

直线与椭圆的位置关系1

一、 填空

1. 已知以 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$ 有且仅有一个交点, 则椭圆的长轴长为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】 求焦点到直线上某点的距离的和的最小值, 那个点就是切点 .

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 直线和椭圆的位置关系

2. 直线 $x + y + m = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的充要条件是 _____ .

【答案】 $m = \pm\sqrt{5}$

【解析】 根据题意, 联立方程可得
$$\begin{cases} x + y + m = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

消去 y 整理得: $5x^2 + 4mx + 2m^2 - 6 = 0$,

根据题意可得, $\Delta = (4m)^2 - 4 \times 5 \times (2m^2 - 6) = 0$,

$\therefore m^2 = 5$, $m = \pm\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】 直线与圆锥曲线的位置关系判断; 直线和椭圆的位置关系; 充要条件与解析几何结合

3. 已知直线 $y = x - 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A 、 B 两点, 则线段 AB 的长为 _____ .

【答案】 $\frac{24}{7}$

【解析】 联立
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

得 $7x^2 - 8x - 8 = 0$,

$\Delta = 64 + 4 \times 7 \times 8 = 288 > 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8}{7}, x_1 x_2 = -\frac{8}{7},$$

$$|AB| = \sqrt{(1+1)^2 \left[\frac{64}{49} - 4 \times \left(-\frac{8}{7} \right) \right]} = \frac{24}{7}.$$

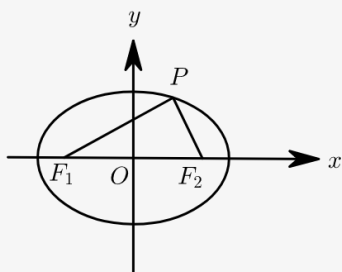
【标注】【知识点】弦长求解问题；直线和椭圆的位置关系

4. 已知 F_1 、 F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点， P 为椭圆 C 上一点，且 $PF_1 \perp PF_2$.
若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b =$ _____ .

【答案】 3

【解析】方法一：依题意，得
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a, \\ |PF_1| \cdot |PF_2| = 18, \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2, \end{cases}$$
 可得 $4c^2 + 36 = 4a^2$ ，即 $a^2 - c^2 = b^2 = 9$ ，
故 $b = 3$.

方法二：如图，



$$\because \overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2},$$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，

又 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，

$$\therefore \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 9, \text{ 得 } |PF_1| |PF_2| = 18,$$

在 $\text{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，由勾股定理得： $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，

$$\therefore (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| |PF_2| = 4c^2, \text{ 即 } 2(a^2 - c^2) = |PF_1| |PF_2| = 18,$$

$$\text{得 } b^2 = a^2 - c^2 = 9,$$

$$\therefore b = 3.$$

【标注】【知识点】椭圆的定义

5. 已知抛物线 $y^2 = -x$ 与直线 $y = k(x+1)$ 相交于 A 、 B 两点，点 O 是坐标原点，当 $\triangle OAB$ 的面积等于 $\sqrt{10}$ 时， $k =$ _____ .

【答案】 $\pm \frac{1}{6}$

【解析】将两方程联立， $\begin{cases} y^2 = -x \\ y = k(x+1) \end{cases}$ ，消去 y ，得

$$k^2x^2 + (2k^2 + 1)x + k^2 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2k^2 + 1}{k^2},$$

$$\text{由 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d, \text{ 其中,}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{(2k^2+1)^2}{k^4} - 4},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{4k^2+1}}{k^2} \cdot \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{10},$$

$$\therefore k = \pm \frac{1}{6}.$$

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，直线 $l: y = x + m$ 与椭圆有两个交点时， m 的取值范围为 _____.

【答案】 $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$

【解析】联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ ，消去 y 并整理得 $7x^2 + 8mx + 4(m^2 - 3) = 0$ ，

直线与椭圆有两个交点 $\Leftrightarrow \Delta = 64m^2 - 4 \times 4 \times 7(m^2 - 3) > 0$ ，解得 $m \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ 。

故答案为： $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ 。

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

【素养】数学运算

二、解答

7. 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x + m$ 。

(1) 当 m 为何值时，直线与该椭圆有公共点。

(2) 若直线被椭圆截得的弦长为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ，求直线的方程。

【答案】(1) $m \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ 。

(2) $y = x$ 。

【解析】(1) 联立 $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ ，
得 $5x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ ，

$\therefore l: y = x + m$ 与该椭圆有公共点,

$$\therefore \Delta = 4m^2 - 20(m^2 - 1) \geq 0, \text{ 得 } m^2 \leq \frac{5}{4},$$

$$\therefore m \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right].$$

(2) 设 l 交椭圆于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 (1) 知 } x_1 + x_2 = -\frac{2m}{5}, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 1}{5},$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{5 - 4m^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}, \text{ 得 } m^2 = 0, \end{aligned}$$

所以 $l: y = x$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线的一般式方程

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) 设椭圆的半焦距为 c , 依题意
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a = \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\therefore b = 1, c = \sqrt{2},$$

$$\text{所求椭圆方程为: } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(2) ①当斜率不存在时, 此时直线为 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{带入椭圆方程得 } A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 或 } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{则 } AB = \sqrt{3}, \text{ 此时 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} d \cdot AB = \frac{3}{4}.$$

②斜率存在时, 设直线方程为 $y = kx + m$,

$$\text{由题意可得 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{联立得} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{得} (1 + 3k^2)x^2 + 6kxm + 3m^2 - 3 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则有

$$x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{3m^2 - 3}{1 + 3k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } AB &= \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2| \\ &= \frac{\sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{36k^2 - 12m^2 + 12}}{1 + 3k^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + k^2} \sqrt{27k^2 + 3}}{1 + 3k^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S &= \frac{1}{2}d \cdot AB = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{9k^4 + 10k^2 + 1}{9k^4 + 6k^2 + 1}} \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{4k^2}{9k^4 + 6k^2 + 1}}, \end{aligned}$$

$$\text{而 } 9k^4 + 6k^2 + 1 \geq 12k^2, \text{ 则 } S \leq \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{4k^2}{12k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{综上所述, } S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】面积问题；最值问题