

05直线与圆常见复杂问题练习题

1. 圆的方程

1. 若圆 $x^2 + y^2 - ax - 2y + 1 = 0$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 对称的圆的方程是 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 则 a 的值等于().

A. 0 B. 2 C. 1 D. ± 2

【答案】 B

【解析】 分析题意可得,

两圆圆心关于 $x - y - 1 = 0$ 对称, 半径相等,

则 $O_1: x^2 + y^2 - ax - 2y + 1 = 0$,

圆心 $\left(\frac{a}{2}, 1\right)$, 半径 $r_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4}}$,

$O_2: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$,

圆心 $(2, 0)$, 半径 $r_2 = 1$,

即 $r_1 = r_2$, 解得 $a = \pm 2$,

① $a = 2$ 时, $O_1(1, 1)$,

O_1 与 O_2 中点为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 在直线上,

$k_{O_1O_2} = -1$, $\therefore l_{O_1O_2}$ 与直线垂直, 成立;

② $a = -2$ 时, $O_1(-1, 1)$,

O_1 与 O_2 中点为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 不在直线上, 舍,

综上: $a = 2$.

故选B.

【标注】【知识点】点或直线的对称问题

2. 直线与圆的位置关系

2. 若圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: x - y + c = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则 c 的取值范围是().

A. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ B. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
C. $[-2, 2]$ D. $(-2, 2)$

【答案】 C

【解析】将圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 整理为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 18$,

$\therefore$ 圆心坐标为 $(2, 2)$, 半径为 $3\sqrt{2}$, 要求圆上至少有三个不同的点到直线 $l: x - y + c = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,

则圆心到直线的距离 $d \leq \sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{|c|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2},$$

解得 $-2 \leq c \leq 2$.

故选C.

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系

3. 已知方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0$.

(1) 若此方程表示圆, 求 m 的取值范围.

(2) 若(1)中的圆与直线 $x + 2y - 4 = 0$ 相交于 M 、 N 两点, 且 $OM \perp ON$ (O 为坐标原点), 求 m 的值.

(3) 在(2)的条件下, 求以 MN 为直径的圆的方程.

【答案】(1) $(-\infty, 5)$.

(2) $m = \frac{8}{5}$.

(3) $x^2 + y^2 - \frac{8}{5}x - \frac{16}{5}y = 0$.

【解析】(1) 原方程可化为: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - m$, 当方程表示圆时, $5 - m > 0$, 即 $m < 5$,

故 m 的取值范围为 $(-\infty, 5)$.

(2) 方法一: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 = 4 - 2y_1$, $x_2 = 4 - 2y_2$, 得

$$x_1 x_2 = 16 - 8(y_1 + y_2) + 4y_1 y_2,$$

$$\because OM \perp ON, \therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \therefore 16 - 8(y_1 + y_2) + 5y_1 y_2 = 0 \text{ ①},$$

$$\text{联立} \begin{cases} x = 4 - 2y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0 \end{cases}, \text{得} 5y^2 - 16y + m + 8 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{16}{5}, y_1 y_2 = \frac{8+m}{5},$$

$$\text{代入①得} m = \frac{8}{5}.$$

方法二: 由 $OM \perp ON$ 知 O 在以 MN 为直径的圆上,

而由题意可设过 M , N 两点的圆的方程为

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + m + \lambda(x + 2y - 4) = 0,$$

$$\text{整理得} x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (2\lambda - 4)y + m - 4\lambda = 0,$$

由题意知, 圆心 $\left(-\frac{\lambda-2}{2}, -\lambda+2\right)$ 在直线 $x + 2y - 4 = 0$ 上,

$$\text{代入得} -\frac{\lambda-2}{2} + 2(-\lambda+2) - 4 = 0, \text{解得} \lambda = \frac{2}{5},$$

再将 $\lambda = \frac{2}{5}$ 及 $O(0,0)$ 代入方程 $x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (2\lambda - 4)y + m - 4\lambda = 0$,
得 $m = \frac{8}{5}$.

(3) 以 MN 为直径的圆的方程为 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$,

即 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0$,

$\therefore$ 以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 - \frac{8}{5}x - \frac{16}{5}y = 0$.

【标注】【知识点】圆的一般方程问题；圆的方程的判定；直线与圆的位置关系；向量问题

4. 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点坐标分别为 $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C(1,2)$.

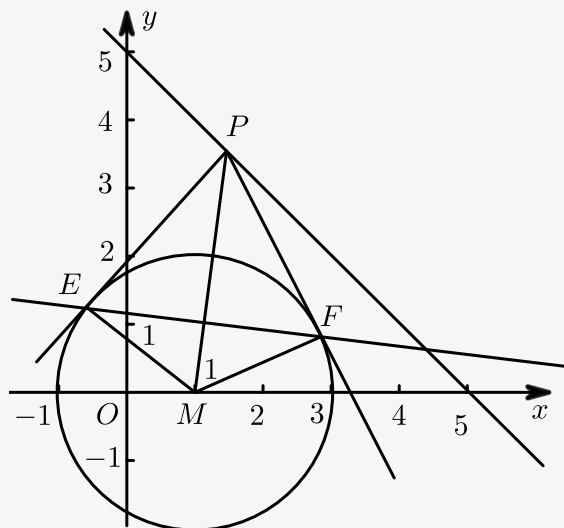
(1) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 M 的方程 .

(2) 已知动点 P 在直线 $x + y - 5 = 0$ 上 , 过点 P 作圆 M 的两条切线 PE 、 PF , 切点分别为 E 、 F , 记四边形 $PEMF$ 的面积为 S , 求 S 的最小值 .

【答案】 (1) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

(2) 4 .

【解析】 (1)



设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 M 的标准方程为： $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$,

$$\text{根据题意有} \begin{cases} (-1 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \\ (3 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$

故所求的圆 M 的方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

(2) 圆 M 的圆心 $M(1,0)$, 半径为2 ,

$$S = 2S_{\text{Rt}\triangle PEM} = |PE||EM| = 2\sqrt{|PM|^2 - 4} ,$$

故当 $|PM|$ 最小时 , S 最小 ,

$|PM|$ 的最小值即为点 $M(1,0)$ 到直线 ,

$$x + y - 5 = 0 \text{ 的距离 } h = \frac{|1 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} ,$$

$$\text{故 } S_{\min} = 2\sqrt{h^2 - 4} = 4 .$$

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；点到直线的距离公式

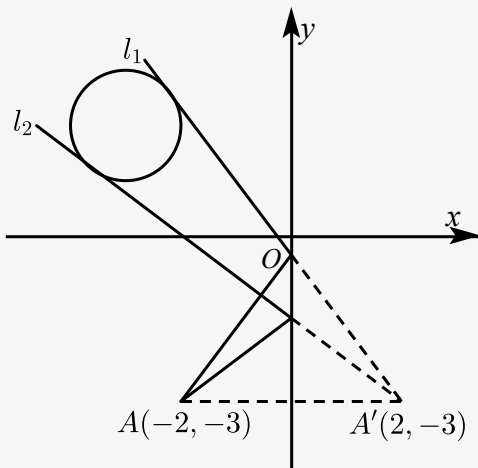
5. 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出，经过 y 轴反射与圆 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 相切，则反射光线所在的直线的斜率为（ ）.

A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$
C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$

B. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$
D. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】



设 $(-2, -3)$ 为点 A ,

A 关于 y 轴的对称点 $A'(2, -3)$,

设直线斜率为 k ,

$$y - (-3) = k(x - 2)$$

$$kx - y - 2k - 3 = 0,$$

$$\because \text{圆的方程为 } (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1,$$

$$\therefore \text{圆心为 } (-3, 2) \text{ 半径为 } 1,$$

$$\frac{|-3k - 2 - 2k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1,$$

$$\therefore 25k^2 + 25 + 50k = k^2 + 1,$$

$$\therefore 24k^2 + 50k + 24 = 0,$$

$$\therefore 12k^2 + 25k + 12 = 0,$$

$$\therefore (3k+4)(4k+3) = 0,$$

$$\therefore k = -\frac{4}{3} \text{ 或 } k = -\frac{3}{4}.$$

故选D.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；点到直线的距离公式

6. 由直线 $y = x + 1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 引切线，则切线长的最小值为（ ）.

A. $\sqrt{7}$

B. 3

C. $2\sqrt{2}$

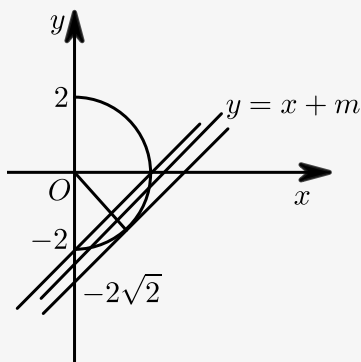
D. 1

【答案】 A**【解析】** 圆心到直线的距离 $d = \frac{(3+1-0)}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$, $\therefore$ 此时切线长最小, 最小值为 $l = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$.

故选A.

【标注】【素养】数学运算**【知识点】**圆的切线的相关问题**半圆问题**7. 已知直线 $l: y = x + m$ 与曲线 $x = \sqrt{4-y^2}$ 有两个公共点, 则实数 m 的取值范围是 ().A. $[-2, 2\sqrt{2})$ B. $(-2\sqrt{2}, -2]$ C. $[2, 2\sqrt{2})$ D. $(-2\sqrt{2}, 2]$ **【答案】** B**【解析】** 由 $x = \sqrt{4-y^2}$, 得 $x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0)$,

如图,

当直线 $l: y = x + m$ 与 $x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0)$ 相切时, 原点到直线的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2$, $\therefore m = -2\sqrt{2}$;当直线过半圆的右顶点 $(2, 0)$ 时, $2 + m = 0$, $\therefore m = -2$; $\therefore$ 若直线 $l: y = x + m$ 与曲线 $x = \sqrt{4-y^2}$ 有两个公共点, 则实数 m 的取值范围是 $(-2\sqrt{2}, -2]$,

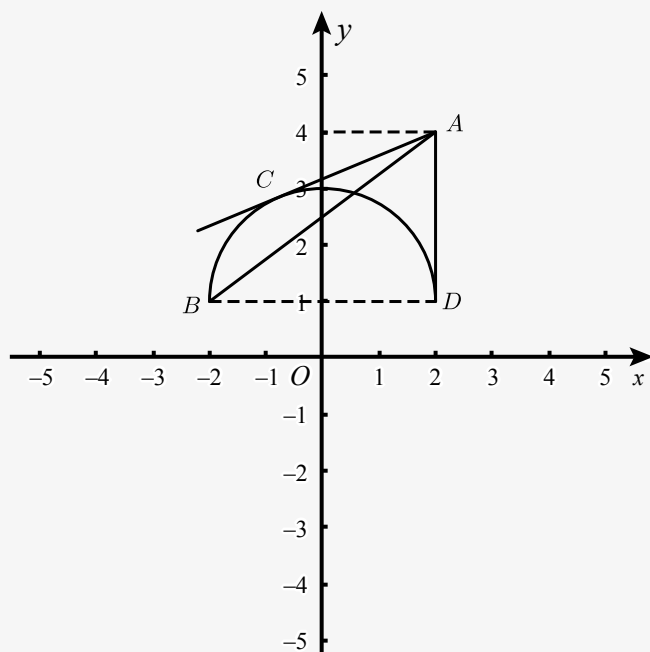
故选: B.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

8. 直线 $y = k(x - 2) + 4$ 与曲线 $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ 仅有一个公共点，则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{5}{12}\right\}$

【解析】 如图，



由题知曲线 $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ 即 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ ，表示以 $(0, 1)$ 为圆心，2为半径的半圆，该半圆位于直线 $y = 1$ 上方，

直线 $y = k(x - 2) + 4$ 恒过点 $(2, 4)$ ，

因为直线与曲线只有一个交点，

由圆心到直线的距离等于半径得 $\frac{|2k - 3|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$ ，解得 $k = \frac{5}{12}$ ，

由图，当直线经过点 $(-2, 1)$ 时，直线的斜率为 $\frac{4 - 1}{2 - (-2)} = \frac{3}{4}$ ，

当直线经过点 $(2, 1)$ 时，直线的斜率不存在，

综上，实数 k 的取值范围是 $k = \frac{5}{12}$ 或 $k > \frac{3}{4}$ ，

故答案为： $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{5}{12}\right\}$ 。

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求参数