

# 直线与椭圆的位置关系（一）

## 一、直线与椭圆的位置关系判断

直线与椭圆的位置关系有三种：相交、相切、相离。

这三种位置关系的判定条件可归纳为：

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，椭圆方程 $C: f(x, y) = 0$ ，

由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$  消去 $y$ （或消去 $x$ ）得： $ax^2 + bx + c = 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，

① $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交，直线与椭圆有两个交点；

② $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离，直线与椭圆无交点；

③ $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切，直线与椭圆只有一个交点。

### 1. 典型例题

1. 直线 $x + y + m = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的充要条件是\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $m = \pm\sqrt{5}$

**【解析】** 根据题意，联立方程可得 $\begin{cases} x + y + m = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，

消去 $y$ 整理得： $5x^2 + 4mx + 2m^2 - 6 = 0$ ，

根据题意可得， $\Delta = (4m)^2 - 4 \times 5 \times (2m^2 - 6) = 0$ ，

$\therefore m^2 = 5$ ， $m = \pm\sqrt{5}$ 。

**【标注】** 【知识点】直线与圆锥曲线的位置关系判断；直线和椭圆的位置关系；充要条件与解析几何结合

备注：2017-2018学年天津和平区高二上学期期末文科第9题4分

2. 已知直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 恒有公共点，则实数 $m$ 的取值范围为（ ）。

A.  $m \geq 1$

B.  $m \geq 1$ 或 $0 < m < 1$

C.  $0 < m < 5$ 且 $m \neq 1$

D.  $m \geq 1$ 且 $m \neq 5$

**【答案】** D

【解析】直线 $y = kx + 1$ 过定点 $(0, 1)$ ,

又 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 为椭圆方程, 因此 $m > 0$ 且 $m \neq 5$ ,

下面只需分类讨论椭圆焦点所在坐标轴的情况,

当 $m > 5$ 时, 椭圆焦点在 $y$ 轴上, 此时恒有交点;

当 $0 < m < 5$ 时, 椭圆焦点在 $x$ 轴上, 则椭圆与 $y$ 轴的正半轴的交点为 $(0, \sqrt{m})$ , 若要直线与椭圆恒有交点, 需使 $\sqrt{m} \geq 1$ , 即 $1 \leq m < 5$ ,

综上,  $m \geq 1$ 且 $m \neq 5$ .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】直线和椭圆的位置关系

## 2. 巩固练习

3. 直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ 有且只有一个公共点, 则 $k^2 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】将 $y = kx + 1$ 代入椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ , 整理得 $(4k^2 + 1)x^2 + 8kx + 3 = 0$ ,

由 $\Delta = 64k^2 - 12(4k^2 + 1) = 0$ , 解得 $k^2 = \frac{3}{4}$ .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】直线和椭圆的位置关系

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 直线 $l: y = x + m$ 与椭圆有两个交点时,  $m$ 的取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】 $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$

【解析】联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ , 消去 $y$ 并整理得 $7x^2 + 8mx + 4(m^2 - 3) = 0$ ,

直线与椭圆有两个交点 $\Leftrightarrow \Delta = 64m^2 - 4 \times 4 \times 7(m^2 - 3) > 0$ , 解得 $m \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ .

故答案为:  $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ .

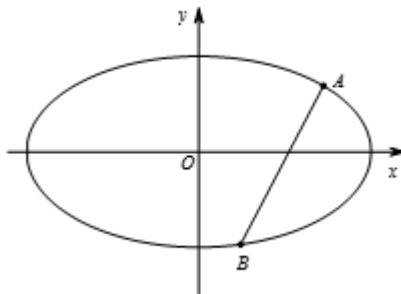
【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

【素养】数学运算

## 二、弦长问题

## 1. 弦长公式

连结圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的弦，线段的长度简称为弦长。



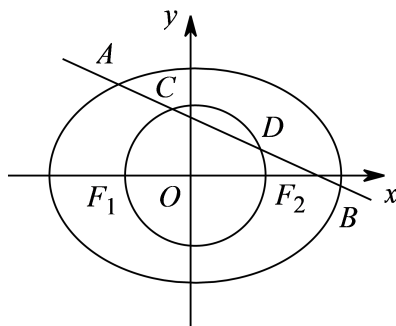
若直线的斜率为 $k$ ，被圆锥曲线截得的弦 $AB$ 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}$$

$$\text{或 } |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

## 2. 典型例题

5. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $(0, \sqrt{3})$ ，离心率为  $\frac{1}{2}$ ，左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 。



(1) 求椭圆的标准方程。

(2) 若直线  $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$  与椭圆交于  $A$ 、 $B$  两点，与以  $F_1F_2$  为直径的圆交于  $C$ 、 $D$  两点，求弦  $AB$ 、 $CD$  的长度。

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2)  $|CD| = \sqrt{2}$ ， $|AB| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 。

**【解析】** (1) 由题意可得，
$$\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

解得  $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$ .

$\therefore$  椭圆的方程  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 由题意可得  $F_1F_2$  为直径的圆的方程为  $x^2 + y^2 = 1$ ,

$\therefore$  圆心到直线  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  的距离  $d = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

$\therefore |CD| = 2\sqrt{1 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

设  $A(x_1, y), B(x_2, y_2)$ ,

联立  $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ , 得:

$x^2 - x - 2 = 0$ ,

$x_1 = -1, x_2 = 2$ ,

$\therefore A\left(-1, \frac{3}{2}\right), B(2, 0)$ ,

$\therefore |AB| = \sqrt{(2+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ .

**【标注】**【知识点】弦长求解问题；椭圆与圆结合；直线和椭圆的位置关系

备注：2017-2018学年天津市咸水沽一中高二上学期期中文科第19题12分

6. 已知点  $F$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点，椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为4.

(1) 求：椭圆的方程.

(2) 设直线  $l$  与椭圆相交于不同的两点  $A, B$ ，已知点  $A$  的坐标为  $(-a, 0)$ .

① 求： $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}$  的取值范围.

② 若  $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ，求：直线  $l$  的斜率.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) ①  $[-1, 4\sqrt{3} + 7]$ .

②  $k = \pm\sqrt{2}$ .

**【解析】** (1) 由椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  可得： $3a^2 = 4c^2$ ,

$a^2 = \frac{4}{3}c^2 = \frac{4}{3}(a^2 - b^2)$ ,

即  $a^2 = 4b^2$ ,

由题意可知，菱形面积为  $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4$ ,

即  $ab = 2$ ,

$\therefore a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ ,

椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) ① 由(1)可知点  $A$  的坐标为  $A(-2, 0)$ ,

右焦点  $F$  的坐标为  $F(\sqrt{3}, 0)$ .

设点  $B$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ ,

则满足  $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ,

$\overrightarrow{FA} = (-2 - \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{FB} = (x_0 - \sqrt{3}, y_0)$ ,  $-2 < x_0 \leq 2$ ,

$\therefore \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = (-2 - \sqrt{3}) \cdot (x_0 - \sqrt{3})$

$= -(\sqrt{3} + 2)x_0 + 2\sqrt{3} + 3$ ,

由  $-2 < x_0 \leq 2$  可得:  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} \in [-1, 4\sqrt{3} + 7]$ .

② 设直线  $l$  的斜率为  $k$ ,

则直线  $l: y = k(x + 2)$ ,

$\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$  联立得:  $(4k^2 + 1)x^2 + 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$ ,

由  $-2x_0 = \frac{16k^2 - 4}{4k^2 + 1}$  可得  $x_0 = \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}$ ,  $y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{4k}{1 + 4k^2}$ ,

$\therefore |AB| = \sqrt{\left(-2 - \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(\frac{4k}{1 + 4k^2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2}$   
 $= \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ,

整理得:  $(k^2 - 2)(16k^2 + 13) = 0$ ,

解得:  $k = \pm\sqrt{2}$ .

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；弦长求解问题；向量问题

备注：2019-2020学年天津高二上学期期末新四区示范校第20题15分

7. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 点  $P$  为椭圆上的一个动点,  $\triangle PF_1F_2$  面积的最大值为  $4\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 若  $A, B, C, D$  是椭圆上不重合的四个点,  $AC$  与  $BD$  相交于点  $F_1$ ,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ , 求  $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

$$(2) \left[ \frac{96}{7}, 14 \right].$$

【解析】(1) 由题意得,  $P$  是上、下顶点,  $\triangle PF_1F_2$  面积取最大值,

$$\therefore S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |OP| = bc = 4\sqrt{3},$$

$$\text{又} \because e = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3}, c = 4,$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

$$(2) F_1(-2, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

① 当  $AC$  和  $BD$  中有 1 条直线斜率不存在时,

$$|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = 14,$$

② 当斜率存在时, 设  $AC: y = k(x + c)$ ,

$$A(x_1, y_1), C(x_2, y_2),$$

$$\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases} \text{联立, 得}$$

$$(3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 48 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-16k^2}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{16k^2 - 48}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \frac{24(k^2 + 1)}{3 + 4k^2}.$$

$$\text{同理 } |\overrightarrow{BD}| = \frac{24(k^2 + 1)}{4 + 3k^2},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = \frac{24(k^2 + 1)}{3 + 4k^2} + \frac{24(k^2 + 1)}{4 + 3k^2}$$

$$= \frac{168(k^2 + 1)^2}{(3 + 4k^2)(4 + 3k^2)}.$$

$$\text{令 } t = k^2 + 1 > 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = \frac{168}{12 + \frac{t-1}{t^2}},$$

$$\therefore t > 1,$$

$$\therefore \frac{t-1}{t^2} \leq \frac{1}{4},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| \in \left[ \frac{96}{7}, 14 \right],$$

$$\text{综上, } |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| \in \left[ \frac{96}{7}, 14 \right].$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 弦长求解问题

备注：2018-2019学年12月天津南开大学附属中学高二上学期月考第20题14分

### 3. 巩固练习

8. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点  $(0, 1)$ 。

(1) 求椭圆方程。

(2) 过椭圆右焦点做斜率为1的直线交椭圆于  $A, B$  两点，求线段  $AB$  的长度。

**【答案】** (1) 椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2)  $|AB| = \frac{8}{5}$ 。

**【解析】** (1)  $\because$  椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点  $(0, 1)$ ，

$\therefore$  由已知得  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $b = 1$ ，

解得  $a = 2$ ，

$\therefore$  椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 设  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，直线方程为  $y = x - \sqrt{3}$ ，

直线与椭圆联立  $\begin{cases} y = x - \sqrt{3} \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ ，得  $5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0$ ，

由根与系数关系知  $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ ， $x_1x_2 = \frac{8}{5}$ ，

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$

$= \sqrt{2 \left[ \left( \frac{8\sqrt{3}}{5} \right)^2 - 4 \times \frac{8}{5} \right]}$   
 $= \frac{8}{5}$ 。

**【标注】**【知识点】弦长求解问题；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

备注：2018-2019学年天津蓟县高二上学期期中第19题8分

9. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(1) 求椭圆  $C$  的长轴和短轴的长，离心率  $e$ ，左焦点  $F_1$ 。

(2) 经过椭圆  $C$  的左焦点  $F_1$  作直线  $l$ ，直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点，若  $|AB| = \frac{8\sqrt{2}}{7}$ ，求直线  $l$  的方程。

**【答案】** (1) 长轴  $2\sqrt{2}$ ，短轴  $2$ ，离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；左焦点  $F_1(-1, 0)$ 。

$$(2) \sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0 \text{ 或 } \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0.$$

**【解析】** (1) 由椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  知  $a^2 = 2, b^2 = 1$ , 则  $a = \sqrt{2}, b = 1$ , 故  $c = 1$ ,  
所以椭圆  $C$  的长轴  $2a = 2\sqrt{2}$ , 短轴  $2b = 2$ , 离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
左焦点  $F_1(-1, 0)$ .

(2) 设直线  $l$  方程  $y = k(x+1)$ , 由方程组  $\begin{cases} y = k(x+1) \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$  消去  $y$ ,  
整理得  $(2k^2 + 1)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1},$$

$$\text{又因为 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}, \text{ 且已知 } |AB| = \frac{8\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{所以 } \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(-\frac{4k^2}{2k^2 + 1}\right)^2 - 4\left(\frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{整理化简后得 } \sqrt{k^2 + 1} \frac{\sqrt{8(k^2 + 1)}}{2k^2 + 1} = \frac{8\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{解得 } k^2 = 3, k = \pm\sqrt{3},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程: } y = \sqrt{3}(x+1) \text{ 或 } y = -\sqrt{3}(x+1),$$

$$\text{即 } \sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0 \text{ 或 } \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0.$$

**【标注】**【知识点】弦长求解问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

备注：2017-2018学年天津武清区武清区杨村第一中学高二上学期期末理科第16题13分

10. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1$  和  $F_2$ ，上顶点为  $B$ ， $BF_2$  延长线交椭圆于点  $A$ ， $\triangle ABF_1$  的周长为 8，且  $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程.

(2) 若直线  $l \perp AB$  且与椭圆  $C$  相交于两点  $P, Q$ ，求  $|PQ|$  的最大值.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

(2)  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

**【解析】** (1) 由椭圆定义可知  $\triangle ABF_1$  的周长为  $4a$ ,

$$\text{既有 } 4a = 8, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\text{由 } B(0, b), F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$$

$$\overrightarrow{BF_1} = (-c, -b), \overrightarrow{BF_2} = (c, -b),$$

且  $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$  , 则  $-c^2 + b^2 = 0$  , 即  $b = c$  ,

又  $b^2 + c^2 = a^2 = 4$  , 解得  $b = c = \sqrt{2}$  ,

则椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$  .

(2) 由  $B(0, \sqrt{2})$  ,  $F_2(\sqrt{2}, 0)$  , 可得直线  $AB$  的斜率为  $-1$  ,

由  $l \perp AB$  , 可得直线  $l$  的斜率为  $1$  ,

设直线  $l$  的方程为  $y = x + t$  , 代入椭圆方程 , 可得  $3x^2 + 4tx + 2t^2 - 4 = 0$  ,

由判别式大于  $0$  , 即  $16t^2 - 12(2t^2 - 4) > 0$  ,

解得  $t \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$  , 设  $P(x_1, y_1)$  ,  $Q(x_2, y_2)$  ,

则  $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}t$  ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{2t^2 - 4}{3}$  ,

$|PQ| = \sqrt{1+1} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= \sqrt{2} \sqrt{\frac{16t^2}{9} - \frac{8t^2 - 16}{3}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{48 - 8t^2}$  ,

当  $t = 0$  时 ,  $|PQ|$  取得最大值 , 且为  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$  .

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；弦长求解问题；数量积的坐标表达式

备注：2018-2019学年12月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第19题10分

## 三、面积问题

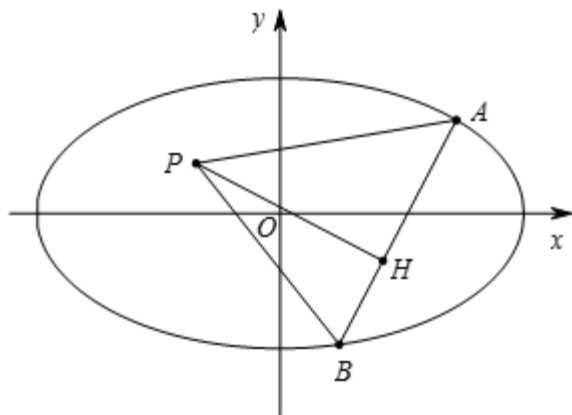
### 1. 三角形面积计算

#### 一般三角形面积计算

设直线  $AB$  方程为  $y = kx + m$  ,  $P(x_0, y_0)$  ,

则  $d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}$  ,

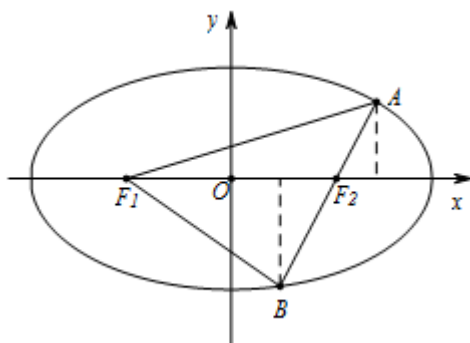
$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}$  .



### 🔴 焦点三角形面积计算

直线 $AB$ 过焦点 $F_2$ ,  $\triangle ABF_1$ 的面积为:

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c|y_1 - y_2| = \frac{c\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



## 2. 四边形面积计算

### 🔴 平行四边形面积计算

$$\begin{aligned} \text{直线 } AB \text{ 为 } y &= kx + m_1, \text{ 直线 } CD \text{ 为 } y = kx + m_2, d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}, \\ |AB| &= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}, \\ S_{\text{四边形 } ABCD} &= |AB| \cdot d = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x} |m_1 - m_2|}{|a|}. \end{aligned}$$

教法备注:

如果四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 和 $BD$ 互相垂直, 那么四边形的面积为 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ .

## 3. 面积最值计算

圆锥曲线经常用到的均值不等式形式:

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}}, \text{ (注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论)}$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6}, \text{ 当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2},$$

当且仅当  $m^2 = -m^2 + 8$  时, 等号成立.

教法备注:

关于面积最值问题, 我们的处理思路就是借助于基本不等式或者函数单调性求解范围或者最值, 所以我们在讲解时可以带着学生先梳理一下常见单变量形式 ( $\frac{t^2 + 9}{t + 1}; \frac{3t + 1}{t^2 + 4t + 9}; \frac{t^2 + 7t + 10}{t^2 + 4t + 9}$ ) 的最值求解思路, 同样地, 我们也需要注意变量范围, 尤其是换元时, 因为使用基本不等式求解最值时需要注意等号是否取得, 如果取不得, 那么我们应该采用对勾函数单调性来解决问题, 类似这样的情况

$$\frac{4k^4 + 11k^2 + 8}{4k^4 + 10k^2 + 7} = 1 + \frac{k^2 + 1}{4k^4 + 10k^2 + 7} = 1 + \frac{1}{4(k^2 + 1) + 2 + \frac{1}{k^2 + 1}}, \text{ 此时我们会发现如果}$$

对于  $4(k^2 + 1) + \frac{1}{k^2 + 1}$  使用基本不等式的话, 取等条件无法满足, 因为取等需要

$k^2 + 1 = \frac{1}{k^2 + 1}$ , 即  $k^2 = -\frac{1}{2}$ , 这是实现不了的, 所以此时我们应该换元

令  $t = k^2 + 1 \geq 1$ , 则  $4(k^2 + 1) + \frac{1}{k^2 + 1} = 4t + \frac{1}{t} (t \geq 1)$  然后利用对勾函数单调性求解最值即可.

## 4. 典型例题

11. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{2}{3}$ , 点  $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -2\right)$  在此椭圆上, 经过椭圆的

左焦点  $F$ , 斜率为  $k$  的直线与椭圆交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程.

(2) 当  $k = 1$  时求  $S_{\triangle AOB}$  的值.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

(2)  $S_{\triangle AOB} = \frac{15\sqrt{2}}{7}.$

**【解析】** (1) 椭圆  $e = \frac{2}{3}$ ,

故  $a : b : c = 3 : \sqrt{5} : 2 = 3m : \sqrt{5}m : 2m$ ,

$\therefore \frac{x^2}{9m^2} + \frac{y^2}{5m^2} = 1$  代入  $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -2\right)$ ,

$$\begin{aligned}
& \text{得 } m^2 = 1, \\
& \text{故 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1. \\
(2) & \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ y = k(x+2) \end{cases}, \\
& \text{得 } (9k^2 + 5)x^2 + 36k^2x + 36k^2 - 45 = 0, \\
& \text{故 } 14x^2 + 36x - 9 = 0, \\
& x_1 + x_2 = -\frac{18}{7}, \quad x_1x_2 = -\frac{9}{14}, \\
& \therefore |AB| = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{30}{7}, \\
& \text{设 } O \text{ 点到直线 } AB \text{ 的距离为 } d, \\
& \text{则 } d = \sqrt{2}, \\
& \therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}d \cdot |AB| = \frac{15\sqrt{2}}{7}.
\end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；面积问题

备注：2018-2019学年天津河西区天津市实验中学高二上学期中第18题9分

12. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A$ ，上顶点为  $B$ ，已知椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $|AB| = \sqrt{13}$ 。
- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设直线  $l: y = kx (k < 0)$  与椭圆交于  $P, Q$  两点， $l$  与直线  $AB$  交于点  $M$ ，且点  $P, M$  均在第四象限，若  $\triangle BPM$  的面积是  $\triangle BPQ$  面积的2倍，求  $k$  的值。

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  .  
(2)  $-\frac{1}{2}$  .

**【解析】** (1) 设椭圆焦距为  $2c$ ，由已知得  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ ，  
又由  $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得  $2a = 3b$ ，  
由  $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ ，  
从而  $a = 3, b = 2$ ，  
 $\therefore$  椭圆的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  .  
(2) 设点  $P$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ，点  $M$  的坐标为  $(x_2, y_2)$ ，  
由题意得  $x_2 > x_1 > 0$ ，  
点  $Q$  的坐标为  $(-x_1, -y_1)$ ，由  $\triangle BPM$  的面积是  $\triangle BPQ$  面积的2倍，  
可得  $|PM| = 2|PQ|$ ，

从而  $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$  , 即  $x_2 = 5x_1$  ,

易知直线  $AB$  的方程为  $2x + 3y = 6$  ,

由方程组  $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$  ,

消去  $y$  可得  $x_2 = \frac{6}{3k+2}$  ,

由方程组  $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$  , 消去  $y$  可得  $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$  ,

又由  $x_2 = 5x_1$  , 可得  $\sqrt{9k^2+4} = 5(3k+2)$  ,

两边平方, 整理得  $18k^2 + 25k + 8 = 0$  ,

解得  $k = -\frac{8}{9}$  或  $k = -\frac{1}{2}$  ,

当  $k = -\frac{8}{9}$  时,  $x_2 = -9 < 0$  , 不合题意, 舍去;

当  $k = -\frac{1}{2}$  时,  $x_2 = 12$  ,  $x_1 = \frac{12}{5}$  , 符合题意,

所以,  $k$  的值为  $-\frac{1}{2}$  .

**【标注】**【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 共线比例问题

备注: 2018-2019 学年 12 月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第 18 题 10 分

13. 已知椭圆  $C$  的两个焦点坐标分别是  $F_1(-\sqrt{3}, 0)$  ,  $F_2(\sqrt{3}, 0)$  , 并且经过点  $P(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$  .

(1) 求椭圆  $C$  的方程 .

(2) 若直线  $l$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  相切, 并与椭圆  $C$  交于不同的两点  $A, B$  , 当  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \lambda$  , 且满足  $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}$  时, 求  $\triangle AOB$  面积  $S$  的取值范围 .

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  .

(2)  $\triangle AOB$  面积  $S$  的取值范围是  $[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1]$  .

**【解析】** (1) 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  ,

由条件得  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$  ,

解得  $a = 2$  ,  $b = 1$  ,

$\therefore$  椭圆  $C$  的方程为:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  .

(2) 由题意可知, 直线  $l$  的斜率不为零,

$\therefore$  直线  $l$  即  $x - my - n = 0$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  相切,

$\therefore \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$  得  $n^2 = m^2 + 1$  ,

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ , 消去  $x$  整理得  $(m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$ ,

得  $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 4}$ ,  $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}$ ,

又  $\because |AB| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2|$ , 点  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$ ,

$\therefore$

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2} d \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |n| \cdot |y_1 - y_2| = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{n^2}{(m^2 + 4)^2}} \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{m^2 + 1}{(m^2 + 4)^2}}, \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \lambda &= \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (my_1 + n)(my_2 + n) + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2 + mn(y_1 + y_2) + n^2 \\ &= \frac{5n^2 - 4m^2 - 4}{m^2 + 4} = \frac{m^2 + 1}{m^2 + 4}, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{2}{3},$$

$$\text{令 } t = m^2 + 1, \text{ 则 } \lambda = \frac{t}{t + 3} \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right], \text{ 得 } t \in [3, 6],$$

$\therefore$

$$S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{m^2 + 1}{(m^2 + 4)^2}} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{t}{(t + 3)^2}} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{t}{t^2 + 9 + 6t}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{t + \frac{9}{t} + 6}}$$

,

$$\therefore t + \frac{9}{t} \in \left[ 6, \frac{15}{2} \right],$$

$$\therefore t + \frac{9}{t} + 6 \in \left[ 12, \frac{27}{2} \right],$$

$$\therefore \sqrt{t + \frac{9}{t} + 6} \in \left[ \sqrt{12}, \sqrt{\frac{27}{2}} \right],$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{t + \frac{9}{t} + 6}} \in \left[ \sqrt{\frac{2}{27}}, \sqrt{\frac{1}{12}} \right],$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{t + \frac{9}{t} + 6}} \in \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 \right],$$

$$\text{即 } \triangle AOB \text{ 面积 } S \text{ 的取值范围是 } \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 \right].$$

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；面积问题；最值问题

备注：2019-2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高二上学期月考第20题16分

## 5. 巩固练习

14. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 2)$ , 焦距为2.

(1) 求 $C$ 的方程.

(2) 过椭圆的右焦点作一条斜率为2的直线与椭圆交于 $A, B$ 两点,  $O$ 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ .  
(2)  $\frac{5}{3}$ .

**【解析】** (1) 椭圆焦距 $2c = 2$ , 则 $c = 1$ ,

又: 椭圆过点 $(0, 2)$ , 则 $b = 2$ ,

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 = 5,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 由(1)知椭圆右焦点为 $(1, 0)$ , 斜率 $k = 2$ ,

$\therefore$  直线方程为 $y = 2x - 2$ , 即 $2x - y - 2 = 0$ ,

$$\text{原点到直线距离 } d = \frac{|-2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 2 \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 6x^2 - 10x = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{5\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = \frac{5}{3}.$$

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系; 面积问题

备注: 2019-2020学年11月天津武清区杨村第三中学高二上学期月考第17题12分

15. 已知椭圆方程 $C$ 为:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  椭圆的右焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , 直线

$l: y = kx + m$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A, B$ 两点, 且 $k_{OA} \cdot k_{OB} = 1$ .

(1) 椭圆的方程.

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值.

(3) 若椭圆的右顶点为 $D$ , 上顶点为 $E$ , 经过原点的直线与椭圆交于 $P, Q$ 两点, 该直线与直线 $DE$ 交于点 $M$ , 且点 $P, M$ 均在第四象限, 若 $\triangle EMP$ 的面积是 $\triangle EPQ$ 面积的2倍, 求该直线方程.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) 3.

(3)  $y = -\frac{1}{2}x$ .

【解析】(1) 由椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右焦点  $(\sqrt{5}, 0)$ ,

$$\text{离心率 } e = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 可知: } \begin{cases} c = \sqrt{5} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{5} \end{cases}.$$

则椭圆的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 联立直线  $l$  与椭圆  $C: \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$  得:

$$(9k^2 + 4)x^2 + 18kmx + 9m^2 - 36 = 0,$$

由  $\Delta = (18km)^2 - 4(9k^2 + 4)(9m^2 - 36) > 0$  可得:  $m^2 < 9k^2 + 4$ ,

$$x_1 + x_2 = -\frac{18km}{9k^2 + 4}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{9m^2 - 36}{9k^2 + 4}.$$

$$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{k^2 \cdot \frac{9m^2 - 36}{9k^2 + 4} + km \cdot \left(-\frac{18km}{9k^2 + 4}\right) + m^2}{\frac{9m^2 - 36}{9k^2 + 4}} = 1 \text{ 可得:}$$

$$5m^2 = 36 - 36k^2, \quad m^2 = \frac{36 - 36k^2}{5}.$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{18km}{9k^2 + 4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9m^2 - 36}{9k^2 + 4}}$$

$$= \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{9k^2 - m^2 - 4}}{9k^2 + 4}.$$

原点  $O$  到直线  $kx - y + m = 0$  的距离  $d$  为:

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 的面积 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{12}{9k^2 + 4} \times \sqrt{m^2(9k^2 - m^2 - 4)}$$

$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{m^2 \cdot (9k^2 + 4 - m^2)}}{9k^2 + 4}.$$

$$\leq 6 \cdot \frac{1}{9k^2 + 4} \cdot \frac{m^2 + 9k^2 + 4 - m^2}{2} = 3.$$

当且仅当  $m^2 = 9k^2 + 4 - m^2$  , 即  $9k^2 + 4 = 2m^2$  时 , 不等式取最大值 , 最大值

$$S_{\triangle AOB \max} = 3 .$$

( 3 ) 设  $P(x_P, y_P)$  ,  $M(x_M, y_M)$  .

由题可知 :  $x_M > x_P > 0$  ,

点  $Q$  的坐标  $Q(-x_P, -y_P)$  ,

由  $\triangle EMP$  和  $\triangle EPQ$  的面积比值为 2 可得 .

$$|PM| = 2|PQ| ,$$

$$\text{从而 : } x_M - x_P = 2[x_P - (-x_P)] ,$$

$$\text{即 } x_M = 5x_P .$$

设直线  $PQ : y = kx$  ,

又  $E(0, 2)$  ,  $D(3, 0)$  ,

则直线  $ED$  的方程为  $2x + 3y - 6 = 0$  .

$$\text{联立 } \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = kx \end{cases} \text{ 可得 : } x_M = \frac{6}{2+3k} , y_M = \frac{6k}{2+3k} ,$$

$$\text{联立 : } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 可得 : } (4+9k^2)x^2 - 36 = 0 .$$

$$x_P = \frac{6}{\sqrt{4+9k^2}} , \text{ 由 } x_M = 5x_P \text{ 可得 : } \frac{6}{2+3k} = 5 \cdot \frac{6}{\sqrt{4+9k^2}} ,$$

$$\text{整理得 : } 18k^2 + 25k + 8 = 0 , \text{ 解得 : } k = -\frac{8}{9} \text{ 或 } k = -\frac{1}{2} .$$

$$\text{当 } k = -\frac{1}{2} \text{ 时 , } x_M = 12 , x_D = \frac{12}{5} , \text{ 符合题意 ,}$$

$$\text{当 } k = -\frac{8}{9} \text{ 时 , } x_M = -9 < 0 , \text{ 不符合 } x_M > 0 .$$

综上所述 , 直线  $PQ$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x$  .

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；最值问题；面积问题

备注：2019-2020 学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末第 18 题

16. 已知点  $A(0, -2)$  , 椭圆  $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $F$  是椭圆  $C$  的右焦点 , 直线  $AF$  的斜率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ,  $O$  为坐标原点 .

( 1 ) 求椭圆  $C$  的方程 .

( 2 ) 设过点  $A$  的动直线  $l$  与  $C$  相交于  $P$  ,  $Q$  两点 , 当  $\triangle OPQ$  的面积最大时 , 求直线  $l$  的方程 .

$$\text{【答案】 ( 1 ) } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 .$$

$$( 2 ) y = \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2 \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x - 2 .$$

**【解析】** ( 1 )

设  $F(c, 0)$  , 由条件知  $\frac{2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  ,

得  $c = \sqrt{3}$  ,

又  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,

所以  $a = 2$  ,  $b^2 = a^2 - c^2 = 1$  ,

故  $E$  的方程  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  .

( 2 ) 依题意 , 当  $l \perp x$  轴 , 不合题意 , 故设直线  $l : y = kx - 2$  ,

设  $P(x_1, y_1)$  ,  $Q(x_2, y_2)$  ,

将  $y = kx - 2$  代入  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  , 得  $(1 + 4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0$  ,

当  $\Delta = 16(4k^2 - 3) > 0$  , 即  $k^2 > \frac{3}{4}$  时 ,  $x_{1,2} = \frac{8k \pm 2\sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2}$  ,

从而  $|PQ| = \sqrt{k^2 + 1}|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2}$  ,

又点  $O$  到直线  $PQ$  的距离  $d = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$  ,

所以  $\triangle OPQ$  的面积  $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}d|PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2}$  ,

设  $\sqrt{4k^2 - 3} = t$  , 则  $t > 0$  ,  $S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \leq 1$  ,

当且仅当  $t = 2$  ,  $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$  时 , 等号成立 , 且满足  $\Delta > 0$  ,

所以当  $\triangle OPQ$  的面积最大时 ,  $l$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$  或  $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$  .

**【标注】**【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；面积问题；最值问题

备注：2019-2020学年天津河西区高二上学期期末第18题12分