

直线与椭圆的位置关系（二）

一、向量数量积

我们需要知道的是向量数量积在圆锥曲线位置关系中运用的很多，有些情况是题目所求就是数量积的形式，有些情况是给出了位置关系，我们需要有向量数量积加以转化，下面就是几种常见的给出位置关系，我们将之转化为向量数量积进行计算的形式。

1. 以 AB 为直径的圆过原点 $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

$$y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2,$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \quad x_1x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

$$0 = x_1x_2 + y_1y_2 = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1)}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{\frac{2k^2m^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m^2,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$ ，整体处理得：

$$(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1) - \frac{2k^2m^2}{b^2} + m^2(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = 0,$$

消去高次项 $\frac{k^2m^2}{b^2}$ 得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} = 0$ 即找了 a, b, m, k 的关系式。

2. 角度问题，成锐角或钝角

原点 O 在以 AB 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$,

$$\text{易得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} < 0;$$

原点 O 在以 AB 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$,

$$\text{易得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} > 0.$$

1. 典型例题

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为4，且与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 有相同的离心率，斜率为 k 的直线 l 经过 $M(0, 1)$ ，与椭圆 C 交于不同两点 A, B 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 当椭圆 C 的右焦点 F 在以 AB 为直径的圆内时，求 k 的取值范围。

2. 设 M 点为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点，点 M 在 x 轴上的投影为 N 。动点 P 满足 $\overrightarrow{2PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN}$ ，动点 P 的轨迹为 E 。

(1) 求 E 的方程.

(2) 设 E 的左顶点为 D , 若直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于两点 A, B (A, B 不是左右顶点), 且满足 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|$, 求证: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). 若椭圆 C 的一个顶点坐标是 $(0, -2)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 $P(4, 0)$ 的直线与椭圆交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 求 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围.

2. 巩固练习

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以原点 O 为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 已知直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若以线段 AB 为直径的圆恰好经过坐标原点 O , 试求出 k 的取值.

5. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

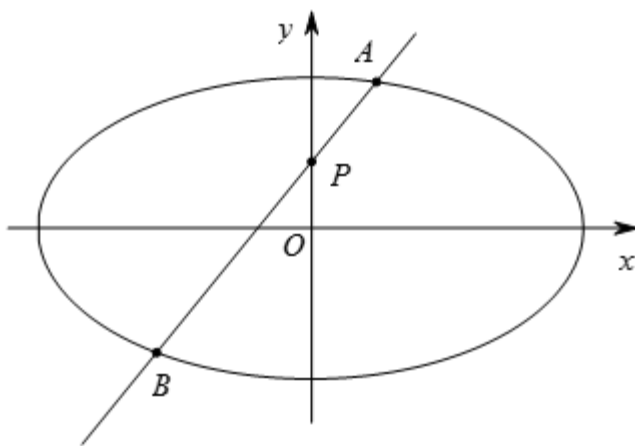
(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8, \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

二、共线比例问题

比例问题



共线问题可以用向量 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 来解答.

设A点坐标为 (x_1, y_1) , B点坐标为 (x_2, y_2) , P点坐标为 $(0, t)$

则有 $\overrightarrow{PA} = (x_1, y_1 - t)$, $\overrightarrow{PB} = (x_2, y_2 - t)$, 由 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$

可得 $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 - t = \lambda(y_1 - t) \end{cases}$, 直线AB的方程可设为 $y = kx + t$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + t \end{cases}$, 消去 y 留下关于 x 的一元二次方程, 则可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(k) \\ x_1 x_2 = g(k) \end{cases}$

又因为 $x_2 = \lambda x_1$, 这样则有 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_1 = f(k) \\ \lambda x_1^2 = g(k) \end{cases}$, 这样消去 x_1 即可得 $\frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} = \frac{f^2(k)}{g(k)}$

这样在我们知道 λ 的情况下可以求解 k , 知道 k 也可以求解 λ .

🔗 共线问题

我们在处理三点共线问题的主要思路是转化成向量共线或者斜率相等来计算.

A, B, C 三点共线等价于 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 或者 $K_{AB} = K_{AC}$

1. 典型例题

🔗 比例问题

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 右焦点 F 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 A, B 是椭圆 C 上的不同两点, 点 $D(-4, 0)$, 且满足 $\overrightarrow{DA} = \lambda \overrightarrow{DB}$, 若 $\lambda \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$, 求直线 AB 的斜率 k 的取值范围.

7.

已知椭圆 C 的中心为坐标原点 O ，一个长轴端点为 $(0, 2)$ ，短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形，直线 l 与 y 轴交于点 $P(0, m)$ ，与椭圆 C 交于相异两点 A, B ，且 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 求 m 的取值范围。

共线问题

8. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，焦距为 $2\sqrt{2}$ ，斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B 。

- (1) 求椭圆 M 的方程。
- (2) 设 $P(2, 0)$ ，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C ，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D ，若 C, D 和点 $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2})$ 共线，求 k 。

2. 巩固练习

比例问题

9. 已知焦点在 y 轴上的椭圆 E 的中心是原点 O ，离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，以椭圆 E 的长轴和短轴为对角线的四边形的周长为 $4\sqrt{5}$ ，直线 $l: y = kx + m$ 与 y 轴交于点 P ，与椭圆 E 交于 A, B 两个相异点，且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 。

- (1) 求椭圆 E 的方程。
- (2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ ，求 m^2 的取值范围。

共线问题

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，上顶点为 B ，右焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{2} + 1$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 若 M, N 为 y 轴上的两个动点，且 $MF \perp NF$ ，直线 AM 和 AN 分别与椭圆 C 交于 D, E 两点。
 - ① 求 $\triangle MFN$ 的面积的最小值。
 - ② 证明： E, O, D 三点共线。