

直线与椭圆的位置关系（一）练习题

1. 直线 $y = kx + 2$ 与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的公共点个数为（ ）.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 以上都不对

【答案】 D

【解析】 方法一：将 $y = kx + 2$ 代入椭圆方程，整理得 $(k^2 + 4)x^2 + 4kx = 0$. $k = 0$ 时，交点数为1； $k \neq 0$ 时，交点数为2.

方法二：直线 $y = kx + 2$ 过定点椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的上顶点 $(0, 2)$ ，因此直线与圆锥曲线有相切和相交两种可能，交点数为1或2.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 直线和椭圆的位置关系

2. 已知斜率为2的直线经过椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点 F_2 ，与椭圆相交于 A 、 B 两点，则弦 AB 的长为_____.

【答案】 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

【解析】 由题意知椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(1, 0)$ ，直线 AB 的方程为 $y = 2(x - 1)$ ，

由方程组 $\begin{cases} y = 2(x - 1) \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，整理得 $3x^2 - 5x = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，得 $x_1 = \frac{5}{3}$ ， $x_2 = 0$ ，

则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{5} \times \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

【标注】 【知识点】 弦长求解问题；直线和椭圆的位置关系

3. 已知椭圆： $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，过上焦点 F 作斜率为1的直线交椭圆于 A ， B 两点，求弦 AB 的长.

【答案】 $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

【解析】 设直线方程为 $y = x + 1$ ，

$\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 4x - 4 = 0$ ，

$$\begin{aligned} \because x_1 + x_2 &= -\frac{4}{5}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{4}{5}, \\ \therefore |AB| &= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；弦长求解问题

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ，过左焦点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线交椭圆于 A, B 两点，求弦 AB 的长。

【答案】 2 .

【解析】 椭圆的基本数据为 $a = 3, b = 1, c = 2\sqrt{2}$ ，即有 $F(-2\sqrt{2}, 0)$.

由题意知： $l: y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2\sqrt{2})$ ，于 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 联立消去 y 得 $4x^2 + 12\sqrt{2}x + 15 = 0$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 x_1, x_2 是上面方程的两个实根 .

由韦达定理， $x_1 + x_2 = -3\sqrt{2}, x_1 x_2 = \frac{15}{4}$ ，

于是 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{18 - 15} = 2$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 直线和椭圆的位置关系

5. 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x + m$.

若直线被椭圆截得的弦长为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ，求直线的方程 .

【答案】 (1) $y = x$.

【解析】 (1) 设 l 交椭圆于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

由 (1) 知 $x_1 + x_2 = -\frac{2m}{5}, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 1}{5}$ ，

$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$
 $= \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{5 - 4m^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ ，得 $m^2 = 0$ ，

所以 $l: y = x$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线的一般式方程

6. 已知椭圆的两焦点为 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求此椭圆的方程.

(2) 设直线 $l: y = x + m$, 若 l 与此椭圆相交于 P, Q 两点, 且 $|PQ|$ 等于椭圆的短轴长, 求 m 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $\pm \frac{\sqrt{30}}{2}$.

【解析】 (1) 由 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $c = 2\sqrt{3}$, $a = 4$, 则 $b = 2$,

故椭圆方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } 5x^2 + 8mx + 4m^2 - 16 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 16}{5},$$

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{64m^2}{25} - 4 \times \frac{4m^2 - 16}{5}} = 4,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{\sqrt{30}}{2},$$

$$\text{故 } m \text{ 得值为: } \pm \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；弦长求解问题

7. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 若 A, B, C, D 是椭圆上异于顶点且不重合的四个点, AC 与 BD 相交于点 F_1 , 且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 求 $\frac{|AC|}{|BD|}$ 的取值范围.

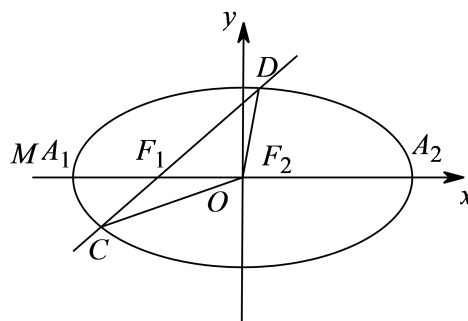
【答案】 $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】直线和椭圆的位置关系

8. 如图, 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点 F_1, F_2 , 在 x 轴上, 长轴 A_1A_2 的长为 4, x 轴上一点

$$M\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right), \left|\overrightarrow{MA_1}\right| = 2\left|\overrightarrow{A_1F_1}\right|.$$



(1) 求椭圆的方程.

(2) 过左焦点 F_1 且斜率为 1 的直线 l 与椭圆相交于 C 、 D 两点, 求 $\triangle OCD$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $\frac{6\sqrt{2}}{7}$.

【解析】 (1) 设椭圆方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$),

$$\text{则 } \left| \overrightarrow{MA_1} \right| = \frac{a^2}{c} - a,$$

$$\left| \overrightarrow{A_1F_1} \right| = a - c,$$

$$\text{由题意: } \begin{cases} \frac{a^2}{c} - a = 2(a - c) \\ 2a = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\text{得 } a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由题意: 直线 l 的方程为: $x - y + 1 = 0$,

设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$,

直线方程代入椭圆方程得:

$$7y^2 - 6y - 9 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{6}{7},$$

$$y_1 y_2 = -\frac{9}{7},$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \frac{36}{7}}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{12\sqrt{2}}{7} = \frac{6\sqrt{2}}{7}.$$

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $B(0, 1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 点 Q 是椭圆上位于 x 轴下方一点, F_1 、 F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 直线 QF_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 求 $\triangle QF_1F_2$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

【解析】 (1) $b = 1, e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{3}{4},$$

$$a^2 = 4,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ 直线 $QF_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \sqrt{3})$,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 中,}$$

$$\text{得 } x_Q = -\frac{8\sqrt{3}}{7},$$

$$y_Q = -\frac{1}{7},$$

$$\text{又 } |F_1F_2| = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle QF_1F_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_Q| = \frac{\sqrt{3}}{7}.$$

【标注】 【知识点】面积问题；直线和椭圆的位置关系

10. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $y = k(x - 1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M 、 N .

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) ± 1 .

【解析】 (1) 由题意可得 $a = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

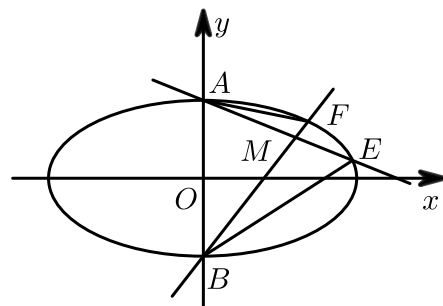
$$\text{则 } c = \sqrt{2}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}, \text{ 则椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases}$ 可得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$,

$$\begin{aligned}
& \text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \\
& \text{则有 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{2k^2-4}{1+2k^2} \end{cases}, \\
& \text{则 } |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\
& = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{24k^2+16}}{1+2k^2}, \\
& A(2,0) \text{ 到 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}, \\
& \text{则 } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k| \cdot 2\sqrt{6k^2+4}}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \\
& \text{解得 } k = \pm 1.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】面积问题；椭圆的基本量求解

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其短轴的端点分别为 A, B , $|AB| = 2$, 且直线 AM, BM 分别与椭圆 C 交于 E, F 两点, 其中点 $M\left(m, \frac{1}{2}\right)$, 满足 $m \neq 0$, 且 $m \neq \pm\sqrt{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
 (2) 若 $\triangle BME$ 面积是 $\triangle AMF$ 面积的 5 倍, 求 m 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $m = \pm 1$.

【解析】(1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $A(0, 1), B(0, -1), M\left(m, \frac{1}{2}\right)$, 且 $m \neq 0$,

$\therefore$ 直线 AM 的斜率为 $k_1 = -\frac{1}{2m}$, 直线 BM 的斜率为 $k_2 = \frac{3}{2m}$,

$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y = -\frac{1}{2m}x + 1$, 直线 BM 的方程为 $y = \frac{3}{2m}x - 1$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = -\frac{1}{2m}x + 1 \end{cases}$, 得 $(m^2 + 1)x^2 - 4mx = 0$,

$\therefore x = 0, x = \frac{4m}{m^2 + 1}$,

$$\therefore E\left(\frac{4m}{m^2+1}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right).$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = \frac{3}{2m}x - 1 \end{cases}, \text{得} (9+m^2)x^2 - 12mx = 0.$$

$$\therefore x = 0, x = \frac{12m}{m^2+9}.$$

$$\therefore F\left(\frac{12m}{m^2+9}, \frac{9-m^2}{m^2+9}\right).$$

$$\therefore S_{\triangle AMF} = \frac{1}{2}|MA| \cdot |MF| \sin \angle AMF, S_{\triangle BME} = \frac{1}{2}|MB| \cdot |ME| \sin \angle BME,$$

$$\angle AMF = \angle BME,$$

$$5S_{\triangle AMF} = S_{\triangle BME},$$

$$\therefore 5|MA| \cdot |MF| = |MB| \cdot |ME|,$$

$$\therefore \frac{5|MA|}{|ME|} = \frac{|MB|}{|MF|}.$$

$$\therefore \frac{5m}{\frac{4m}{m^2+1} - m} = \frac{m}{\frac{12m}{9+m^2} - m},$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore \text{整理方程得} \frac{1}{m^2+1} = \frac{15}{m^2+9} - 1, \text{即} (m^2-3)(m^2-1) = 0,$$

$$\therefore m \neq \pm\sqrt{3},$$

$$\therefore m^2-3 \neq 0,$$

$$\therefore m^2 = 1,$$

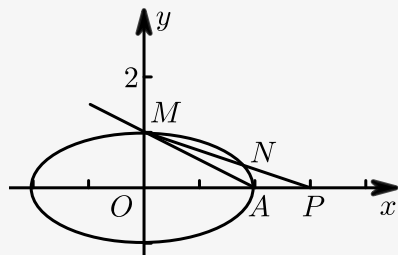
$$\therefore m = \pm 1 \text{ 为所求}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的离心率；面积问题

12. 过点 $P(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 椭圆 E 与 x 轴正半轴交于点 A , 则三角形 AMN 的面积的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 设直线 l 的方程为 $x = ky + 3$,



代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

$$\text{整理得: } (4+k^2)y^2 + 6ky + 5 = 0,$$

$$\Delta = 36k^2 - 20(4+k^2) > 0, \text{ 即 } k > \sqrt{5} \text{ 或 } k < -\sqrt{5},$$

$$y_M + y_N = -\frac{6k}{4+k^2}, y_M y_N = \frac{5}{4+k^2} \quad (M \text{ 在 } N \text{ 的左边}),$$

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle APM} - S_{\triangle APN}$$

$$= \frac{1}{2} |PA| \cdot |y_M - y_N|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{6k}{4+k^2}\right)^2 - \frac{20}{4+k^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16(k^2-5)}{(k^2+4)^2}},$$

$$\text{由 } 4+k^2 = t(t > 4), \text{ 可得 } k^2 = t-4,$$

$$\text{即有 } S_{\triangle AMN} = 2\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{9}{t^2}} = 2\sqrt{-\left(\frac{3}{t} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{36}},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{3}{t} = \frac{1}{6}, \text{ 即 } t = 18, k = \pm\sqrt{14} \text{ 时},$$

$$\text{三角形 } AMN \text{ 面积取得最大值, 且是 } 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】面积问题；最值问题；直线和椭圆的位置关系

13. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 作直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交椭圆于 M, N 两点, H 为线段 MN 的中点, 且 OH 的斜率为 $\frac{1}{4}$, 设点 $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

(1) 求该椭圆的方程.

(2) 过原点的直线交椭圆于 B, C 两点, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\because k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1,$$

$$\text{又 } \because k_{OH} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{又 } \because \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ ①} \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} &= 0, \\ \therefore \frac{1}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} &= 0, \\ \therefore \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4b^2} &= 0. \\ \text{又} \because x + y - \sqrt{3} &= 0 \text{ 过右焦点,} \\ \therefore C &= \sqrt{3}. \\ \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = 0 \\ a^2 = 3 + b^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}, \\ \therefore \frac{x^2}{4} + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

(2) 当直线 BC 垂直于 x 轴时, $BC = 2$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 1,$$

当直线 BC 不垂直 x 轴时,

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\therefore B\left(\frac{2}{\sqrt{4k^2 + 1}}, \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}\right), C\left(\frac{-2}{\sqrt{4k^2 + 1}}, \frac{-2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}\right),$$

$$\therefore |BC| = 4 \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{1 + 4k^2}},$$

$$\text{又} \because A \text{ 到 } BC \text{ 距离为 } d = \frac{\left|k - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{1 + 4k^2}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{4k^2 - 4k + 1}{4k^2 + 1}} = \sqrt{1 - \frac{4k}{4k^2 + 1}},$$

$$\therefore \frac{4k}{4k^2 + 1} \geq -1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} \leq \sqrt{2},$$

$$\text{当 } k = -\frac{1}{2}, \text{ 等号成立,}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} \text{ 最大值为 } \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】求曲线方程的问题；最值问题；面积问题；中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

14. 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程.

(2) 设过点A的动直线l与E相交于P, Q两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求l的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

【解析】 (1) 设 $F(c, 0)$, 由条件知, $\frac{2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $c = \sqrt{3}$,

又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a = 2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 1$,

故E的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 依题意设直线 $l: y = kx - 2$ 将 $y = kx - 2$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得

$$(1 + 4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0,$$

当 $\Delta = 16(4k^2 - 3) > 0$, 即 $k^2 > \frac{3}{4}$ 时, $x_{1,2} = \frac{8k \pm 2\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$,

$$\text{从而 } PQ = \sqrt{k^2 + 1}|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1},$$

又点O到直线PQ的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 所以 $\triangle OPQ$ 的面积

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}d \cdot |PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1},$$

设 $\sqrt{4k^2 - 3} = t$, 则 $t > 0$, $S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}}$,

因为 $t + \frac{4}{t} \geq 4$, 当且仅当 $t = 2$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立, 且满足 $\Delta > 0$,

所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, l的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 面积问题; 最值问题

15. 已知点M, N分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点, F为其右焦点, |FM|与|FN|的等比中项是 $\sqrt{3}$, 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆C的方程.

(2) 设不过原点O的直线l与椭圆C交于A, B两点, 若直线OA, AB, OB的斜率依成等比数列, 求 $\triangle OAB$ 面积的取值范围.

【答案】 (1) $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $(0, \sqrt{3})$.

【解析】 (1) $|MF| = a + c$, $|FN| = a - c$,

$\sqrt{3}$ 是|MF|与|FN|的等比中项,

$$\therefore (a+c)(a-c) = 3,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a = 2, c = 1,$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 根据题意, 直线 l 的斜率存在且不为0,

$$\text{故设直线 } l: y = kx + m (m \neq 0),$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{可得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 48(4k^2 - m^2 + 3) > 0,$$

$$\text{即 } 4k^2 + 3 > m^2,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

又直线 OA , AB , OB 的斜率依次成等比数列,

$$\therefore \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = k^2,$$

$$\text{即 } m^2(4k^2 - 3) = 0,$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore 0 < m^2 < 6 \text{ 且 } m^2 \neq 3,$$

设 d 为点 O 到直线 l 的距离,

$$\text{则有 } d = \frac{2|m|}{\sqrt{7}},$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{7}}{3} \sqrt{18 - 3m^2},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| d$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3m^2(6 - m^2)}$$

$$< \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{三角形面积的取值范围为 } (0, \sqrt{3}).$$

【标注】【知识点】面积问题

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为1, F_1, F_2 分别为椭圆的左, 右焦点, 椭圆的上顶点为 A , $\angle AF_1 F_2 = 30^\circ$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设过点 $M(0, -2)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle APQ$ 的面积最大时, 请求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $y = \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$ 或 $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

【解析】 (1) $\begin{cases} \frac{2b^2}{a} = 1 \\ \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 1$
 $\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 可设 $l: y = kx - 2$, 联立直线 l 与椭圆方程的

$$\begin{cases} y = kx - 2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore (1 + 4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0$$

$$\Delta = 16(4k^2 - 3) > 0$$

$$k^2 > \frac{3}{4},$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{16k}{1 + 4k^2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{12}{1 + 4k^2},$$

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{1 + 4k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \frac{4\sqrt{1 + 4k^2} \sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}, \end{aligned}$$

又 O 点到直线 l 点的距离为

$$d = \frac{2}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$\therefore \triangle OPQ \text{ 的面积 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d$$

$$= \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1},$$

$$\text{设 } \sqrt{4k^2 - 3} = t \text{ 则 } t > 0, \text{ 所以 } S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \leq 1,$$

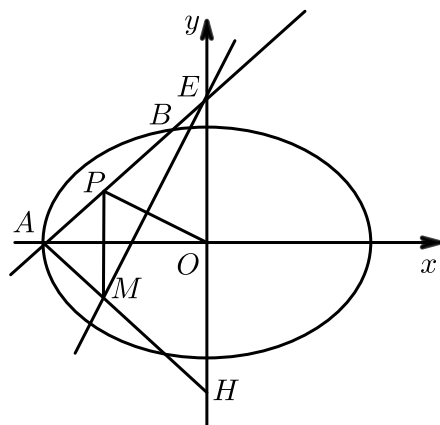
$$\text{当且仅当 } t = \frac{4}{t} \Rightarrow t = 2,$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 时等号成立, 满足 } \Delta > 0$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2 \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x - 2.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；最值问题

如图，已知离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$ ，斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点，交 y 轴于点 E ，点 P 为线段 AB 的中点。



- (1) 求椭圆 C 的方程。
 (2) 若点 E 关于 x 轴的对称点为 H ，过点 E 且与 OP 垂直的直线交直线 AH 于点 M 求 $\triangle MAP$ 面积的最大值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.
 (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】 (1) 由已知得：
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \end{cases}$$

 解得 $a = 2, b = \sqrt{2}$,
 椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 椭圆 C 的左顶点 $A(-2, 0)$,

设 l 的方程： $y = k(x + 2)$, 则 $E(0, 2k)$, $H(0, -2k)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x + 2) \end{cases}$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0$.

$\Delta = 64k^2 - 4(2k^2 + 1)(8k^2 - 4) = 16$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$.

$x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{8k^2 - 4}{2k^2 + 1}$.

则 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{4k^2}{2k^2 + 1}$,

$y_0 = k(x_0 + 2) = k\left(-\frac{4k^2}{2k^2 + 1} + 2\right) = \frac{2k}{2k^2 + 1}$,

$k_{OP} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{2k}{4k^2} = -\frac{1}{2k}$,

直线 EM 的斜率为： $k_{EM} = \frac{1}{k_{OP}} = 2k$ ，

所以直线 EM 的方程为 $y = 2kx + 2k$ ，即 $y = 2k(x + 1)$ ，

直线 AH 的方程为： $y = -k(x + 2)$ ，

所以点 $M\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}k\right)$ 。

点 $M\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}k\right)$ 到直线 $l: kx - y + 2k = 0$ 的距离

$$d = \frac{\left| -\frac{4}{3}k + \frac{2}{3}k + 2k \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{4}{3}k \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} ,$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{2k^2 + 1} ,$$

$$|AP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{2\sqrt{1 + k^2}}{2k^2 + 1} ,$$

$$\triangle MAP \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}|AP|d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{1 + k^2}}{2k^2 + 1} \cdot \frac{\left| \frac{4}{3}k \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\frac{4}{3}|k|}{2k^2 + 1} ,$$

$$\text{所以 } S = \frac{\frac{4}{3}}{2|k| + \frac{1}{|k|}} \leq \frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} ,$$

当 $|k| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

所以 $\triangle MAP$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；最值问题；面积问题

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值。

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

【解析】(1) 设椭圆的半焦距为 c ，依题意
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a = \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} ,$$

$\therefore b = 1, c = \sqrt{2}$ ，

所求椭圆方程为： $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) ①当斜率不存在时, 此时直线为 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 带入椭圆方程得 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 或 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
 则 $AB = \sqrt{3}$, 此时 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}d \cdot AB = \frac{3}{4}$.
 ②斜率存在时, 设直线方程为 $y = kx + m$,
 由题意可得 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 联立得 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $(1+3k^2)x^2 + 6kxm + 3m^2 - 3 = 0$,
 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有
 $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{3m^2-3}{1+3k^2}$,
 则 $AB = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2|$
 $= \frac{\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{36k^2 - 12m^2 + 12}}{1+3k^2}$
 $= \frac{\sqrt{1+k^2} \sqrt{27k^2+3}}{1+3k^2}$.
 则 $S = \frac{1}{2}d \cdot AB = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{9k^4+10k^2+1}{9k^4+6k^2+1}}$
 $= \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{4k^2}{9k^4+6k^2+1}}$,
 而 $9k^4+6k^2+1 \geq 12k^2$, 则 $S \leq \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{4k^2}{12k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 综上所述, $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】面积问题；最值问题

19. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 以 F_1 为圆心, 以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心, 以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y = kx + m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .

① 求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;

② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

【答案】(1)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2) ① 2.

② $6\sqrt{3}$.

【解析】(1) 由题意知 $2a = 4$, 则 $a = 2$,

又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 - c^2 = b^2$, 可得 $b = 1$,

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 由(1)知椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$,

设 $P(x_0, y_0)$, $\frac{|OQ|}{|OP|} = \lambda$, 由题意知 $Q(-\lambda x_0, -\lambda y_0)$,

$\therefore \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 又 $\frac{(-\lambda x_0)^2}{16} + \frac{(-\lambda y_0)^2}{4} = 1$,

即 $\frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 \right) = 1$,

$\therefore \lambda = 2$, 即 $\frac{|OQ|}{|OP|} = 2$.

② 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 将 $y = kx + m$ 代入椭圆 E 的方程,

可得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 16 = 0$ 由 $\Delta > 0$, 可得 $m^2 < 4 + 16k^2$,

则有 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 16}{1 + 4k^2}$,

$\therefore |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{16k^2 + 4 - m^2}}{1 + 4k^2}$ (A),

$\therefore$ 直线 $y = kx + m$ 与轴交点的坐标为 $(0, m)$,

$\therefore \triangle OAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |m| \cdot |x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{16k^2 + 4 - m^2} |m|}{1 + 4k^2}$

$= \frac{2\sqrt{(16k^2 + 4 - m^2) \cdot m^2}}{1 + 4k^2} = 2\sqrt{\left(4 - \frac{m^2}{1 + 4k^2}\right) \cdot \frac{m^2}{1 + 4k^2}}$,

令 $\frac{m^2}{1 + 4k^2} = t$, 将 $y = kx + m$ 代入椭圆 C 的方程,

可得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$,

由 $\Delta \geq 0$, 可得 $m^2 \leq 1 + 4k^2$, $|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{16k^2 + 4 - m^2}}{1 + 4k^2}$ (B),

由(A)(B)两式可知 $0 < t \leq 1$, 因此 $S = 2\sqrt{(4 - t)t} = 2\sqrt{-t^2 + 4t}$, 故 $S \leq 2\sqrt{3}$,

当且仅当 $t = 1$, 即 $m^2 = 1 + 4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$.

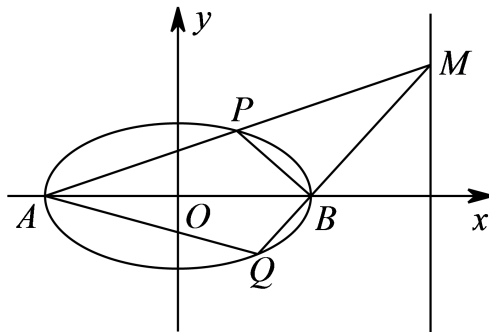
由①知, $\triangle ABQ$ 面积为 $3S$, $\therefore \triangle ABQ$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】最值问题; 面积问题

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以椭圆长、短轴四个端点为顶点的四边形的面积为 $4\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 如图所示，记椭圆的左、右顶点分别为 A 、 B ，当动点 M 在定直线 $x = 4$ 上运动时，直线 AM 、 BM 分别交椭圆于两点 P 、 Q ，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值。



【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 6。

【解析】 (1) 有题设知，

$$a = 2c,$$

$$2ab = 4\sqrt{3},$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1,$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由对称性，可令 $M(4, t)$ ，其中 $t > 0$ ，

$$AM: y = \frac{t}{6}(x + 2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{6}(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (27 + t^2)x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 108 = 0,$$

$$x_A x_P = \frac{4t^2 - 108}{27 + t^2},$$

$$\therefore x_A = -2,$$

$$\therefore x_P = \frac{54 - 2t^2}{27 + t^2},$$

$$\therefore y_P = \frac{18t}{27 + t^2},$$

$$BM: y = \frac{t}{2}(x - 2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{2}(x - 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得}(3+t^2)x^2-4t^2x+4t^2-12=0,$$

$$\therefore x_{BQ} = \frac{4t^2-12}{3+t^2},$$

$$\text{由 } x_B = 2,$$

$$\therefore x_Q = \frac{2t^2-6}{3+t^2},$$

$$\therefore y_Q = \frac{-6t}{3+t^2},$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}APBQ} = \frac{1}{2}|AB||y_P - y_Q|$$

$$= 2|y_P - y_Q|$$

$$= 2\left(\frac{18t}{27+t^2} + \frac{6t}{3+t^2}\right)$$

$$= \frac{48t(9+t^2)}{(27+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{48t(9+t^2)}{(9+t^2)^2 + 12t^2}$$

$$= \frac{48}{\frac{9+t^2}{t} + \frac{12t}{9+t^2}}$$

$$\text{由于 } \lambda = \frac{9+t^2}{t} \geq 6,$$

$$\text{且 } \lambda + \frac{12}{\lambda} \text{ 在 } [6, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{故 } \lambda + \frac{12}{\lambda} \geq 8,$$

$$\text{从而, } S_{\text{平行四边形}APBQ} = \frac{48}{\lambda + \frac{6}{\lambda}} \leq 6,$$

$$\text{当且仅当 } \lambda = 6, \text{ 即 } t = 3 \text{ 时,}$$

$$\text{四边形 } APBQ \text{ 的面积取最大值 } 6.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；最值问题；面积问题