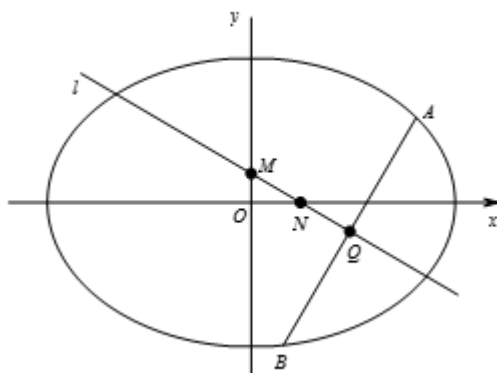


直线与椭圆的位置关系（三）

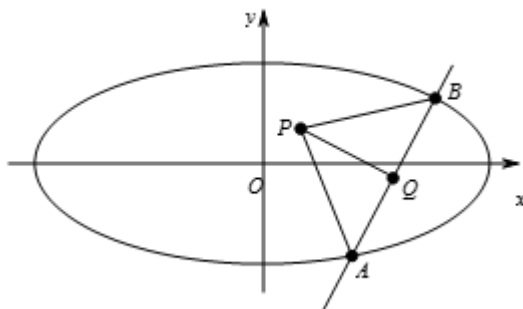
一、垂直平分问题

1. 垂直平分转化思路



中点 Q 的坐标为 (x_Q, y_Q) ，垂直平分线方程为 $y - y_Q = -\frac{1}{k}(x - x_Q)$ ，
令 $x = 0$ ，得到 M 点坐标，令 $y = 0$ ，得到 N 点坐标。

2. 垂直平分问题推广



解决思路： $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$ 。

🔗 常见题型总结

其实我们会发现垂直平分问题除了题干中直接给出的垂直平分这样的情况之外，还有一些问题我们可以往垂直平分上进行转化：

- 1、等腰三角形（题目给出在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$ 或者 $\angle ABC = \angle ACB$ ）中底边的中线垂直平分底边；
- 2、菱形中对角线之间是互相垂直平分；
- 3、在 $\triangle ABC$ 中 $AB \geq AC$ 或者 $\angle ABC \leq \angle ACB$ ，说明 A 点在垂直 BC 垂直平分线的某一侧；

3. 典型例题

- 已知椭圆 C 的一个顶点为 $A(0, -1)$, 焦点为 x 轴上, 若右焦点到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离为3.
(1) 求椭圆 C 的方程.
(2) 设椭圆 C 与直线 $y = kx + m$ 相交于不同的两点 M, N , 线段 MN 的中点为 E .
 - 当 $k > 0, m \neq 0$ 时, 射线 OE 交椭圆 C 于点 G (O 为坐标原点), 交直线 $x = -3$ 于点 $D(-3, n)$, 求 $k^2 + n^2$ 的最小值.
 - 当 $k \neq 0$, 且 $|AM| = |AN|$ 时, 求 m 的取值范围.
- 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 过点 $P(0, 1)$ 作斜率为 k 的直线 l , 椭圆 E 与直线 l 交于不同的两点 A, B , 当直线 l 垂直于 y 轴时, $|AB| = 3\sqrt{3}$.
(1) 求椭圆 E 的标准方程.
(2) 设点 M 的坐标为 $(\frac{5}{12}, 0)$, 若 $\triangle AMB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形, 求 k 的值.
- 已知椭圆的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 短轴长为2, 且两个焦点和短轴的两个端点恰为一个正方形的顶点, 过右焦点 F 与 x 轴不垂直的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点.
(1) 求椭圆的方程.
(2) 当直线 l 的斜率为1时, 求 $\triangle POQ$ 的面积.
(3) 在线段 OF 上是否存在点 $M(m, 0)$, 使得以 MP, MQ 为邻边的平行四边形是菱形? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.
- 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线的 l 斜率的取值范围.

4. 巩固练习

- 已知向量 $\vec{a} = (x, \sqrt{3}y)$, $\vec{b} = (1, 0)$, 且 $(\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \perp (\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b})$.
(1) 求点 $Q(x, y)$ 的轨迹 C 的方程.
(2) 设曲线 C 与直线 $y = kx + m$ 相交于不同的两点 M, N , 又点 $A(0, -1)$, 当 $|AM| = |AN|$ 时, 求实数 m 的取值范围.

二、 向量线性表示

题型总结

向量的线性表示问题的形式为 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ (A 和 B 是直线和椭圆的交点), 通常 P 为圆锥曲线上一点, 解题思路是利用 P 的坐标满足圆锥曲线方程而建立等式来解决问题, 思路如下:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ 可得 $P(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

又因为 P 点在椭圆上, 则有 $\frac{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_1 + \mu y_2)^2}{b^2} = 1$

即

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_1 + \mu y_2)^2}{b^2} &= \lambda^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) + \mu^2 \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right) + \frac{2\lambda\mu x_1 x_2}{a^2} + \frac{2\lambda\mu y_1 y_2}{b^2} \\ &= \lambda^2 + \mu^2 + \frac{2\lambda\mu x_1 x_2}{a^2} + \frac{2\lambda\mu y_1 y_2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

备注: 有些题目需要我们转化为向量线性表示的形式, 例如题目告诉我们四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 其实可以直接转化为 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 的形式。

1. 典型例题

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴为 4, F_1 、 F_2 是椭圆的左右焦点, P 是椭圆 C 上的一点, $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 且取得最大值时 $\triangle PF_1F_2$ 是钝角三角形。

(1) 求椭圆的标准方程。

(2) 若直线 $y = -x + t$ 与椭圆交于 A 、 B 两点, 对于实数 m 和椭圆上的一点 R 满足

$$m\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR}, \text{ 求实数 } m \text{ 的取值范围。}$$

2. 巩固练习

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2, 离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 A 、 B 是椭圆 C 上的两个点, O 是坐标原点, 试问在椭圆 C 上是否存在点 P , 使四边形 $OAPB$ 为矩形? 若存在, 求出矩形 $OAPB$ 的面积; 若不存在, 说明理由。

三、 定点问题

1. 题型总结

直线过定点

(1) 若直线 AB 过的这个点是未知的, 我们知道 $y = kx + 2k = k(x + 2)$, 因此直线过定点 $(-2, 0)$, 所以要证明直线 $y = kx + m$ 过定点, 只需要找到 k 与 m 之间的关系即可.

(2) 若直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$ 是已知或可求的, 那么要证明直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$, 只需证明 AP, BP, AB 任意两个斜率相等即可.

🔍 探究类动点

探究 $\times \times \times$ 是否过定点 (一般在 x 轴上)

解题思路: 设动点坐标为 $(m, 0)$, 然后结合条件, 将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式, 代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后, 会得到一个含有 m 的代数式, 然后求解即可.

2. 典型例题

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1), P_2(0, 1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程.

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

9. 已知椭圆 C 的中心在原点, 离心率等于 $\frac{1}{2}$, 椭圆 C 与椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 有相同的焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N (M, N 与椭圆 C 的长轴端点不重合), 且以 MN 为直径的圆经过椭圆的左顶点 A .

① 求证: 直线 l 过定点, 并求出定点 P 的坐标.

② 平面上是否存在一点 Q , 使得当直线 l 绕点 P 运动时, 始终满足 $\angle MQP = \angle NQP$? 若存在求出点 Q 坐标; 若不存在, 说明理由.

3. 巩固练习

10. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A , 右顶点为 B , 已知 $\sqrt{2}|OA| = |OB|$ (O 为原点).

(1) 求椭圆的离心率.

(2) 设点 $B(\sqrt{2}, 0)$, 直线 $l: y = kx + m (m \neq \pm 1)$ 与椭圆交于两个不同点 M, N , 直线 AM 与 x 轴交于点 E , 直线 AN 与 x 轴交于点 F , 若 $\vec{OE} \cdot \vec{OF} = -6$, 求证: 直线 l 经过定点.

四、定值问题

1. 题型总结

求证类定值

求证 $\times \times \times$ 为定值

解题思路：将需要求证的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，得到的就是我们需要证明的定值。

探究类定值

探究 $\times \times \times$ 是否为定值？

解题思路：将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，一般情况下会得到一个含有参数 k 的整式或者分式。若含有参数 k 的代数式为整式，则令 k 的每一项系数都等于0；若含有参数 k 的代数式为分式，则令含有 k 的分子分母对应的系数之比相等。

2. 典型例题

11. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$ ，且 A 到右焦点 F 的距离与 A 到直线 $x = 2$ 的距离之比为离心率。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 经过点 $(1, 1)$ ，且斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 P, Q (均异于点 A)，设直线 AP 与 AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 ，证明： $k_1 + k_2 = a^2$ 。

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B ，点 M 坐标为 $(2, 1)$ ，设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值？并说明理由。

3. 巩固练习

13. 已知椭圆 C 经过 $(1, \frac{3}{2})$ 与 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{4})$ 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过原点且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，椭圆 C 上一点 M 满足

$$|MA| = |MB|, \text{ 求证: } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{2}{|OM|^2} \text{ 为定值.}$$