

直线与圆锥曲线的位置关系

一、直线与双曲线的位置关系

1. 位置关系判断

直线与双曲线的位置关系可分为：相交、相切、相离；

对于双曲线来说，平行于渐近线的直线与双曲线只有一个交点，但并不相切；

直线与双曲线位置关系的判定条件可归纳为：

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，双曲线 $C: f(x, y) = 0$ ，由
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 y （或消去 x ）得： $ax^2 + bx + c = 0$ 。

若 $a \neq 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交，直线与双曲线有两个交点；

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离，直线与双曲线无交点；

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切，直线与双曲线有一个交点。

若 $a = 0$ ，得到一个一次方程，与双曲线相交，有一个交点， l 与双曲线的渐近线平行。

2. 典型例题

1. 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，右焦点坐标为 $(2, 0)$ ， O 为坐标原点。

(1) 求双曲线 C 的标准方程。

(2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B ，且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ ，试求实数 k 的取值范围。

2. 已知点 $D(1, \sqrt{2})$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上，且双曲线的一条渐近线的方程是 $\sqrt{3}x + y = 0$ 。

(1) 求双曲线 C 的方程。

(2) 若过点 $(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与双曲线 C 有两个不同的交点，求实数 k 的取值范围。

(3) 设(2)中直线 l 与双曲线 C 交于 A 、 B 两个不同点，若以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点，求实数 k 的值。

3. 典型例题

3. 直线 $y = kx + 2$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 6$ 的右支交于不同两点，那么 k 的取值范围是()。

- A. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$
 B. $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$
 C. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right)$
 D. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1\right)$

4. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $A(0, 2)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2) 已知双曲线 C 的离心率是椭圆 E 的离心率的倒数，其顶点为椭圆的焦点，求双曲线 C 的方程。

(3) 设直线 $l: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 与双曲线交于 M, N 两点，过 $P(5, \sqrt{3})$ 的直线 l 与线段 MN 有公共点，求直线 l 的倾斜角的取值范围。

二、直线与抛物线的位置关系

1. 位置关系判断

直线与抛物线的位置关系可分为：相交、相切、相离。

对于抛物线来说，平行于对称轴的直线与抛物线相交于一点，但并不是相切；

直线与抛物线位置关系的判定条件可归纳为：

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，抛物线 $C: f(x, y) = 0$ ，由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$

消去 y (或消去 x) 得： $ax^2 + bx + c = 0$ 。

若 $a \neq 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交；

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离；

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切。

若 $a = 0$ ，得到一个一次方程，与抛物线相交，有一个交点， l 与抛物线的对称轴平行。

2. 典型例题

5. 已知曲线 E 上任意一点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $l: x = -2$ 的距离相等，若过 F 的两条直线 l_1, l_2 的斜率之积为 1，且 l_1, l_2 分别交曲线 E 于 A, B 两点和 C, D 两点。

(1) 求曲线 E 的方程。

(2) 求 $|AB| + |CD|$ 的最小值。

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$, A, B 是抛物线 C 上异于点 O 的不同的两点, 其中 O 为原点.
- (1) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程.
- (2) 若 $OA \perp OB$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.
7. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 过点 $M(1, -2)$, 且焦点为 F , 直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点.
- (1) 求抛物线 C 的方程, 并求其准线方程.
- (2) 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4$, 证明直线 l 必过一定点, 并求出该定点.

3. 巩固练习

8. 已知 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F 且垂直于 x 轴的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$.
- (1) 求该椭圆方程.
- (2) 设直线 l 同时与椭圆和抛物线 $y^2 = 4x$ 各恰有一个公共交点, 求直线 l 的方程.
9. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 $M(x_0, 4)$ 到焦点 F 的距离为 $|MF| = \frac{5}{4}x_0$.
- (1) 求抛物线 E 的方程.
- (2) 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 与抛物线 E 交于两个不同的点 A, B , 求 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的值.