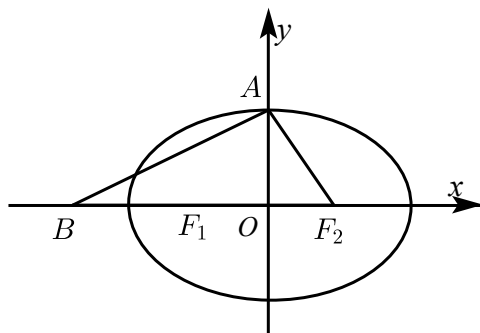


直线与椭圆位置关系（三）练习题

- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 $F(-1, 0)$ ，左顶点为 A ，上顶点为 B ， F 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{7}}{7}|OB|$ 。
 - 求椭圆 C 的方程。
 - 过点 $(1, \frac{1}{2})$ 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ，若 $|MP| = |PN|$ ，求直线 MN 的方程。
- 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上顶点为 A ，在 x 轴负半轴上有一点 B ，满足 $\overrightarrow{BF_1} = \overrightarrow{F_1F_2}$ ，且 $AB \perp AF_2$ 。



- 求椭圆 C 的离心率。
 - 在 (2) 的条件下，过右焦点 F_2 作斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点，线段 MN 的中垂线与 x 轴相交于点 $P(m, 0)$ ，求实数 m 的取值范围。
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴为 4，点 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上。
 - 求椭圆的方程。
 - 设斜率为 1 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点，线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交于点 P ，且点 P 的横坐标取值范围是 $(-\frac{3}{5}, 0)$ ，求 $|MN|$ 的取值范围。
- 已知椭圆 C 的中心在原点，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，右焦点到直线 $x + y + \sqrt{2} = 0$ 的距离为 2。
 - 求椭圆 C 的标准方程。
 - 椭圆 C 的下顶点为 A ，直线 $y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 C 相交于不同的两点 M, N ，当 $|AM| = |AN|$ 时，求 m 的取值范围。
- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，直线 $x - y + 2b = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切，且与 y 轴交于 M 点。
 - 求椭圆 C 的方程；
 -

若过点 M 的直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 点 P 是 AB 的中点, 且点 Q 坐标为 $\left(-\frac{9}{10}, 0\right)$, 当 $PQ \perp AB$ 时, 求直线 l 的方程.

6. 圆 M 和圆 $P: x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 10 = 0$ 相内切, 且过定点 $Q(-\sqrt{2}, 0)$.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹方程;

(2) 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与动圆圆心 M 的轨迹交于 A, B 两点, 且线段 AB 的垂直平分线经过点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 求直线 l 的方程.

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是坐标平面内一点, 且 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{3}{4}$, 其中 O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $S\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, 且斜率为 k 的动直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 求弦 AB 的垂直平分线在 x 轴上截距的最大值.

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且以椭圆上顶点为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆恰好经过椭圆 C 的两焦点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过定点 $P(2, 0)$ 的直线交椭圆 C 于两点 A, B , 椭圆上的点 M 满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, 试求 $\triangle OAB$ 的面积.

9. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 左焦点为 F , 下顶点为 B_1 , 上顶点为 B_2 , 若 $\overrightarrow{FB_1} \cdot \overrightarrow{FA} = -1$, $\overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FB_2} = 2\overrightarrow{AF}$.

(1) 求 a 和 b 的值.

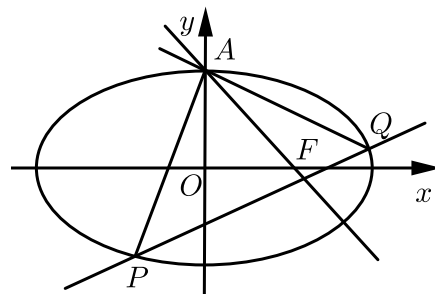
(2) 纵截距为2的动直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 设 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 其中 O 为坐标原点, 是否存在直线 l 使得点 P 也在椭圆 C 上? 若存在, 试确定 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的焦距为2, A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, M, N 为椭圆 C 上的两点(异于 A, B), 连接 AM, BN, MN , 且 BN 斜率是 AM 斜率的3倍.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 证明: 直线 MN 恒过定点.

11. 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的方程 .
- (2) 不过点 $A(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$, 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标 .
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的2倍, 左焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$.
- (1) 求 C 的方程 .
- (2) 设 C 的右顶点为 A , 不过 C 左、右顶点的直线 $l: y = kx + m$ 与 C 相交于 M, N 两点, 且 $AM \perp AN$. 请问: 直线 l 是否过定点? 如果过定点, 求出该定点的坐标; 如果不过定点, 请说明理由 .
13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右顶点为 A, B , 点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两点, 直线 AP, BP, BQ 的斜率分别记为 k_1, k_2, k_3 .
- (1) 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值 .
- (2) 若 $k_3 = 2k_1$, 求证: $BP \perp BQ$, 并判断直线 PQ 是否过定点, 若是, 求出该定点; 若不是, 请说明理由 .
14. 已知定点 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 $-\frac{1}{9}$, 记动点 M 的轨迹为曲线 C .
- (1) 求曲线 C 的方程 .
- (2) 过点 $T(1, 0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点, 是否存在定点 $S(x_0, 0)$, 使得直线 SP 与 SQ 斜率之积为定值, 若存在, 求出 S 坐标; 若不存在, 请说明理由 .
15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程 .
- (2) 设 M 为椭圆 C 的右顶点, 过点 $N(6, 0)$ 且斜率不为0的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 记直线 PM, QM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 k_2$ 为定值 .
16. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程 .

(2) 经过点 $(1, 1)$ ，且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 E 交于不同两点 P, Q (均异于点 A)，证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为定值。

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，右焦点到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为1。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若 P 为椭圆上一点 (点 P 不在 y 轴上)，过坐标原点 O 作直线 OP 的垂线交直线 $y = \sqrt{2}$ 于点 Q ，求 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 的值。

18. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $(0, \sqrt{3})$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

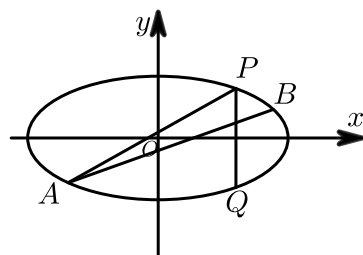
(2) 设过椭圆右焦点的直线 l_1 交椭圆于 A, B 两点，过原点的直线 l_2 交椭圆于 C, D 两点。若 $l_1 \perp l_2$ ，求证： $\frac{|CD|^2}{|AB|}$ 为定值。

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ， $A(a, 0), B(0, b), O(0, 0)$ ， $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 P 是椭圆 C 上的一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N 。求证： $|AN| \cdot |BM|$ 为定值。

20. 已知椭圆 C 的对称中心为原点 O ，焦点在 x 轴上，焦距为 $2\sqrt{6}$ ，点 $(2, 1)$ 在该椭圆上。



(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 直线 $x = 2$ 与椭圆交于 P, Q 两点， P 点位于第一象限， A, B 是椭圆上位于直线 $x = 2$ 两侧的动点。当点 A, B 运动时，满足 $\angle APQ = \angle BPQ$ ，问直线 AB 的斜率是否为定值，请说明理由。