

直线与圆锥曲线的位置关系练习题

1. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 及直线 $l: y = kx - 1$.
- (1) 若直线 l 与双曲线有两个不同的交点, 则 k 的范围为: _____.
- (2) 若直线 l 与双曲线有一个交点, 则 k 的范围为: _____.
- (3) 若直线 l 与双曲线没有交点, 则 k 的范围为: _____.

【答案】 (1) $(-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2})$

(2) $\{k | k = \pm 1, \pm \sqrt{2}\}$

(3) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

【标注】 【知识点】直线和双曲线的位置关系

【素养】数学运算

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 4, 且过点 $(-3, 2\sqrt{6})$.
- (1) 求双曲线的方程及其渐近线的方程.
- (2) 若直线 $l: y = kx + 2$ 与双曲线 C 有且只有一个公共点, 求实数 k 的值.

【答案】 (1) 双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

(2) $k = \pm\sqrt{7}$ 或 $k = \pm\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 由题意得 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ \frac{9}{a^2} - \frac{24}{b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

$\therefore$ 其渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

(2) 由 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(3 - k^2)x^2 - 4kx - 7 = 0$.

由题意得 $\begin{cases} 3 - k^2 \neq 0 \\ \Delta = 16k^2 + 28(3 - k^2) = 0 \end{cases}$

$\therefore k^2 = 7$.

$\therefore k = \pm\sqrt{7}$.

当 $3 - k^2 = 0$ 时, 直线 l 与双曲线 C 的渐近线 $y = \pm\sqrt{3}x$ 平行,

即 $k = \pm\sqrt{3}$ 时, 直线 l 与双曲线 C 只有一个公共点,

$$\therefore k = \pm\sqrt{7} \text{ 或 } k = \pm\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】双曲线的基本量求解；直线与圆锥曲线的位置关系判断

3. 直线 $y = x + 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A 、 B 两点，求线段 AB 的长。

【答案】 $4\sqrt{6}$ 。

【解析】 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，
得 $x^2 - 4x - 8 = 0$ ， x_1, x_2 为方程得两个解，
由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -8$ ，
 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$
 $= \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{16 + 32} = \sqrt{2} \sqrt{48} = 4\sqrt{6}$ ，
故 AB 的长为 $4\sqrt{6}$ 。

【标注】【知识点】弦长求解问题；直线和双曲线的位置关系

4. 已知焦点在坐标轴上的双曲线 E 过点 $P(-3\sqrt{2}, 4)$ ，它的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 。
(1) 求双曲线 E 的标准方程。
(2) 若直线 $y = x + 1$ 与 E 交于 A, B 两点，求 $|AB|$ 。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。
(2) $\frac{96}{7}$ 。

【解析】 (1) 由于渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ ，
则可设双曲线的方程为 $y^2 - \frac{16}{9}x^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$ ，
将点 $P(-3\sqrt{2}, 4)$ 代入得，
 $\lambda = 16 - \frac{16}{9} \times 18 = -16$ ，
则双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。
(2) 将直线 $y = x + 1$ 代入双曲线方程，可得
 $7x^2 - 18x - 153 = 0$ ，
显然判别式大于 0，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，
则 $x_1 + x_2 = \frac{18}{7}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{153}{7}$ ，

$$\begin{aligned} \text{则}|AB| &= \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2 + \frac{4 \times 153}{7}} = \frac{96}{7}. \end{aligned}$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】双曲线的标准方程；直线和双曲线的位置关系；弦长求解问题

5. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，斜率为1的直线与双曲线相交于 A, B 两点，弦长 $AB = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时.

(1) 求直线方程.

(2) O 为坐标原点，在 (1) 条件下求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】(1) $y = x + 2$ 或 $y = x - 2$.

(2) $\frac{4}{3}$.

【解析】(1) $\because$ 直线的斜率为1，

$\therefore$ 设直线方程为 $y = x + m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 联立得：

$$3x^2 + 8mx + 4m^2 + 4 = 0,$$

$\therefore$ 由韦达定理得：

$$x_1 + x_2 = -\frac{8m}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 + 4}{3},$$

$$\text{弦长 } AB = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2|,$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2},$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{64m^2}{9} - \frac{16m^2 + 16}{3}},$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 - 48}{9}},$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \text{得 } m^2 = 4,$$

$$\therefore m = \pm 2,$$

$\therefore$ 直线方程为 $y = x + 2$ 或 $y = x - 2$.

$$(2) \text{ 圆心 } O \text{ 到直线的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AB,$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$= \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】面积问题；弦长求解问题；直线和双曲线的位置关系

6. 已知倾斜角为 45° 的直线 l 过点 $A(1, -2)$ 和点 B , 点 B 在第一象限, $|AB| = 3\sqrt{2}$.

(1) 求点 B 的坐标.

(2) 若直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 相交于 E, F 两点, 且线段 EF 的中点坐标为 $(4, 1)$, 求 a 的值.

【答案】 (1) $B(4, 1)$.

(2) $a = 2$.

【解析】 (1) $\because$ 倾斜角为 45° 的直线过点 A, B ,

$$\therefore AB: y = x - 3,$$

$$\text{设 } B(x, y),$$

$$\therefore |AB| = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 18,$$

$$\text{又 } \because y = x - 3,$$

$$x > 0, y > 0,$$

$$\therefore x = 4, y = 1,$$

$$\therefore B(4, 1).$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = x - 3 \\ \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2 + 6x - 10 = 0,$$

$$\text{设 } E(x_1, y_1), F(x_2, y_2),$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{6}{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{6a^2}{a^2 - 1},$$

$$\text{又 } \because EF \text{ 中点坐标为 } (4, 1),$$

$$\therefore \frac{6a^2}{a^2 - 1} = 8,$$

$$\text{又 } \because a > 0,$$

$$\therefore a = 2.$$

【标注】【知识点】直线和双曲线的位置关系；中点弦问题

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $P(1, y_0) (y_0 > 0)$ 到其焦点的距离为5. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a} = 1$ 的左顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且双曲线的一条渐近线与直线 AP 垂直.

(1) 求抛物线的方程及双曲线的离心率.

(2) 设点 M 在双曲线上, 且 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$, 求 M 点到 x 轴的距离.

(3) 过 F_2 且斜率为1的直线与双曲线交于 D, E 两点, 求线段 DE 的长度.

【答案】(1) 抛物线方程为 $y^2 = 16x$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(3) $\frac{4}{3}$.

【解析】(1) 根据抛物线定义可知 ,

点 P 到焦点 $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ 的距离等于点 P 到准线 $x = -\frac{P}{2}$ 的距离 ,

$$\text{即 } 1 + \frac{P}{2} = 5 ,$$

$$\therefore P = 8 ,$$

则抛物线方程为 $y^2 = 16x$,

将 $P(1, y_0) (y_0 > 0)$ 代入 $y^2 = 16x$,

$$\therefore y_0 = 4 ,$$

即 $P(1, 4)$,

由双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a} = 1$ 的方程可知 $A(-1, 0)$,

渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{a}x$, $k_{AP} = \frac{4}{2} = 2$,

$\therefore$ 一条渐近线方程与直线 AP 垂直 ,

$$\therefore -\sqrt{a} \cdot 2 = -1 ,$$

$$\therefore a = \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore c^2 = 1 + a = \frac{5}{4} ,$$

$$\therefore \text{离心率 } e = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

(2) 由 (1) 可知双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$,

不妨设点 M 在第一象限 ,

设 $|\overrightarrow{MF_1}| = m$, $|\overrightarrow{MF_2}| = n (m > n)$,

$$\therefore \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 ,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = (2c)^2 , \text{ 即 } m^2 + n^2 = 5 , \text{ ①}$$

由双曲线定义可知 , $m - n = 2$ ② ,

$$\text{由 ①② 可得 } mn = \frac{1}{2} , |F_1F_2| = 2c = \sqrt{5} ,$$

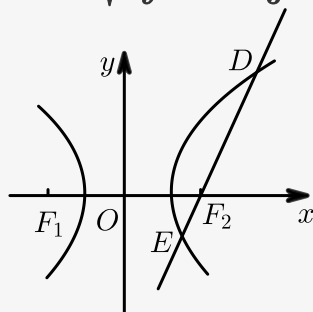
$$S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_M| = \frac{1}{2} \cdot mn ,$$

$$\therefore |y_M| = \frac{\sqrt{5}}{10} ,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } \frac{\sqrt{5}}{10} .$$

(3) 由 (1) 可知 $F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$,

$$\begin{aligned}
 &\therefore l_{DE}: y = x - \frac{\sqrt{5}}{2}, \\
 &\text{联立, } \begin{cases} y = x - \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\therefore -3x^2 + 4\sqrt{5}x - 6 = 0, \\
 &\therefore x_D + x_E = \frac{4\sqrt{5}}{3}, x_D \cdot x_E = 2, \\
 &\therefore |DE| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{(x_D + x_E)^2 - 4x_D x_E} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{80}{9} - 8} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$



【标注】【知识点】直线和双曲线的位置关系；求双曲线的离心率；弦长求解问题；面积问题

8. 已知焦点在 x 轴上的抛物线经过点 $P(2, -2\sqrt{2})$.

(1) 求抛物线的标准方程.

(2) 若直线 $y = x + m$ 与抛物线有两个公共点, 求 m 的取值范围.

【答案】(1) $y^2 = 4x$.

(2) $m < 1$.

【解析】(1) 设抛物线方程 $y^2 = 2px$,

把 $P(2, -2\sqrt{2})$ 代入, 得 $p = 2$,

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 联立直线和抛物线方程, 得:

$$x^2 + (2m - 4)x + m^2 = 0,$$

$\therefore$ 直线与抛物线有两个公共点,

$$\therefore \Delta = (2m - 4)^2 - 4m^2 > 0$$

得 $m < 1$.

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系判断

9. 已知抛物线的顶点在坐标原点, 对称轴为 x 轴, 且抛物线过点 $M(2, 4)$.

(1) 求抛物线的标准方程.

(2) 过抛物线焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点, 且 $|AB| = 10$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $y^2 = 8x$.

(2) $y = 2x - 4$ 或 $y = -2x + 4$.

【解析】 (1) $\because$ 对称轴为 x 轴, 则设 $y^2 = 2px$,

又 $\because M(2, 4)$ 在曲线上,

$$\therefore 4^2 = 2p \times 2, p = 4,$$

则 $y^2 = 8x$.

(2) $\frac{p}{2} = 2, F(2, 0)$,

①斜率不存在时, $l: x = 2$,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{ 则 } A(2, 4), B(2, -4),$$

$$|AB| = 8 \neq 10 \text{ (舍)};$$

②斜率存在时, 设斜率为 k , $l: y = k(x - 2)$,

$$\begin{cases} y = k(x - 2) \\ y^2 = 8x \end{cases},$$

$$k^2 x^2 + (-4k^2 - 8)x + 4k^2 = 0,$$

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{(-4k^2 - 8)^2 - 4 \times k^2 \times 4k^2}}{k^2},$$

$$10 = \frac{8(k^2 + 1)}{k^2},$$

解得 $k = \pm 2$,

则直线 l 的方程为 $y = 2x - 4$ 或 $y = -2x + 4$.

【标注】【知识点】弦长求解问题; 直线和抛物线的位置关系

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到其准线的距离为1, 过焦点且斜率为 $-2\sqrt{2}$ 的直线与该抛物线交于 A, B 两点.

(1) 求抛物线的方程、焦点坐标及准线方程.

(2) 求线段 AB 的长.

【答案】 (1) 抛物线的方程为: $y^2 = 2x$,

焦点坐标为: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{9}{4}$.

【解析】 (1) 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到其准线的距离为 1, 可得 $p = 1$,

$\therefore$ 抛物线的方程为: $y^2 = 2x$,

焦点坐标为: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$.

(2) 直线 AB 的方程为: $y = -2\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$,

与抛物线方程 $y^2 = 2x$ 联立, 消去 y 得 $4x^2 - 5x + 1 = 0$,

解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{4}$. 当 $x = 1$ 时, $y = -\sqrt{2}$, 得点 A (或 B) 的坐标为 $(1, -\sqrt{2})$

,

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得点 B (或 A) 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\therefore |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9}{4}$.

【标注】【知识点】弦长求解问题; 直线和抛物线的位置关系; 抛物线的定义; 抛物线的标准方程

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (P > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(2, y_0)$ 在抛物线 C 上, 且 $|DF| = 3$, 直线 $y = x - 1$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(1) 求抛物线 C 的标准方程.

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】 (1) $y^2 = 4x$.

(2) $S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 由抛物线定义得: $2 + \frac{P}{2} = 3$,

$\therefore P = 2$,

故抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 由方程组 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 y 得: $x^2 - 6x + 1 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = 6$,

$\therefore$ 直线 $y = x - 1$ 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F ,

$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + P = 6 + 2 = 8$,

$\therefore O$ 到直线 $y = x - 1$ 距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB|d = 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】面积问题; 直线和抛物线的位置关系

12. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，定点 $P(3, 1)$ 。

过点 P 作一条斜率等于2的直线交抛物线于 A 、 B 两点，求 $\triangle AOB$ 的面积。

【答案】 (1) $\frac{5\sqrt{11}}{2}$ 。

【解析】 (1) 由题意得直线 AB 的方程为 $y - 1 = 2(x - 3)$ ，即 $y = 2x - 5$ ，

代入 $y^2 = 4x$ ，可得 $4x^2 - 24x + 25 = 0$ ，

设交点为 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

所以 $x_1 + x_2 = 6$ ， $x_1x_2 = \frac{25}{4}$ ，

可得 $|AB| = \sqrt{1 + 2^2}|x_1 - x_2|$

$= \sqrt{1 + 2^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{55}$ ，

又因为点 O 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$ ，

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{55} \times \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{11}}{2}$ 。

故 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{11}}{2}$ 。

【标注】【知识点】抛物线的定义；直线和抛物线的位置关系；面积问题；弦长求解问题