

直线与椭圆位置关系（三）练习题

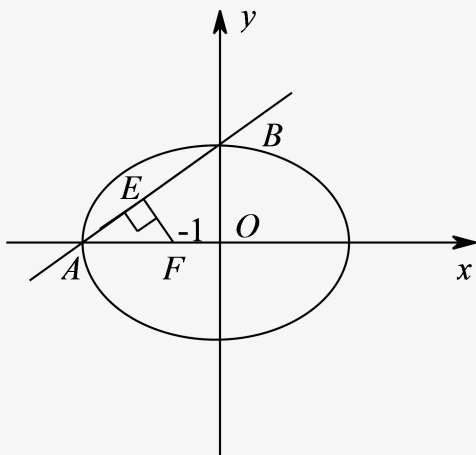
1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 $F(-1, 0)$ ，左顶点为 A ，上顶点为 B ， F 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{7}}{7}|OB|$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $(1, \frac{1}{2})$ 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ，若 $|MP| = |PN|$ ，求直线 MN 的方程。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。
(2) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ 。

【解析】 (1) 如图，



作 $EF \perp AB$ 于点 E 。在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AOB$ 中，
$$\begin{cases} \angle AEF = \angle AOB \\ \angle EAF = \angle OAB \\ \angle AFE = \angle ABO \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AOB \therefore \frac{|EF|}{|OB|} = \frac{|AF|}{|AB|}$ 。

即 $\frac{\frac{\sqrt{7}}{7}b}{b} = \frac{a-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，且 $b^2 = a^2 - 1$ 。

可得 $a = 2$ 或 $a = \frac{4}{5}$ (舍去)。

$\therefore a = 2, b = \sqrt{3}$ 。

$\therefore$ 椭圆 C 方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 当直线 MN 斜率不存在时，显然不成立。

所以，设 MN 斜率为 k 。

$M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$ 。

MN 直线为： $y - \frac{1}{2} = k(x - 1)$ 。

$$\text{即 } y = kx + \frac{1}{2} - k.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + \frac{1}{2} - k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{得: } (3 + 4k^2)x^2 + (4k - 8k^2)x + 4k^2 - 4k - 11 = 0.$$

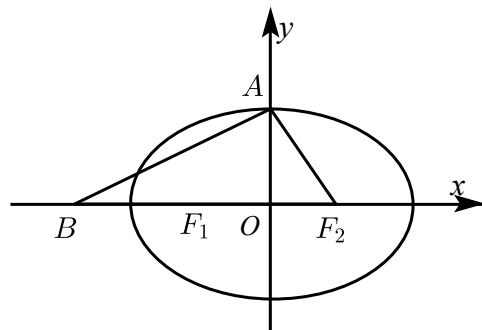
$$x_M + x_N = \frac{8k^2 - 4k}{3 + 4k^2} = 2.$$

$$\text{得 } k = -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{直线 } MN \text{ 为: } y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

【标注】【知识点】直线的垂直；相似三角形；中点弦问题；定值问题（证明、探究）；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

2. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上顶点为 A ，在 x 轴负半轴上有一点 B ，满足 $\overrightarrow{BF_1} = \overrightarrow{F_1F_2}$ ，且 $AB \perp AF_2$ 。



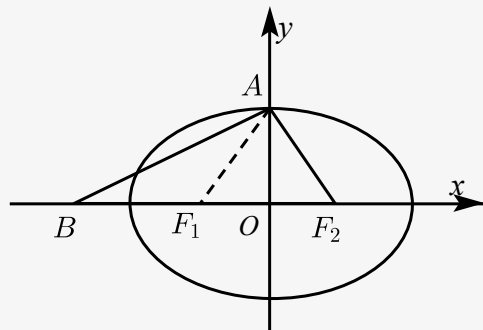
(1) 求椭圆 C 的离心率。

(2) 在 (2) 的条件下，过右焦点 F_2 作斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点，线段 MN 的中垂线与 x 轴相交于点 $P(m, 0)$ ，求实数 m 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$ 。

(2) $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ 。

【解析】 (1) 连接 AF_1 ，



因为 $AB \perp AF_2$ ， $BF_1 = F_1F_2$ ，

所以 $AF_1 = F_1F_2$, 即 $a = 2c$,

故椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(2) 由(2)知 $F_2(1, 0)$, $l: y = k(x - 1)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{得} (3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 ,$$

$\therefore l$ 过点 F_2 , $\therefore \Delta > 0$ 恒成立 ,

$$\text{设} M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{则} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2} ,$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = \frac{-6k}{3 + 4k^2} ,$$

$$MN \text{ 中点 } \left(\frac{4k^2}{3 + 4k^2}, \frac{-3k}{3 + 4k^2} \right) ,$$

当 $k = 0$ 时 , MN 为长轴 , 中点为原点 , 则 $m = 0$,

$$\text{当} k \neq 0 \text{ 时 , } MN \text{ 中垂线方程 } y + \frac{3k}{3 + 4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{4k^2}{3 + 4k^2} \right) .$$

$$\text{令} y = 0, \therefore m = \frac{k^2}{3 + 4k^2} = \frac{1}{\frac{3}{k^2} + 4} ,$$

$$\therefore \frac{3}{k^2} > 0, \frac{1}{k^2} + 4 > 4, \therefore 0 < m < \frac{1}{4} ,$$

综上实数 m 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4} \right)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；求椭圆的离心率；中点弦问题

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴为4, 点 $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上 .

(1) 求椭圆的方程 .

(2) 设斜率为1的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, 线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交于点 P , 且点 P 的横坐标取值范围是 $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$, 求 $|MN|$ 的取值范围 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

$$(2) |MN| \in \left(\frac{8\sqrt{2}}{5}, \frac{4\sqrt{10}}{5} \right) .$$

【解析】 (1) 椭圆 C 的长轴长为4, 则 $2a = 4$,

所以 $a = 2$,

点 $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上 ,

$$\text{所以} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 ,$$

所以 $b = 1$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = x + m$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, MN 的中点为 $D(x_0, y_0)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{消去} y,$$

$$\text{得} 5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{所以} \Delta = 64m^2 - 16 \times 5(m^2 - 1) > 0,$$

$$\text{即} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}, (*),$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{5},$$

$$\text{故} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{4}{5}m, y_0 = x_0 + m = \frac{1}{5}m, \text{即} D\left(-\frac{4}{5}m, \frac{1}{5}m\right),$$

$$\text{所以线段} MN \text{的垂直平分线方程为} y = -x - \frac{3m}{5},$$

$$\text{故点} P \text{的横坐标为} -\frac{3m}{5},$$

$$\text{即} -\frac{3}{5} < -\frac{3m}{5} < 0,$$

$$\text{所以} 0 < m < 1 \text{符合} (*) \text{式},$$

$$\text{由} |MN| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{5 - m^2},$$

$$\text{所以} |MN| \in \left(\frac{8\sqrt{2}}{5}, \frac{4\sqrt{10}}{5}\right).$$

【标注】【知识点】弦长求解问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

4. 已知椭圆 C 的中心在原点，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，右焦点到直线 $x + y + \sqrt{2} = 0$ 的距离为2.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 椭圆 C 的下顶点为 A ，直线 $y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 C 相交于不同的两点 M, N ，当 $|AM| = |AN|$ 时，求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

【解析】 (1) 设椭圆右焦点为 $(c, 0)$,

$$\therefore \frac{|c + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 2,$$

$$\text{即} c = \sqrt{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(2) 根据题意知 $A(0, -1)$,

设弦 MN 中点 $P(x_P, y_P)$, x_M, x_N 分别为 M, N 横坐标,

由直线与椭圆有两个不同交点,

$$\text{直线与椭圆方程消去 } y, \text{ 得: } (3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3(m^2 - 1) = 0,$$

$$\therefore \Delta > 0 \text{ 即 } m^2 < 3k^2 + 1 \text{ ①},$$

$$x_P = -\frac{3mk}{3k^2 + 1},$$

$$y_P = kx_P + m = \frac{m}{3k^2 + 1},$$

$$k_{AP} = \frac{y_P + 1}{x_P} = -\frac{m + 3k^3 + 1}{3mk},$$

$$\therefore |AM| = |AN|,$$

$$\therefore AM \perp AN,$$

$$\text{则 } -\frac{m + 3k^3 + 1}{3mk} = -\frac{1}{k},$$

$$\text{即 } 2m = 3k^2 + 1 \text{ ②},$$

$$\text{将②代入①得: } 2m > m^2,$$

$$\text{得 } 0 < m < 2,$$

$$\text{由②得: } k^2 = \frac{2m - 1}{3} > 0,$$

$$\text{得: } m > \frac{1}{2},$$

$$\therefore m \text{ 取值范围是 } \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

【标注】【知识点】中点弦问题；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $x - y + 2b = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 且与 y 轴交于 M 点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 M 的直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 点 P 是 AB 的中点, 且点 Q 坐标为 $\left(-\frac{9}{10}, 0\right)$, 当 $PQ \perp AB$ 时, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

(2) 直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $y = \frac{3}{2}x + 2$.

【解析】 (1) 解: $\because$ 直线 $x - y + 2b = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切,

$$\therefore \frac{|2b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ 解得 } b = 1,$$

$$\text{又} \because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

(2) 解: 由(1)可知, M 点的坐标为 $(0, 2)$,

①当直线 l 的斜率不存在时, 此时 P 为原点, 满足 $PQ \perp AB$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x = 0$;

②当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + 16kx + 12 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 64k^2 - 48 > 0, \text{ 可得 } k > \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 或 } k < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由根与系数的关系得}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{16k}{1 + 4k^2},$$

$$\text{设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = -\frac{8k}{1 + 4k^2}, y_0 = -\frac{8k^2}{1 + 4k^2} + 2 = \frac{2}{1 + 4k^2},$$

$$\text{由 } PQ \perp AB \text{ 可知 } \frac{y_0 - 0}{x_0 - (-\frac{9}{10})} \cdot k = -1,$$

$$\text{将 } P \text{ 点坐标代入整理得: } 12k^2 - 20k + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{2} \text{ 或 } k = \frac{1}{6} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\text{综上, 直线 } l \text{ 的方程为 } x = 0 \text{ 或 } y = \frac{3}{2}x + 2.$$

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

6. 圆 M 和圆 $P: x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 10 = 0$ 相内切, 且过定点 $Q(-\sqrt{2}, 0)$.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹方程;

(2) 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与动圆圆心 M 的轨迹交于 A , B 两点, 且线段 AB 的垂直平分线经过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) $y = \sqrt{3}x + \frac{5}{2}$.

【解析】 (1) 由已知 $|MP| = 2\sqrt{3} - |MQ|$, 即 $|MP| + |MQ| = 2\sqrt{3}$, 且 $2\sqrt{3}$ 大于 $|PQ|$, 所以 M 的轨迹是以 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ 为焦点, $2\sqrt{3}$ 为长轴长的椭圆, 即其方程为

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(2)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x + m$, 代入椭圆方程得 $10x^2 + 6\sqrt{3}mx + 3m^2 - 3 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{5}m$, 则 AB 的中点为 $(-\frac{3}{10}\sqrt{3}m, \frac{1}{10}m)$, AB 的垂直平分线方程为 $y - \frac{1}{10}m = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{3}{10}\sqrt{3}m)$, 将 $(0, -\frac{1}{2})$ 代入得 $m = \frac{5}{2}$, 所以直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x + \frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；弦长求解问题

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是坐标平面内一点, 且 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{3}{4}$, 其中 O 为坐标原点.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 过点 $S(0, -\frac{1}{3})$, 且斜率为 k 的动直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 求弦 AB 的垂直平分线在 x 轴上截距的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.
(2) $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

【解析】 (1) $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore a^2 = 2c^2$.
设 $P(m, n)$, 又 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,
 $\therefore |\overrightarrow{OP}|^2 = m^2 + n^2 = \frac{7}{4}$,
 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-c - m, -n) \cdot (c - m, -n) = m^2 - c^2 + n^2 = \frac{3}{4}$,
 $\therefore c^2 = 1$,
从而 $a^2 = 2$, $b^2 = 1$.
椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.
(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx - \frac{1}{3}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,
联立方程: $\begin{cases} y = kx - \frac{1}{3} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$,
消去 y 得: $(2k^2 + 1)x^2 - \frac{4}{3}kx - \frac{16}{9} = 0$,
显然 $\Delta > 0$,
 $x_1 + x_2 = \frac{4k}{3(2k^2 + 1)}$,

$$x_1 x_2 = -\frac{16}{9(2k^2 + 1)}.$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - \frac{2}{3} = \frac{4k^2}{3(2k^2 + 1)} - \frac{2}{3} = \frac{-2}{3(2k^2 + 1)}.$$

$$\text{则 } AB \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{2k}{3(2k^2 + 1)}, \frac{-1}{3(2k^2 + 1)} \right).$$

当 AB 的斜率 k 为零时, AB 的垂直平分线为 y 轴, 横截距为 0.

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时, } AB \text{ 垂直平分线的方程为: } y + \frac{1}{3(2k^2 + 1)} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{2k}{3(2k^2 + 1)} \right)$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{k}{3(2k^2 + 1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2k + \frac{1}{k}},$$

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时, } x = \frac{k}{3(2k^2 + 1)} < 0,$$

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时, } 2k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{2},$$

$$\text{那么 } x = \frac{1}{3} \frac{1}{2k + \frac{1}{k}} \leq \frac{\sqrt{2}}{12},$$

$$\text{当且仅当 } 2k = \frac{1}{k}, \text{ 即 } k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{所以, 当 } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 弦 } AB \text{ 的垂直平分线在 } x \text{ 轴上的截距的最大值为 } \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；中点弦问题；最值问题

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且以椭圆上顶点为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆恰好经过椭圆 C 的两焦点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过定点 $P(2, 0)$ 的直线交椭圆 C 于两点 A, B , 椭圆上的点 M 满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, 试求 $\triangle OAB$ 的面积.

【答案】 (1) 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

$$(2) S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【解析】 (1) 根据题意可知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $a = \sqrt{2}c$,

又因为以椭圆上顶点为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆恰好经过椭圆的两焦点,

所以有 $a = \sqrt{2}$, 故 $c = 1$,

由 $a^2 = b^2 + c^2$ 可得 $b^2 = 1$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设过定点 $P(2, 0)$ 的直线方程为 $x = ty + 2$,

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + 2 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得 } (2+t^2)y^2 + 4ty + 2 = 0,$$

$$\text{故 } \Delta = 16t^2 - 8(2+t^2) = 8t^2 - 16 > 0,$$

$$\text{解得 } t > \sqrt{2} \text{ 或 } t < -\sqrt{2},$$

$$\text{则有 } y_1 + y_2 = \frac{-4t}{2+t^2}, y_1 \cdot y_2 = \frac{2}{2+t^2},$$

$$\text{故 } x_1 + x_2 = ty_1 + ty_2 + 4 = \frac{8}{t^2+2},$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \left(\frac{8}{t^2+2}, \frac{-4t}{t^2+2} \right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{OM} = \left(\frac{8}{t^2+2}, \frac{-4t}{t^2+2} \right), \text{ 所以 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{8}{t^2+2}, \frac{-4t}{t^2+2} \right),$$

因为 M 在椭圆上,

$$\text{所以 } \frac{\left(\frac{8}{t^2+2} \right)^2}{2} + \left(\frac{-4t}{t^2+2} \right)^2 = 1,$$

$$\text{解得 } t^2 = 14,$$

$$\text{即 } t = \pm\sqrt{14},$$

$$\text{原点 } O \text{ 到 } x = ty + 2 \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{15}},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1+t^2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} \\ &= \sqrt{15} \times \frac{\sqrt{6}}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【标注】【知识点】面积问题；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

9. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左顶点为 A , 左焦点为 F , 下顶点为 B_1 , 上顶点为 B_2 , 若 $\overrightarrow{FB_1} \cdot \overrightarrow{FA} = -1$, $\overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FB_2} = 2\overrightarrow{AF}$.

(1) 求 a 和 b 的值.

(2) 纵截距为 2 的动直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 设 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 其中 O 为坐标原点, 是否存在直线 l 使得点 P 也在椭圆 C 上? 若存在, 试确定 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}.$

(2) 直线 l 存在, 且为 $y = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}x + 2$.

【解析】 (1) 易知: $A(-a, 0), F(-c, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$,

$$\therefore \overrightarrow{FB_1} \cdot \overrightarrow{FA} = -1,$$

$$\overrightarrow{FB_1} = (c, -b),$$

$$\overrightarrow{FA} = (c - a, 0),$$

$$\text{则 } c(c - a) = -1 \text{ ①},$$

$$\therefore \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FB_2} = 2\overrightarrow{AF},$$

$$\Rightarrow 2c = 2(a - c),$$

$$\Rightarrow a = 2c \text{ ②},$$

$$\text{由 ①② 有: } \begin{cases} a = 2c \\ c(c - a) = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases},$$

$$\text{进而: } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 设 } y = kx + 2, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = kx + 2 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases},$$

$$\text{得: } (4k^2 + 3)x^2 + 16kx + 4 = 0,$$

由韦达定理得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{16k}{4k^2 + 3} \\ \Delta > 0 \\ x_1x_2 = \frac{4}{4k^2 + 3} \end{cases},$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$= \left(-\frac{16k}{4k^2 + 3}, k(x_1 + x_2) + 4 \right),$$

$$= \left(-\frac{16k}{4k^2 + 3}, 4 - \frac{16k^2}{4k^2 + 3} \right),$$

$$= \left(-\frac{16k}{4k^2 + 3}, \frac{12}{4k^2 + 3} \right),$$

若点 P 在椭圆上,

则满足 C ,

$$3\left(-\frac{16k}{4k^2 + 3}\right)^2 + 4\left(\frac{12}{4k^2 + 3}\right)^2 - 12 = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{64k^2}{(4k^2 + 3)^2} + \frac{48}{(4k^2 + 3)^2} - 1 = 0,$$

$$\Rightarrow 16(4k^2 + 3) = (4k^2 + 3)^2,$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 3 = 16,$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{13}{14},$$

检验 $\Delta > 0$,

$$\Delta = \sqrt{256k^2 - 16(4k^2 + 3)},$$

$$= 4\sqrt{12k^2 - \frac{48}{16}},$$

$$= 4\sqrt{12k^2 - 3},$$

$$\text{则 } 12k^2 - 3 > 0,$$

$$k^2 > \frac{1}{4},$$

$$\text{故 } k^2 = \frac{13}{4} \text{ 符合,}$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\text{故直线 } l \text{ 存在, 且为 } y = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}x + 2.$$

【标注】【知识点】共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的顶点与轴

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的焦距为 2, A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, M, N 为椭圆 C 上的两点 (异于 A, B), 连接 AM, BN, MN , 且 BN 斜率是 AM 斜率的 3 倍.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 证明: 直线 MN 恒过定点.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 因为 $\begin{cases} 2c = 2 \\ a^2 = c^2 + 3 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases}$,
即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) 方法一: 连结 BM , 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$

$$\text{则 } k_{AM} \cdot k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 4},$$

因为 $M(x_1, y_1)$ 在椭圆上,

$$\text{所以 } k_{AM} \cdot k_{BM} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 4} = \frac{3 - \frac{3}{4}x_1^2}{x_1^2 - 4} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{因为 } k_{BM} = 3k_{AM}, \text{ 所以 } k_{BN} \cdot k_{BM} = -\frac{9}{4},$$

i) 当 MN 斜率不存在时, 设 $MN: x = m$, 不妨设 M 在 x 轴上方,

$$\text{所以 } M\left(m, \sqrt{\frac{12 - 3m^2}{4}}\right), N\left(m, -\sqrt{\frac{12 - 3m^2}{4}}\right),$$

$$\text{因为 } k_{BN} \cdot k_{BM} = -\frac{9}{4}, \text{ 所以 } m = 1,$$

ii) 当 MN 斜率存在时, 设 $MN: y = kx + t, \begin{cases} y = kx + t \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$,

$$\text{即 } (3 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8kt}{3 + 4k^2},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4t^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\text{因为 } k_{BN} \cdot k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{(kx_1 + t) \cdot (kx_2 + t)}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = -\frac{9}{4},$$

所以 $2k^2 + 3kt + t^2 = 0$, 即 $t = -k$ 或 $t = -2k$,

当 $t = -k$ 时, $y = kx - k$, 恒过定点 $(1, 0)$,

当斜率不存在亦符合: 当 $t = -2k$, $y = kx - 2k$,

过点 $(2, 0)$ 与点 B 重合, 舍. 所以直线恒过定点 $(1, 0)$.

方法二: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 $AM: y = k(x + 2)$,

$$\begin{cases} y = k(x + 2) \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } (3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, x_A \cdot x_1 = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$x_A + x_1 = \frac{-16k^2}{3 + 4k^2},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}, \text{ 易得点 } M\left(\frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}, \frac{12k}{3 + 4k^2}\right),$$

$$\text{设直线 } BN: y = 3k(x - 2), \begin{cases} y = 3k(x - 2) \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases},$$

$$\text{同理得点 } N\left(\frac{24k^2 - 2}{1 + 12k^2}, \frac{-12k}{1 + 12k^2}\right),$$

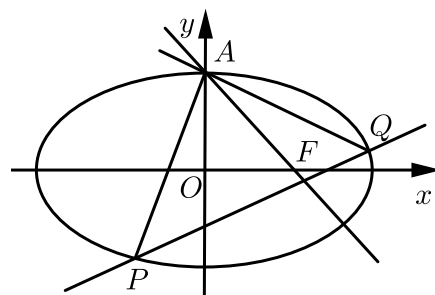
$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{\frac{3 + 4k^2}{6 - 8k^2} + \frac{1 + 12k^2}{24k^2 - 2}}{\frac{3 + 4k^2}{6 - 8k^2} - \frac{1 + 12k^2}{24k^2 - 2}} = \frac{4k}{1 - 4k^2},$$

$$\text{直线 } MN: y = \frac{4k}{1 - 4k^2}\left(x - \frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}\right) + \frac{12k}{3 + 4k^2} = \frac{4k}{1 - 4k^2}(x - 1).$$

所以直线恒过定点 $(1, 0)$.

【标注】【知识点】定点问题; 椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系

11. 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 不过点 $A(0, 1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$, 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析, 直线 l 过定点 $N\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

【解析】(1) 依题意有: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ①, $a^2 - c^2 = b^2 = 1$ ②,

联立①②解得 $a = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$,

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 由 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$, 得到 $AP \perp AQ$,

从而直线 AP 与坐标轴不垂直,

由 $A(0, 1)$ 可设直线 AP 的方程为 $y = kx + 1$,

得到直线 AQ 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 1 (k \neq 0)$,

将 $y = kx + 1$ 代入椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 并整理得: $(1 + 3k^2)x^2 + 6kx = 0$

解得: $x = 0$ 或 $x = -\frac{6k}{1 + 3k^2}$,

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(-\frac{6k}{1 + 3k^2}, -\frac{6k}{1 + 3k^2} + 1\right)$, 即 $\left(-\frac{6k}{1 + 3k^2}, \frac{1 - 3k^2}{1 + 3k^2}\right)$,

将上式中的 k 换成 $-\frac{1}{k}$, 同理可得 $Q\left(\frac{6k}{k^2 + 3}, \frac{k^2 - 3}{k^2 + 3}\right)$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \frac{\frac{k^2 - 3}{k^2 + 3} - \frac{1 - 3k^2}{1 + 3k^2}}{\frac{6k}{k^2 + 3} + \frac{6k}{1 + 3k^2}} \left(x - \frac{6k}{k^2 + 3}\right) + \frac{k^2 - 3}{k^2 + 3}$,

整理得: 直线 l 的方程为 $y = \frac{k^2 - 1}{4k}x - \frac{1}{2}$,

则直线 l 过定点 $N\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 定点问题

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的2倍, 左焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 设 C 的右顶点为 A , 不过 C 左、右顶点的直线 $l: y = kx + m$ 与 C 相交于 M, N 两点, 且

$AM \perp AN$. 请问: 直线 l 是否过定点? 如果过定点, 求出该定点的坐标; 如果不过定点, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 直线 l 过定点, 定点坐标为 $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$.

【解析】(1) 依题意：
$$\begin{cases} c = \sqrt{3} \\ a = 2b \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases},$$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

由
$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$\Delta = 64m^2k^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) > 0,$

化简得 $1 + 4k^2 > m^2$, ①,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-8mk}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2},$

又 $AM \perp AN, A(2, 0),$

$\therefore k_{AM}k_{AN} = -1,$

$\therefore \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = -1,$

$\therefore y_1y_2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0,$

$\therefore (kx_1 + m)(kx_2 + m) + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0,$

即 $(k^2 + 1)x_1x_2 + (km - 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0,$

$\therefore (k^2 + 1) \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2} + (km - 2) \frac{-8mk}{1 + 4k^2} + m^2 + 4 = 0,$

化简为 $5m^2 + 16km + 12k^2 = 0,$

解得 $m_1 = -\frac{6}{5}k, m_2 = -2k$ 且满足①,

当 $m = -2k$ 时, $l: y = kx - 2k = k(x - 2)$, 直线 l 过点 $A(2, 0)$, 舍去;

当 $m = -\frac{6}{5}k$ 时, $l: y = kx - \frac{6}{5}k = k\left(x - \frac{6}{5}\right)$, 直线 l 过点 $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$.

综上所述, 直线 l 过定点, 定点坐标为 $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 定点问题

13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右顶点为 A, B , 点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两点, 直线 AP 、 BP 、 BQ 的斜率分别记为 k_1 、 k_2 、 k_3 .

(1) 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值.

(2) 若 $k_3 = 2k_1$, 求证: $BP \perp BQ$, 并判断直线 PQ 是否过定点, 若是, 求出该定点; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $-\frac{1}{2}$.

(2) 证明见解析, 是, 直线 PQ 恒过定点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } k_1 &= \frac{y}{x+2}, k_2 = \frac{y}{x-2}, \\ \text{则 } k_1 \cdot k_2 &= \frac{y^2}{x^2-4} = \frac{-2\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}{x^2-4} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2}+2}{x^2-4} \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \text{即 } k_1 \cdot k_2 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) 设直线 $PQ: x = my + n$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立: } \begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 有:}$$

$$(m^2 + 2)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0,$$

由韦达定理有:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (my_1 + n) + (my_2 + n) = m(y_1 + y_2) + 2n = \frac{4n}{m^2 + 2} \\ x_1 x_2 = (my_1 + n)(my_2 + n) = m^2 y_1 y_2 + mn(y_1 + y_2) + n^2 = \frac{2n^2 - 4m^2}{m^2 + 2} \\ y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 2} \\ y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 2} \end{cases},$$

$$\Delta > 0,$$

$$\therefore k_3 = 2k_1,$$

$$\text{即: } \frac{y_2}{x_2 - 2} = 2 \cdot \frac{y_1}{x_1 + 2},$$

$$\text{由 (1) 有: } \frac{y_2}{x_2 - 2} = 2 \cdot -\frac{1}{2} \frac{x_1 - 2}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_2 y_1 = -(x_1 - 2)(x_2 - 2), \text{ ①}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - 4}{m^2 + 2} = \frac{8n}{m^2 + 2} - \frac{2n^2 - 4m^2}{m^2 + 2} - 4,$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 8n + 4 = 0,$$

$$\Rightarrow (3n - 2)(n - 2) = 0,$$

$$\Rightarrow n = \frac{2}{3} \text{ 或 } 2,$$

$$\text{又: } \Delta > 0, \text{ 有: } 2m^2 - n^2 + 4 > 0,$$

$$\text{① } m = 0 \text{ 时, } n = \frac{2}{3},$$

$$\text{此时: } |BP| = \frac{4\sqrt{2}}{3} = |BQ|,$$

$$|PQ| = \frac{8}{3},$$

$$|PQ| = \sqrt{2}|BP| = \sqrt{2}|BQ|,$$

即 $BP \perp BQ$ ，此时过定点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ；

$$\textcircled{2} m \neq 0 \text{ 时, } k_{BP} = \frac{y_1}{x_1 - 2}, k_{BQ} = \frac{y_2}{x_2 - 2},$$

$$\text{则 } k_{BP} \cdot k_{BQ} = \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)},$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 式有: } k_{BP} \cdot k_{BQ} = -1,$$

则 $BP \perp BQ$ ，

$$\text{此时 } n = 2 \text{ 或 } \frac{2}{3},$$

又 $\because P, Q$ 均不与 B 重合，

$$\text{则 } n \neq 2,$$

$$\text{即 } n = \frac{2}{3},$$

故直线恒过点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 。

综上所述，直线 PQ 恒过定点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 。

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定点问题；斜率计算

14. 已知定点 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，直线 AM 、 BM 相交于点 M ，且它们的斜率之积为 $-\frac{1}{9}$ ，记动点 M 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程。

(2) 过点 $T(1, 0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点，是否存在定点 $S(x_0, 0)$ ，使得直线 SP 与 SQ 斜率之积为定值，若存在，求出 S 坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 (x \neq \pm 3)$ 。

(2) 存在定点 $S(\pm 3, 0)$ ，使得直线 SP 与 SQ 斜率之积为定值。

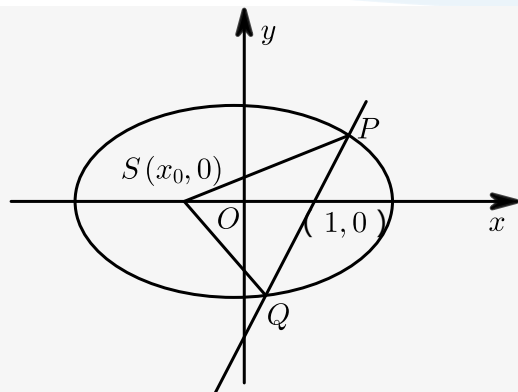
【解析】 (1) 设动点 $M(x, y)$ ，则 $k_{MA} = \frac{y}{3+x}$ ， $k_{MB} = \frac{y}{x-3} (x \neq \pm 3)$ ，

$$\text{因为 } k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y}{3+x} \cdot \frac{y}{x-3} = -\frac{1}{9},$$

$$\text{即化简为 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 (x \neq \pm 3),$$

$$\text{所以曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 (x \neq \pm 3)。$$

(2)



由已知得直线 l 过 $T(1, 0)$ ，设 l 方程为 $x = my + 1$ ，

$$\text{联立直线}l\text{与曲线}C\text{方程}\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases},$$

消去 x 整理得 $(m^2 + 9)y^2 + 2my - 8 = 0$ ，

$$\text{设}P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{则}y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 9}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-8}{m^2 + 9},$$

$$\text{直线}SP\text{与}SQ\text{斜率分别为}k_{SP} = \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{y_1}{my_1 + 1 - x_0},$$

$$k_{SQ} = \frac{y_2}{x_2 - x_0} = \frac{y_2}{my_2 + 1 - x_0},$$

$$\begin{aligned} \text{则}k_{SP}k_{SQ} &= \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 1 - x_0)(my_2 + 1 - x_0)} \\ &= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + m(1 - x_0)(y_1 + y_2) + (1 - x_0)^2} = \frac{-8}{(x_0^2 - 9)m^2 + 9(1 - x_0)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{当}x_0 = 3\text{时}, k_{SP} \cdot k_{SQ} = \frac{-8}{9(1 - x_0)^2} = -\frac{2}{9},$$

$$\text{当}x_0 = -3\text{时}, k_{SP} \cdot k_{SQ} = \frac{-8}{9(1 - x_0)^2} = -\frac{1}{18},$$

所以存在定点 $S(\pm 3, 0)$ ，使得直线 SP 与 SQ 斜率之积为定值。

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系；求曲线方程的问题

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 设 M 为椭圆 C 的右顶点，过点 $N(6, 0)$ 且斜率不为0的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点，记直线 PM, QM 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求证： $k_1 k_2$ 为定值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 由题意有
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = 4\sqrt{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{2} \\ c = \sqrt{2} \end{cases}$$

∴椭圆C的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由(1)可知M(2, 0), 依题意得直线l的斜率存在,

设其方程为 $y = k(x - 6) (k \neq 0)$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), (x_1, x_2 \neq 2)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x - 6) \end{cases} ,$$

消去y并整理可得 $(1 + 2k^2)x^2 - 24k^2x + 72k^2 - 4 = 0$,

$$x_1 + x_2 = \frac{24k^2}{1 + 2k^2} , x_1x_2 = \frac{72k^2 - 4}{1 + 2k^2} ,$$

$$\begin{aligned} k_1k_2 &= \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} , \\ &= \frac{k^2(x_1 - 6)(x_2 - 6)}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} , \\ &= \frac{k^2[x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 36]}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} , \\ &= \frac{k^2 \left[\frac{72k^2 - 4}{1 + 2k^2} - \frac{144k^2}{1 + 2k^2} + 36 \right]}{\frac{72k^2 - 4}{1 + 2k^2} - \frac{48k^2}{1 + 2k^2} + 4} , \\ &= \frac{k^2 [72k^2 - 4 - 144k^2 + 36(1 + 2k^2)]}{72k^2 - 4 - 48k^2 + 4(1 + 2k^2)} , \\ &= \frac{32k^2}{32k^2} , \\ &= 1 , \end{aligned}$$

故 k_1k_2 为定值 .

【标注】【知识点】定值问题(证明、探究); 直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程

16. 椭圆E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点A(0, -1), 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆E的方程 .

(2) 经过点(1, 1), 且斜率为k的直线l与椭圆E交于不同两点P, Q (均异于点A), 证明: 直线AP与AQ的斜率之和为定值 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 2 .

【解析】 (1) ∵椭圆E经过点A(0, -1), 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore b = 1 , \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore c = 1 , a = \sqrt{2} ,$$

∴椭圆 E 的方程为： $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 由题设知，直线 PQ 的方程为： $y = k(x - 1) + 1 (k \neq 2)$,

代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 得

$$(1 + 2k^2)x^2 - 4k(k - 1)x + 2k(k - 2) = 0 ,$$

由条件可知 $\Delta > 0$,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $x_1 x_2 \neq 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k(k - 1)}{1 + 2k^2} , \quad x_1 x_2 = \frac{2k(k - 2)}{1 + 2k^2} ,$$

从而直线 AP , AQ 的斜率之和为：

$$\begin{aligned} k_{AP} + k_{AQ} &= \frac{y_1 + 1}{x_1} + \frac{y_2 + 1}{x_2} \\ &= \frac{kx_1 - k + 2}{x_1} + \frac{kx_2 - k + 2}{x_2} \\ &= 2k + (2 - k) \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\ &= 2k + (2 - k) \frac{4k(k - 1)}{2k(k - 2)} \\ &= 2k - 2(k - 1) \\ &= 2 , \end{aligned}$$

∴直线 AP , AQ 斜率之和为定值2 .

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 右焦点到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为1 .

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 若 P 为椭圆上一点（点 P 不在 y 轴上）, 过坐标原点 O 作直线 OP 的垂线交直线 $y = \sqrt{2}$ 于点 Q , 求 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 的值 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 1 .

【解析】 (1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

右焦点到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为1 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a^2}{c} - c = 1 \end{cases} , \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2 ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = c = 1 \end{cases} ,$$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

因为点 P 不在 y 轴上, 则直线 OP 的斜率存在,

① 当直线 OP 的斜率为 0 时, $|OP| = \sqrt{2}$, $|OQ| = \sqrt{2}$,

所以 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = 1$;

② 当直线 OP 的斜率不为 0 时, 设直线 OP 的方程为 $y = kx$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases}$, 消去 y , 整理得 $(2k^2 + 1)x^2 = 2$,

解得 $x_1^2 = \frac{2}{2k^2 + 1}$, $y_1^2 = \frac{2k^2}{2k^2 + 1}$,

所以 $|OP|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{2k^2 + 2}{2k^2 + 1}$,

因为 $OP \perp OQ$, 所以直线 OQ 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$,

由 $\begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}$,

解得 $x_2 = -\sqrt{2}k$, $y_2 = \sqrt{2}$,

所以 $|OQ|^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2k^2 + 2$,

所以 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{2k^2 + 1}{2k^2 + 2} + \frac{1}{2k^2 + 2} = 1$,

综上所述, $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = 1$.

【标注】【知识点】弦长求解问题; 直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程

18. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $(0, \sqrt{3})$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程 .

(2) 设过椭圆右焦点的直线 l_1 交椭圆于 A 、 B 两点, 过原点的直线 l_2 交椭圆于 C 、 D 两点. 若 $l_1 \perp l_2$, 求证: $\frac{|CD|^2}{|AB|}$ 为定值 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 依题意, $b = \sqrt{3}$.

由 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}$, 得 $a^2 = \frac{4}{3}b^2 = 4$.

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 当直线 AB 的斜率不存在时, 易求 $|AB| = 3$, $|CD| = 2\sqrt{3}$,

$$\text{则} \frac{|CD|^2}{|AB|} = 4.$$

②当直线 AB 的斜率存在时，

设直线 AB 的斜率为 k ，依题意 $k \neq 0$ ，

则直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$ ，直线 CD 的方程为 $y = kx$ 。

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ， $D(x_4, y_4)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases} \text{得} (3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8k^2}{3 + 4k^2}\right)^2 - 4\left(\frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}\right)} \\ &= \frac{12(1 + k^2)}{3 + 4k^2}. \end{aligned}$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx \end{cases} \text{整理得} x^2 = \frac{12}{3 + 4k^2}, \text{则} |x_3 - x_4| = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4k^2}}.$$

$$|CD| = \sqrt{1 + k^2} |x_3 - x_4| = 4\sqrt{\frac{3(1 + k^2)}{3 + 4k^2}}.$$

$$\therefore \frac{|CD|^2}{|AB|} = \frac{48(1 + k^2)}{3 + 4k^2} \cdot \frac{3 + 4k^2}{12(1 + k^2)} = 4.$$

综合①②， $\frac{|CD|^2}{|AB|} = 4$ 为定值。

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；弦长求解问题

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ， $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ， $O(0, 0)$ ， $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 P 是椭圆 C 上的一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N 。求证：

$|AN| \cdot |BM|$ 为定值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}ab = \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}.$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 设点 P 为 (x_0, y_0) ,

则直线 PA 为: $y - 0 = \frac{y_0}{x_0 - 2} \cdot (x - 2)$,

$\therefore M$ 点为 $\left(0, \frac{-2y_0}{x_0 - 2}\right)$,

直线 PB 为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} - y_0}{-x_0} \cdot x$,

$\therefore N$ 点为 $\left(\frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0}, 0\right)$,

$$\begin{aligned} \therefore |AN| \cdot |BM| &= \left| 2 - \frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0} \right| \cdot \left| \sqrt{3} + \frac{2y_0}{x_0 - 2} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{3} - 2y_0 - \sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0} \cdot \frac{\sqrt{3}x_0 - 2\sqrt{3} + 2y_0}{x_0 - 2} \right| \\ &= \left| \frac{3x_0^2 + 4y_0^2 + 12 + 4\sqrt{3}x_0y_0 - 8\sqrt{3}y_0 - 4\sqrt{3}x_0}{x_0y_0 - \sqrt{3}x_0 - 2y_0 + 2\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| \frac{4\sqrt{3}x_0y_0 - 8\sqrt{3}y_0 - 4\sqrt{3}x_0 + 24}{x_0y_0 - \sqrt{3}x_0 - 2y_0 + 2\sqrt{3}} \right| \\ &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

② 当 $x_0 = 0, y_0 = -1$ 时,

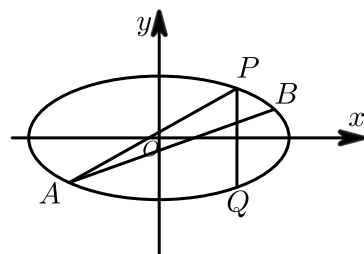
$|BM| = 2\sqrt{3}, |AN| = 2$,

$\therefore |BM| \cdot |AN| = 4\sqrt{3}$,

$\therefore |AN| \cdot |BM|$ 为定值.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；定值问题（证明、探究）

20. 已知椭圆 C 的对称中心为原点 O ，焦点在 x 轴上，焦距为 $2\sqrt{6}$ ，点 $(2, 1)$ 在该椭圆上.



(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 $x = 2$ 与椭圆交于 P, Q 两点, P 点位于第一象限, A, B 是椭圆上位于直线 $x = 2$ 两侧的动点. 当点 A, B 运动时, 满足 $\angle APQ = \angle BPQ$, 问直线 AB 的斜率是否为定值, 请说明理由.

【答案】 (1)

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 定值, $\frac{1}{2}$, 证明见解析.

【解析】(1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $C = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\therefore 2C = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore C = \sqrt{6},$$

$\therefore (2, 1)$ 在椭圆上,

$$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 6,$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{椭圆方程: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 把 $x = 2$ 代入椭圆方程可得: $\frac{4}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, 解得 $y = \pm 1$,

$$\therefore P(2, 1), Q(2, -1),$$

$\therefore$ 当点 A, B 运动时, 满足 $\angle APQ = \angle BPQ$,

$\therefore$ 直线 PA 与 PB 的斜率互为相反数, 不妨设 $k_{PA} = k > 0$,

则 $k_{PB} = -k$, ($k \neq 0$),

则直线 PA 的方程为: $y - 1 = k(x - 2)$, 直线 PB 的方程: $y - 1 = -k(x - 2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y - 1 = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } (1 + 4k^2)x^2 + (8k - 16k^2)x + 16k^2 - 16k - 4 = 0,$$

$$\therefore 2x_A = \frac{16k^2 - 16k - 4}{1 + 4k^2}$$

$$\therefore x_A = \frac{8k^2 - 8k - 2}{1 + 4k^2}, y_A = k(x_A - 2) + 1 = \frac{-8k^2 - 4k}{1 + 4k^2},$$

$$\text{同理可得: } x_B = \frac{8k^2 - 8k - 2}{1 + 4k^2}, y_B = \frac{-8k^2 + 4k}{1 + 4k^2},$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8k}{16k} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 直线 AB 的斜率是定值, 为 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 定值问题 (证明、探究)