

# 直线与椭圆的位置关系2

## 一、中点弦问题

直线被椭圆所截得的弦 $AB$ 的中点我们称之为弦中点，与弦中点有关的系列问题叫做中点弦问题。

弦中点的求法：设直线 $y = kx + m$ 与椭圆得两个交点坐标分别为 $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$ ，则弦 $AB$ 的中点 $Q$ 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ ，其中 $\frac{y_1 + y_2}{2} = k(\frac{x_1 + x_2}{2}) + m$ 。

### 1. 中点弦常见题型

- ①已知圆锥曲线内一点 $P$ ，求过定点 $P$ 且以 $P$ 为中点的弦所在直线的方程；
- ②利用已知条件求弦的中点；
- ③求线段的垂直平分线；
- ④对称问题。

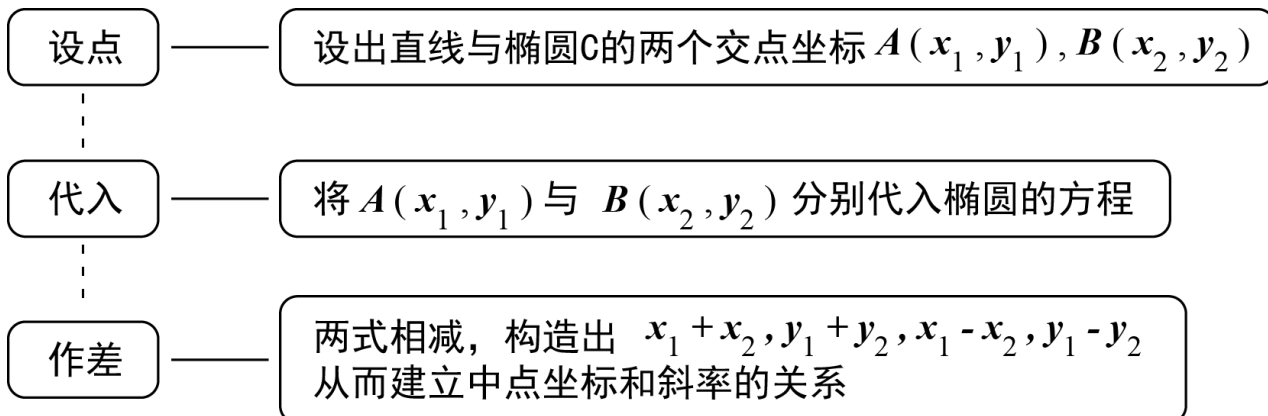
### 2. 中点弦常见解题方法

#### 根与系数的关系法

将直线方程代入圆锥曲线的方程，消元后得到一个一元方程，若为一元二次方程，则利用根与系数的关系和中点坐标公式建立等式求解它有一个固定的模式，即设交点坐标为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，联立直线方程和曲线方程，消元得出一个一元方程(必要时对二次项的系数加以讨论)，二次项系数不为0时，得出 $x_1 + x_2, x_1x_2$ (或 $y_1 + y_2, y_1y_2$ )及 $\Delta > 0$ ，然后再根据题设条件求解。

#### 点差法

(1)点差法的“三步曲”



(2)点差法的结论(设弦 $AB$ 的中点为 $P$ )

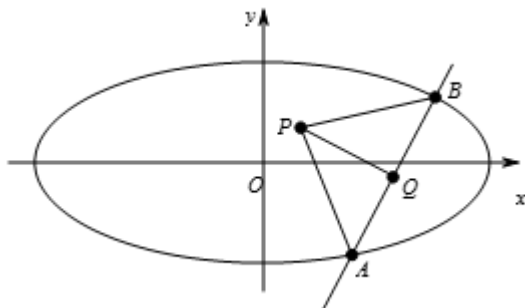
①当椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 时,  $k_{AB} \cdot k_{OP} = -\frac{b^2}{a^2}$ ;

②当椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 时,  $k_{AB} \cdot k_{OP} = -\frac{a^2}{b^2}$ .

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的弦 $AB$ 的中点 $M$ 的坐标为 $(2, 1)$ , 求直线 $AB$ 的方程.
2. 已知椭圆与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 的焦点相同, 且它们的离心率之和等于 $\frac{14}{5}$ .  
(1) 求椭圆方程.  
(2) 过椭圆内一点 $M(1, 1)$ 作一条弦 $AB$ , 使该弦被点 $M$ 平分, 求弦 $AB$ 所在直线方程.
3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍, 且椭圆过点 $A(0, -2)$ .  
(1) 求椭圆 $C$ 的方程.  
(2) 若直线 $l$ 与椭圆相交于 $M, N$ 两点, 且线段 $MN$ 的中点为 $E(-2, 1)$ , 求直线 $l$ 的方程.

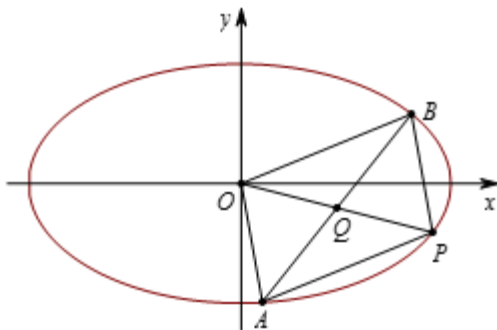
### 3. 中点弦相关模型

#### 🔗 等腰三角形型

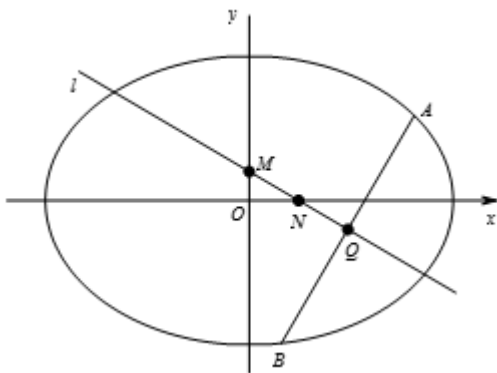


解题思路:  $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$ .

#### 🔗 平行四边形型



解题思路: 由以 $OA, OB$ 为邻边的平行四边形的顶点 $P$ 在椭圆上,  
得 $x_P = 2x_Q = x_1 + x_2$ ,  $y_P = 2y_Q = y_1 + y_2$ , 然后再把 $P$ 点坐标代入到椭圆方程中.



解题思路：中点 $Q$ 的坐标为 $(x_Q, y_Q)$ ，垂直平分线方程为 $y - y_Q = -\frac{1}{k}(x - x_Q)$ ，  
令 $x = 0$ ，得到 $M$ 点坐标，令 $y = 0$ ，得到 $N$ 点坐标。

4. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A\left(1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 和点 $B(0, -1)$ .
  - (1) 求椭圆 $G$ 的方程；
  - (2) 设过点 $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $G$ 交于 $M, N$ 两点，且 $|BM| = |BN|$ ，求直线 $l$ 的方程。
5. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，其焦点为 $F$ ， $O$ 为坐标原点，直线 $AB$ （不垂直于 $x$ 轴），过点 $F$ 且抛物线 $C$ 交于 $A, B$ 两点，直线 $OA$ 与 $OB$ 的斜率之积为 $-p$ 。
  - (1) 求抛物线 $C$ 的方程。
  - (2) 若 $M$ 为线段 $AB$ 的中点，射线 $OM$ 交抛物线 $C$ 于点 $D$ ，求证： $\frac{|OD|}{|OM|} > 2$ 。
6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以椭圆的一个短轴端点及两个焦点为顶点的三角形的面积为 $\sqrt{3}$ ，已知点 $A(a, 0)$ ， $B(-a, 0)$ 。
  - (1) 求椭圆 $C$ 的方程。
  - (2) 过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 作直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于 $E, F$ 两点，线段 $EF$ 的中点为 $M$ ，求直线 $MA$ 的斜率 $k$ 的取值范围。
7. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 $A, C$ 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上，对角线 $BD$ 所在直线的斜率为1。
  - (1) 当直线 $BD$ 过点 $(0, 1)$ 时，求直线 $AC$ 的方程。
  - (2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值。
8. 已知椭圆 $C$ 以坐标轴为对称轴，以坐标原点为对称中心，椭圆的一个焦点为 $F(1, 0)$ ，点 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上，
  - (1) 求椭圆 $C$ 的方程。
  - (2)

斜率为 $k$ 的直线 $l$ 过点 $F$ 且不与坐标轴垂直, 直线 $l$ 交椭圆于 $A$ 、 $B$ 两点, 线段 $AB$ 的垂直平分线与 $x$ 轴交于点 $G$ , 求点 $G$ 横坐标的取值范围.

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 $l$ 与椭圆相交于不同的两点 $A$ ,  $B$ . 已知点 $A$ 的坐标为 $(-a, 0)$ .

① 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ , 求直线 $l$ 的倾斜角;

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 $AB$ 的垂直平分线上, 且 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = 4$ . 求 $y_0$ 的值.

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 其右顶点与上顶点的距离为 $\sqrt{5}$ , 过点 $P(0, 2)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A$ 、 $B$ 两点.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2) 设 $M$ 是 $AB$ 中点, 且 $Q$ 点的坐标为 $(\frac{2}{5}, 0)$ , 当 $QM \perp AB$ 时, 求直线 $l$ 的方程.

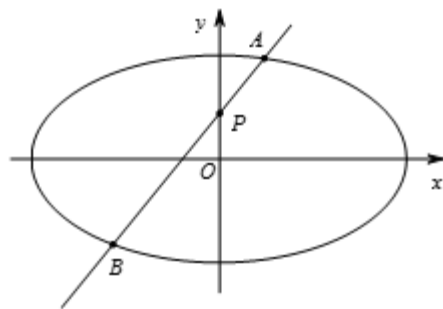
## 二、共线比例问题

在直线与圆锥曲线的综合题中, 我们把一条直线上涉及到两条线段或者两个向量成比例的问题称之为共线问题. 共线比例线段问题的解题思路主要利用相似转化为 $x_1, x_2$ 或是 $y_1, y_2$ 成比例的关系.

例如: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(0, t)$ ,

(1) 若 $\vec{PA} = \lambda \vec{PB}$ , 则 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \cdots (1) \\ y_1 - t = \lambda(y_2 - t) \cdots (2) \end{cases}$ , 其中(1)(2)是等价的, 我们只选择其中一个运用.

(2) 若 $|AP| = \lambda |BP|$ , 则 $x_1 = -\lambda x_2$ .



【补充说明】有时候题目中会以两个三角形的面积成倍数呈现, 但实质上也是共线比例问题.

11. 已知点 $A(2, 1)$ 为椭圆 $G: x^2 + 2y^2 = m$ 上的一点.

(1) 求椭圆 $G$ 的焦点坐标;

- (2) 若椭圆 $G$ 上的 $B, C$ 两点满足 $2k_1k_2 = -1$  (其中 $k_1, k_2$ 分别为直线 $AB, AC$ 的斜率). 证明:  
 $B, C, O$ 三点共线.

12. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 动点 $P$ 到直线 $l: x = 2$ 的距离是到点 $F(1, 0)$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍.

- (1) 求动点 $P$ 的轨迹方程;  
 (2) 设直线 $FP$ 与(I)中曲线交于点 $Q$ , 与 $l$ 交于点 $A$ , 分别过点 $P$ 和 $Q$ 作 $l$ 的垂线, 垂足为 $M, N$ , 问: 是否存在点 $P$ 使得 $\triangle APM$ 的面积是 $\triangle AQN$ 面积的9倍? 若存在, 求出 $P$ 的坐标; 若不存在, 说明理由.

13. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ , 点 $B(0, b)$ , 过点 $B$ 且与 $BF_2$ 垂直的直线交 $x$ 轴负半轴于点 $D$ ,  $\overrightarrow{DF_1} = \overrightarrow{F_1F_2}$ .

- (1) 求证:  $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .  
 (2) 若过 $B, D, F_2$ 三点的圆与直线 $l: x + y = 0$ 相交于 $E, F$ 两点, 且 $|EF| = 2\sqrt{7}$ , 求 $\Gamma$ 的方程.  
 (3) 若 $a = 2$ , 过 $F_2$ 且不与坐标轴垂直的直线与 $\Gamma$ 交于 $P, Q$ 两点, 点 $M$ 是点 $P$ 关于 $x$ 轴的对称点, 在 $x$ 轴上是否存在一个定点 $N$ , 使得 $M, Q, N$ 三点共线? 若存在, 求出点 $N$ 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

### 三、 定点定值问题

#### 1. 定点问题

解题思路:

①根据题意选择参数, 建立一个直线系或曲线系方程, 经过分析、整理, 对方程进行等价变形, 以找出适合方程且与参数无关的坐标(该坐标对应的点即为所求定点);

②从特殊位置入手, 找出定点, 再证明该点符合题意.

14. 在平面直角坐标系中, 点 $P(x, y)$ 为动点, 已知点 $A(\sqrt{2}, 0), B(-\sqrt{2}, 0)$ , 直线 $PA$ 与 $PB$ 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ .

- (1) 求动点 $P$ 的轨迹 $E$ 的方程.  
 (2) 过点 $F(1, 0)$ 的直线 $l$ 交曲线 $E$ 于 $M, N$ 两点, 设点 $N$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $Q$  ( $M, Q$ 不重合), 求证: 直线 $MQ$ 过定点.

15. 设 $O$ 为坐标原点, 动点 $M$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上, 过点 $M$ 作 $x$ 轴的垂线, 垂足为 $N$ , 点 $P$ 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ .

(1) 求点 $P$ 的轨迹方程.

(2) 设点 $Q$ 在直线 $x = -3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ . 证明: 过点 $P$ 且垂直于 $OQ$ 的直线 $l$ 过椭圆 $C$ 的左焦点 $F$ .

16. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $F_1, F_2$ 是椭圆的两个焦点,  $A$ 为椭圆上一点且 $\angle F_1 A F_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\triangle F_1 A F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知点 $P(0, 1)$ , 直线 $l$ 不经过点 $P$ 且与椭圆交于 $B, C$ 两点, 若直线 $PB$ 与直线 $PC$ 的斜率之和为1, 证明直线 $l$ 过定点, 并求出该定值.

## 2. 定值问题

解题思路:

①从特殊情况入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;

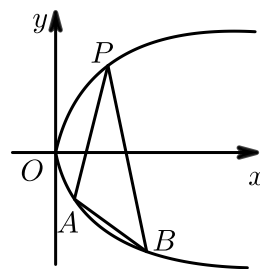
②直接推理、计算, 并在计算的过程中消去变量, 从而得到定值.

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 右焦点为 $F$ , 点 $Q(0, 1)$ 在椭圆 $C$ 上.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2) 过点 $F$ 的直线交椭圆 $C$ 于 $M, N$ 两点, 交直线 $x = 2$ 于点 $P$ , 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MF}$ ,  $\overrightarrow{PN} = \mu \overrightarrow{NF}$ , 求证:  $\lambda + \mu$ 为定值.

18. 如图所示, 抛物线关于 $x$ 轴对称, 它的顶点坐标在坐标原点, 点 $P(1, 2)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ 均在抛物线上.



(1) 求抛物线的方程及其准线方程.

(2) 当 $PA$ 与 $PB$ 的斜率存在且倾斜角互补时, 证明: 直线 $AB$ 的斜率为定值.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 1)$ , 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2)  $A_1, A_2$ 为椭圆 $C$ 的左、右顶点, 直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ 与 $x$ 轴交于点 $D$ , 点 $P$ 是椭圆 $C$ 上异于 $A_1, A_2$ 的动点, 直线 $A_1P, A_2P$ 分别交直线 $l$ 于 $E, F$ 两点. 证明:  $|DE| \cdot |DF|$ 恒为定值.

## 四、 夹角问题

(1) 原点 $O$ 在以 $AB$ 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为钝角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$ .

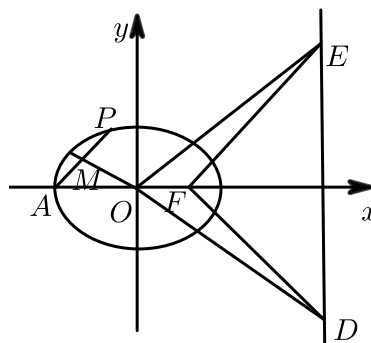
(2) 原点 $O$ 在以 $AB$ 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为锐角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$ .

20. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 抛物线 $C$ 的顶点是原点, 以 $x$ 轴为对称轴, 且经过点 $P(1, 2)$ .

(1) 求抛物线 $C$ 的方程.

(2) 设点 $A, B$ 在抛物线 $C$ 上, 直线 $PA, PB$ 分别与 $y$ 轴交于点 $M, N$ ,  $|PM| = |PN|$ . 求直线 $AB$ 的斜率.

21. 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ,  $F$ 为椭圆 $C$ 的右焦点.  $A(-a, 0)$ ,  $|AF| = 3$ .



(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2) 设 $O$ 为原点,  $P$ 为椭圆上一点,  $AP$ 的中点为 $M$ . 直线 $OM$ 与直线 $x = 4$ 交于点 $D$ , 过 $O$ 且平行于 $AP$ 的直线与直线 $x = 4$ 交于点 $E$ . 求证:  $\angle ODF = \angle OEF$ .

22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ , 点 $P(2, \sqrt{3})$ 满足:  $F_2$ 在线段 $PF_1$ 的中垂线上.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2) 若斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 $l$ 与 $x$ 轴、椭圆 $C$ 顺次相交于点 $A(2, 0)$ 、 $M, N$ , 且 $\angle NF_2F_1 = \angle MF_2A$ , 求 $k$ 的取值范围.

23. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $A$ , 右焦点为 $F_2(2, 0)$ , 点 $B(2, -\sqrt{2})$ 在椭圆 $C$ 上.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程.

(2) 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与椭圆 $C$ 交于 $E, F$ 两点, 直线 $AE, AF$ 分别与 $y$ 轴交于点 $M, N$ . 当 $k$ 变化时, 在 $x$ 轴上是否存在点 $P$ , 使得 $\angle MPN$ 为直角. 若存在, 求出点 $P$ 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

