

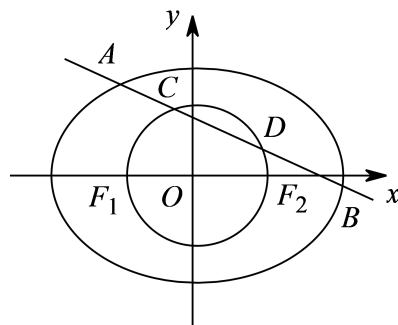
若直线的斜率为 k ，被圆锥曲线截得的弦 AB 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}$$

$$\text{或 } |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

2. 典型例题

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(0, \sqrt{3})$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 。



- (1) 求椭圆的标准方程。
- (2) 若直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与椭圆交于 A, B 两点，与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C, D 两点，求弦 AB, CD 的长度。
6. 已知点 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4。
- (1) 求：椭圆的方程。
- (2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B ，已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$ 。
- ① 求： $\vec{FA} \cdot \vec{FB}$ 的取值范围。
- ② 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ，求：直线 l 的斜率。
7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，其离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，点 P 为椭圆上的一个动点， $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 若 A, B, C, D 是椭圆上不重合的四个点, AC 与 BD 相交于点 F_1 , $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 求 $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$ 的取值范围.

3. 巩固练习

8. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(0, 1)$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 过椭圆右焦点做斜率为 1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度.

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(1) 求椭圆 C 的长轴和短轴的长, 离心率 e , 左焦点 F_1 .

(2) 经过椭圆 C 的左焦点 F_1 作直线 l , 直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = \frac{8\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的方程.

10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1 和 F_2 , 上

顶点为 B , BF_2 , 延长线交椭圆于点 A , $\triangle ABF_1$ 的周长为 8, 且 $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 $l \perp AB$ 且与椭圆 C 相交于两点 P, Q , 求 $|PQ|$ 的最大值.

三、面积问题

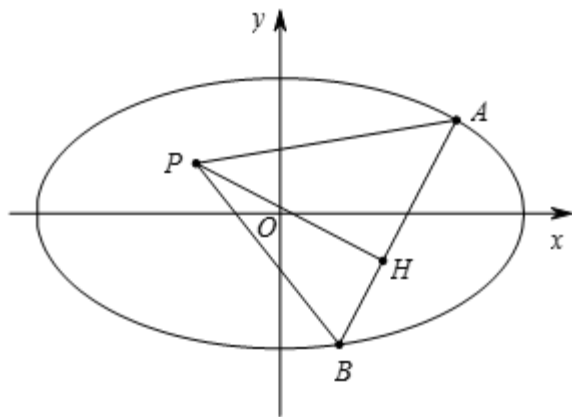
1. 三角形面积计算

一般三角形面积计算

设直线 AB 方程为 $y = kx + m$, $P(x_0, y_0)$,

则 $d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

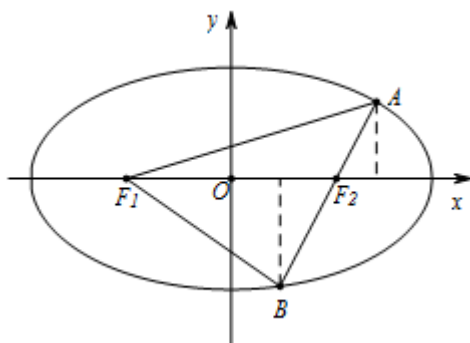
$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}$.



🔴 焦点三角形面积计算

直线 AB 过焦点 F_2 , $\triangle ABF_1$ 的面积为:

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c|y_1 - y_2| = \frac{c\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



2. 四边形面积计算

🔴 平行四边形面积计算

直线 AB 为 $y = kx + m_1$, 直线 CD 为 $y = kx + m_2$, $d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x} |m_1 - m_2|}{|a|}.$$

3. 面积最值计算

圆锥曲线经常用到的均值不等式形式:

(1) $S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}}$, (注意分 $t = 0$, $t > 0$, $t < 0$ 三种情况讨论)

(2) $|AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6}$, 当且仅当 $9k^2 = \frac{1}{k^2}$ 时, 等号成立.

(3) $S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2}$,
当且仅当 $m^2 = -m^2 + 8$ 时, 等号成立.

4. 典型例题

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$, 点 $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -2\right)$ 在此椭圆上, 经过椭圆的

左焦点 F , 斜率为 k 的直线与椭圆交于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 当 $k = 1$ 时求 $S_{\triangle AOB}$ 的值.

12. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B , 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $|AB| = \sqrt{13}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限, 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

13. 已知椭圆 C 的两个焦点坐标分别是 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, 并且经过点 $P\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 并与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 当 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \lambda$, 且满足 $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}$ 时, 求 $\triangle AOB$ 面积 S 的取值范围.

5. 巩固练习

14. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 2)$, 焦距为 2.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过椭圆的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

15. 已知椭圆方程 C 为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 椭圆的右焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 直线

$l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $k_{OA} \cdot k_{OB} = 1$.

(1) 椭圆的方程.

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值.

(3) 若椭圆的右顶点为 D , 上顶点为 E , 经过原点的直线与椭圆交于 P , Q 两点 , 该直线与直线 DE 交于点 M , 且点 P , M 均在第四象限 , 若 $\triangle EMP$ 的面积是 $\triangle EPQ$ 面积的 2 倍 , 求该直线方程 .

16. 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆 C 的右焦点 , 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点 .

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 设过点 A 的动直线 l 与 C 相交于 P , Q 两点 , 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时 , 求直线 l 的方程 .