 典型例题

比例问题

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，右焦点 F 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合， O 为坐标原点。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 A, B 是椭圆 C 上的不同两点，点 $D(-4, 0)$ ，且满足 $\overrightarrow{DA} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ，若 $\lambda \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$ ，求直线 AB 的斜率 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $\left[-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{\sqrt{21}}{22}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{21}}{22}, \frac{\sqrt{5}}{6}\right]$ 。

【解析】 (1) 由已知 $b = \sqrt{3}$ ， $c = 1$ ， $a = 2$ ，所以椭圆的方程： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $\overrightarrow{DA} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ， D, A, B 三点共线，

$D(-4, 0)$ ，且直线 AB 的斜率一定存在，

所以 AB 的方程 $y = k(x + 4)$ ，

与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立可得：

$$(3 + 4k^2)y^2 - 24ky + 36k^2 = 0,$$

$$\Delta > 0, k^2 < \frac{1}{4},$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), y_1 + y_2 = \frac{24k}{3 + 4k^2}, y_1 y_2 = \frac{36k^2}{3 + 4k^2}, \quad ①$$

又 $\overrightarrow{DA} = \lambda \overrightarrow{DB}$ 得：

$$(x_1 + 4, y_1) = \lambda(x_2 + 4, y_2), y_1 = \lambda y_2, \quad ②$$

将②式代入①式，消去 y_2 得：

$$\frac{16}{3 + 4k^2} = \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \lambda + 2,$$

当 $\lambda \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$ 时， $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \lambda + 2$ 是减函数，

$$\therefore \frac{9}{2} \leq \frac{16}{3 + 4k^2} \leq \frac{121}{24},$$

$$\text{解得 } \left[-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{\sqrt{21}}{22}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{21}}{22}, \frac{\sqrt{5}}{6}\right],$$

$$\therefore \text{直线} AB \text{的斜率的取值范围是} \left[-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{\sqrt{21}}{22} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{21}}{22}, \frac{\sqrt{5}}{6} \right].$$

【标注】【知识点】共线比例问题；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

7. 已知椭圆 C 的中心为坐标原点 O ，一个长轴端点为 $(0, 2)$ ，短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形，直线 l 与 y 轴交于点 $P(0, m)$ ，与椭圆 C 交于相异两点 A, B ，且 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 。
- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 求 m 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$.

(2) $\left(-2, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right)$.

【解析】 (1) 根据题意知椭圆的焦点在 y 轴上，设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，

根据题意知 $a = 2, b = c$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，

则 $b = \sqrt{2}$ ，

所以椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，根据题意，直线 l 的斜率存在，

设其方程为 $y = kx + m$ ，与椭圆方程联立，

$$\text{即} \begin{cases} y^2 + 2x^2 = 4 \\ y = kx + m \end{cases},$$

则 $(2 + k^2)x^2 + 2mkx + m^2 - 4 = 0$ ，

$$\Delta = (2mk)^2 - 4(2 + k^2)(m^2 - 4) > 0,$$

$$\text{由韦达定理知} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2mk}{2 + k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 4}{2 + k^2} \end{cases},$$

又 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ ，

即有 $(-x_1, m - y_1) = 2(x_2, y_2 - m)$ ，

$$\therefore -x_1 = 2x_2,$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = -2x_2^2 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{m^2 - 4}{2 + k^2} = -2 \left(\frac{2mk}{2 + k^2} \right)^2,$$

整理得 $(9m^2 - 4)k^2 = 8 - 2m^2$ ，

又 $9m^2 - 4 = 0$ 时不成立，所以 $k^2 = \frac{8 - 2m^2}{9m^2 - 4} > 0$ ，

得 $\frac{4}{9} < m^2 < 4$ ，

此时 $\Delta > 0$,

所以 m 的取值范围为 $\left(-2, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$,

当直线斜率不存在时, A 和 B 为长轴的两个端点,

由向量长度关系可知 $m = \frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$,

综上所述, m 的取值范围为 $\left(-2, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right)$.

【标注】【知识点】共线比例问题; 直线和椭圆的位置关系

备注: 2019-2020学年11月天津武清区杨村第三中学高二上学期月考第20题13分

 共线问题

8. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .

(1) 求椭圆 M 的方程.

(2) 设 $P(2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D , 若 C, D 和点 $Q\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 共线, 求 k .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 1.

【解析】 (1) 由题知 $2c = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore a = \sqrt{3}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\therefore \text{方程 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(2) 设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\text{则 } x_1^2 + 3y_1^2 = 3 \text{ ①},$$

$$x_2^2 + 3y_2^2 = 3 \text{ ②},$$

$$\text{又 } P(-2, 0), \text{ 设 } k_1 = k_A = \frac{y_1}{x_1 + 2},$$

直线 PA 的方程为 $y = k_1(x + 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1(x + 2) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得},$$

$$(1 + 3k_1^2)x^2 + 12k_1^2x + 12k_1^2 - 3 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_3 = -\frac{12k_1^2}{1 + 3k_1^2} \text{ ③},$$

$$\begin{aligned}
x_1 x_3 &= \frac{12k_1^2 - 3}{1 + 3k_1^2} \text{ ④} . \\
\text{又 } k_1 &= \frac{y_1}{x_1 + 2} \text{ 代入 ③ 得 } x_3 = \frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7} , \\
\therefore y_3 &= \frac{y_1}{4x_1 + 7} . \\
\therefore C &\left(\frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7}, \frac{y_1}{4x_1 + 7} \right) . \\
\text{同理 } D &\left(\frac{-7x_2 - 12}{4x_2 + 7}, \frac{y_2}{4x_2 + 7} \right) . \\
\text{故 } \overrightarrow{QC} &= \left(x_3 + \frac{7}{4}, y_3 - \frac{1}{4} \right), \overrightarrow{QD} = \left(x_4 + \frac{7}{4}, y_4 - \frac{1}{4} \right), \\
\text{因为 } Q, C, D &\text{ 三点共线,} \\
\therefore \left(x_3 + \frac{7}{4} \right) \left(y_4 - \frac{1}{4} \right) &- \left(x_4 + \frac{7}{4} \right) \left(y_3 - \frac{1}{4} \right) = 0 \\
\text{将点 } C, D &\text{ 的坐标代入化简可得:} \\
\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} &= 1, \text{ 即 } k = 1 .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】椭圆的基本量求解；弦长求解问题；最值问题

备注：2017-2018学年天津河西区天津市实验中学高二下学期期末理科18题

2. 巩固练习

🔗 比例问题

9. 已知焦点在 y 轴上的椭圆 E 的中心是原点 O ，离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，以椭圆 E 的长轴和短轴为对角线的四边形的周长为 $4\sqrt{5}$ ，直线 $l: y = kx + m$ 与 y 轴交于点 P ，与椭圆 E 交于 A, B 两个相异点，且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 。
- (1) 求椭圆 E 的方程。
- (2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ ，求 m^2 的取值范围。

【答案】(1) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) $(1, 4)$ 。

【解析】(1) 根据已知设椭圆 E 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，焦距为 $2c$ ，由已知得

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\therefore c &= \frac{\sqrt{3}}{2}a, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{a^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ 以椭圆 E 的长轴和短轴为对角线的四边形的周长为 $4\sqrt{5}$ ，

$$\therefore 4\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}a = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore a = 2, b = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆} E \text{的方程为 } x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 根据已知得 $P(0, m)$, 设 $A(x_1, kx_1 + m)$, $B(x_2, kx_2 + m)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{得 } (k^2 + 4)x^2 + 2mkx + m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{由已知得 } \Delta = 4m^2k^2 - 4(k^2 + 4)(m^2 - 4) > 0,$$

$$\text{即 } k^2 - m^2 + 4 > 0. \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{-2km}{k^2 + 4}, x_1x_2 = \frac{m^2 - 4}{k^2 + 4}.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB} \text{得 } -x_1 = 3x_2, \text{ 即 } x_1 = -3x_2.$$

$$\therefore 3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{12k^2m^2}{(k^2 + 4)^2} + \frac{4(m^2 - 4)}{k^2 + 4} = 0, \text{ 即 } m^2k^2 + m^2 - k^2 - 4 = 0.$$

$$\text{当 } m^2 = 1 \text{ 时, } m^2k^2 + m^2 - k^2 - 4 = 0 \text{ 不成立.}$$

$$\therefore k^2 = \frac{4 - m^2}{m^2 - 1}, \therefore k^2 - m^2 + 4 > 0,$$

$$\therefore \frac{4 - m^2}{m^2 - 1} - m^2 + 4 > 0, \text{ 即 } \frac{(4 - m^2)m^2}{m^2 - 1} > 0.$$

$$\therefore 1 < m^2 < 4,$$

$$\text{所以 } m^2 \text{ 的取值范围为 } (1, 4).$$

【标注】【知识点】共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

共线问题

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 上顶点为 B , 右焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 M, N 为 y 轴上的两个动点, 且 $MF \perp NF$, 直线 AM 和 AN 分别与椭圆 C 交于 D, E 两点.

① 求 $\triangle MFN$ 的面积的最小值.

② 证明: E, O, D 三点共线.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

(2) ① 2.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意椭圆离心率 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ①,

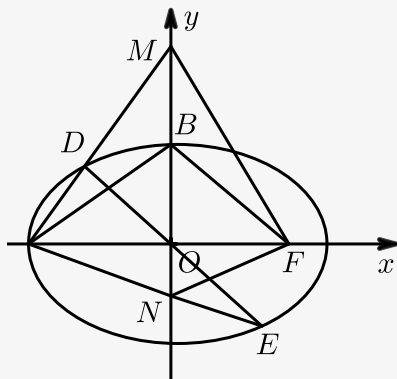
$$\text{又 } \triangle ABF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |AF| \cdot |OB| = \frac{1}{2} (a + c) \cdot b = \sqrt{2} + 1 \text{ ②,}$$

在椭圆中, 有 $a^2 = b^2 = c^2$ ③,

联立①②③得 $a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) ① M, N 为 y 轴上两个动点, 设 $M(0, m), N(0, n)$,



又 $F(\sqrt{2}, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{MF} = (\sqrt{2}, -m), \overrightarrow{NF} = (\sqrt{2}, -n)$,

$\therefore MF \perp NF$,

$\therefore \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 2 + mn = 0$,

$\therefore mn = -2$.

又 $S_{\triangle MFN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |OF| = \frac{1}{2} |m - n| \cdot \sqrt{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} |m - n|$,

$\therefore mn < 0$,

$\therefore |m - n| = |m| + |n| \geq 2\sqrt{|m| \cdot |n|} = 2\sqrt{|mn|} = 2\sqrt{2}$,

当 $|m| = |n|$ 时, 取等号,

$\therefore S_{\triangle MFN} = \frac{\sqrt{2}}{2} |m - n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$,

即 $\triangle MFN$ 面积最小值为 2.

② 直线 AM 方程为: $y = \frac{m}{2}(x + 2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{m}{2}(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2 + m^2)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 8 = 0,$$

$$\Delta = 16m^4 - 4(2 + m^2)(4m^2 - 8) = 64 > 0,$$

因为直线 AM 与椭圆相交于 A, D ,

$$\text{所以 } x_A + x_D = -\frac{4m^2}{2 + m^2},$$

又 $x_A = -2$,

$$\therefore x_D = \frac{4 - 2m^2}{2 + m^2},$$

$$y_D = \frac{m}{2}(x_D + 2) = \frac{m}{2}\left(\frac{4-2m^2}{2+m^2} + 2\right) = \frac{4m}{2+m^2},$$

$$\therefore D \text{ 点坐标 } \left(\frac{4-2m^2}{2+m^2}, \frac{4m}{2+m^2}\right),$$

同理直线 AN 与椭圆相交于 AE ,

$$\therefore E \text{ 点坐标 } \left(\frac{4-2n^2}{2+m^2}, \frac{4n}{2+m^2}\right),$$

若 M, N 刚好位于椭圆的上下顶点,

$$\text{则 } m^2 = n^2 = 2$$

$\therefore x_D = x_E = 0$, 故有 D, O, E 三点共线,

若 M, N 不在椭圆的上下顶点,

$$k_{OD} - k_{OE} = \frac{4m}{4-2m^2} - \frac{4n}{4-2n^2} = \frac{16m - 8mn^2 - 16n + 8m^2n}{(4-2m^2)(4-2n^2)}$$

$$\text{又 } mn = -2$$

$$\therefore 16m - 8mn^2 - 16n + 8m^2n$$

$$= 16m + 16n - 16n - 16m = 0,$$

$$\therefore k_{OD} = k_{OE},$$

$\therefore D, O, E$ 三点共线.

综上所述, E, O, D 三点共线.

【标注】【知识点】面积问题；最值问题；共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

备注：2019-2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期末第19题13分