

05直线与圆常见复杂问题

1. 求解圆的方程

1. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 -2 ，且垂直于直线 $x - 2y - 1 = 0$ 。

(1) 求直线 l 的方程。

(2) 设直线 l 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点， $\triangle OAB$ 内接于圆 C ，求圆 C 的一般方程。

【答案】 (1) $y = -2x - 2$ 。

(2) $x^2 + y^2 + x + 2y = 0$ 。

【解析】 (1) 设直线 l 的方程为 $y = kx - 2$ ，

直线 $x - 2y - 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，

所以 $k = -2$ 。

直线 l 的方程为 $y = -2x - 2$ 。

(2) 设圆 C 的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，

由于 $\triangle OAB$ 是直角三角形，

所以圆 C 的圆心 C 是线段 AB 的中点，半径为 $\frac{1}{2}|AB|$ ；

由 $A(-1, 0)$ ， $B(0, -2)$ 得 $C\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ ， $|AB| = \sqrt{5}$ ；

$$\text{故} \begin{cases} -\frac{D}{2} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{E}{2} = -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{cases},$$

解得 $D = 1$ ， $E = 2$ ， $F = 0$ 。

圆 C 的一般方程为： $x^2 + y^2 + x + 2y = 0$ 。

【标注】【知识点】直线的点斜式方程；圆的一般方程问题

2. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x + my - 4 = 0$ 上两点 M ， N 关于直线 $2x + y = 0$ 对称，则圆的半径为()。

A. 9

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because M, N$ 关于直线 $2x + y = 0$ 对称，

$\therefore$ 直线经过圆的圆心，代入圆心坐标，

$$\therefore 2 \times 1 - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 4,$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4 \times 4} = 3.$$

【标注】【知识点】直线与圆的对称问题

2. 直线与圆的位置关系

相交弦

3. 已知圆 C 的方程为 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ，直线 $l: kx - y + 2 - 2k = 0$ 与圆 C 交于 A, B 两点，则当 $\triangle ABC$ 面积最大时，直线 l 的斜率 k 为_____.

【答案】1或7

【解析】圆 C 可化标准方程： $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ，

直线 l 可变形为 $y = k(x-2) + 2$ ，

即圆心为 $C(1, 0)$ ，半径 $r = 1$ ，直径 l 过定点 $(2, 2)$ ，

由面积公式

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{1}{2} (\angle ACB = \theta),$$

所以当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，即圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$\triangle ABC \text{的面积取得最大值} d = \frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得： $k = 1$ 或 7 。

【标注】【知识点】点到直线的距离公式；三角形面积公式

4. 直线 $l: y = kx + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点，则“ $k = 1$ ”是“ $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ ”的()。
- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】方法一：当 $k = 1$ 时，直线 $y = x + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 $A(-1, 0), B(0, 1)$ 两点，则有 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，反过来，当 $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 时，不一定有 $k = 1$ ，实际上当 $k = -1$ 时，直线 $y = -x + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 $A(1, 0), B(0, 1)$ 两点，同样有 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，故“ $k = 1$ ”是“ $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件，选A。

方法二：由直线 l 与圆 O 相交，得圆心 O 到直线 l 的距离

$$d = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} < 1, \text{解得} k = 0. \text{当} k = 1 \text{时}, d = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{2}, \text{ 则 } \triangle OAB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

当 $k = -1$ 时,

同理可得 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 则 “ $k = 1$ ” 是 “ $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ ” 的充分而不必要条件.

故选 A.

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系

【知识点】充要条件与解析几何结合

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

5. 已知圆 C 与 x 轴切于点 $(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于点 A, B , 且 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 设点 P 是圆 C 上与点 A, B 不重合的点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ().

A. $[-1, 3]$

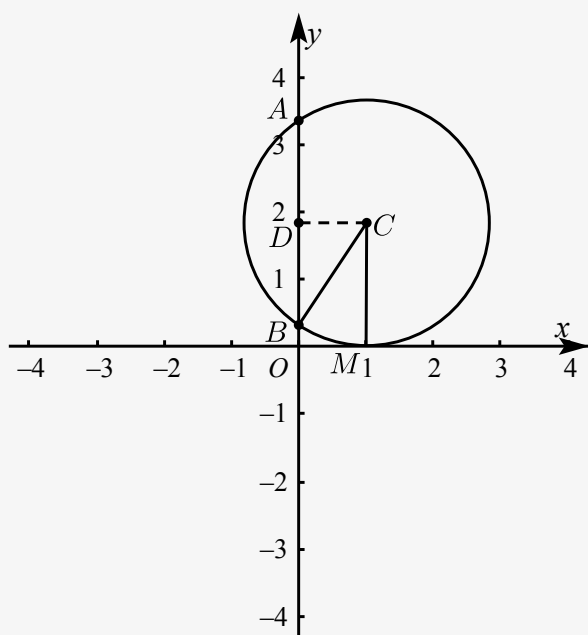
B. $[2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}]$

C. $[-3 - 2\sqrt{5}, -3 + 2\sqrt{5}]$

D. $[-2, 6]$

【答案】 D

【解析】 如图所示,



$$|CD| = 1, |DB| = \frac{|AB|}{2} = \sqrt{3}, |CB| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

所以 $|CM| = |CB| = 2$, 所以 $C(1, 2)$,

圆 C 的标准方程为 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$,

当 $x = 0$ 时, $y_1 = 2 + \sqrt{3}$, $y_2 = 2 - \sqrt{3}$,

$\therefore A(0, 2 + \sqrt{3}), B(0, 2 - \sqrt{3})$,

设 $P(x_0, y_0)$, 所以 $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 4$,

$$\overrightarrow{PA} = (-x_0, 2 + \sqrt{3} - y_0),$$

$$\overrightarrow{PB} = (-x_0, 2 - \sqrt{3} - y_0),$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x_0^2 + (2 - y_0)^2 - 3 = x_0^2 + 4 - (x_0 - 1)^2 = 2x_0,$$

由图可知 $-1 \leq x_0 \leq 3$, 所以 $-2 \leq 2x_0 \leq 6$,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2, 6]$.

故选D.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题；数量积的最值问题

点到直线距离为定值

6. 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ().

- A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$
- B. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$
- C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
- D. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 整理为 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2$,

$\therefore$ 圆心坐标为 $(2, 2)$, 半径为 $3\sqrt{2}$,

要求圆上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,

则圆心到直线的距离应小于等于 $\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{|2a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2},$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \leq 0,$$

$$\therefore -2 - \sqrt{3} \leq \frac{a}{b} \leq -2 + \sqrt{3}, \text{ 又直线 } l \text{ 的斜率为 } k = -\frac{a}{b},$$

$$\therefore 2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的倾斜角的取值范围是 } \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right],$$

故选B.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

【素养】 数学运算

7. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上到直线 $l: x + y = a$ 的距离等于1的点至少有2个, 则 a 的取值范围为 ().

- A. $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

- B. $(-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty)$
 C. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
 D. $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

【答案】 A

【解析】 由圆的方程可知圆心为 $(0, 0)$ ，半径为2. 因为圆上的点到直线 l 的距离等于1的点至少有2个，

所以圆心到直线 l 的距离 $d < r + 1 = 2 + 1$ ，即 $\frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}} < 3$ ，

解得 $a \in (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. 故选A.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 直线与圆的相离问题

🔍 探究直线位置

8. 已知圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点，则该直径所在直线的方程为（ ）.
- A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $x - 2y - 5 = 0$ C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$

【答案】 B

【解析】 由题得圆的圆心坐标为 $(1, -2)$ ，

所求的直线的斜率为 $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ ，

所以所求直线的方程为 $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ ，

即 $x - 2y - 5 = 0$.

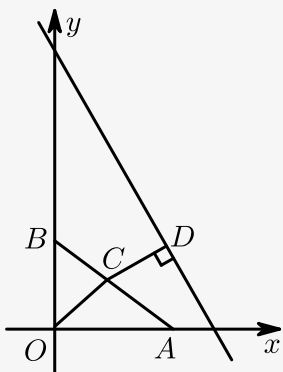
故选B .

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求直线的方程

9. 在平面直角坐标系中， A 、 B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为（ ）.
- A. $\frac{3}{4}\pi$ B. $\frac{4}{5}\pi$
 C. $(6 - 2\sqrt{5})\pi$ D. $\frac{5}{4}\pi$

【答案】 B

【解析】 设圆的半径为 R ，如下图所示， $CD = R$ ，



根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可知 $OC = R$,

要使圆 O 的面积最小 , 那么只需半径 R 最小 ,

当点 O, C, D 在一条直线上时 , 半径取到最小值 ,

则原点到直线 $2x + y - 4 = 0$ 的距离是 $2R$,

$$\text{那么 } 2R = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} ,$$

$$\text{所以 } R = \frac{2}{\sqrt{5}} ,$$

$$\text{则圆的面积 } S = \pi R^2 = \frac{4}{5} \pi .$$

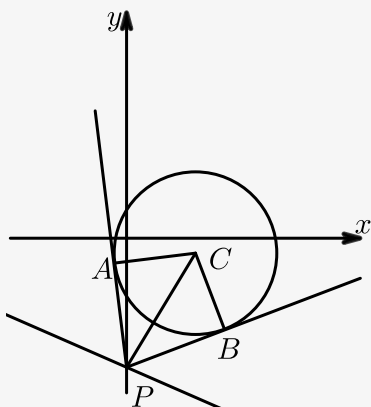
【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

10. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$, 若直线 $y = 2kx - 4$ 上存在点 P , 使得过点 P 的圆 C 的两条切线互相垂直 , 则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $k \leq -\frac{3}{8}$
 B. $k \leq -\frac{3}{8}$ 或 $k \geq 0$
 C. $k \leq -\frac{3}{2}$
 D. $k \leq -\frac{2}{3}$ 或 $k \geq 0$

【答案】 D

【解析】



已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$, 且圆心为 $C(1, -2)$, 半径 $r = \sqrt{2}$,

若直线 $y = 2kx - 4$ 上总存在点 P , 使得过点 P 的圆 C 的两条切线垂直 ,

根据过点 P 的圆 C 的两条切线垂直可知四边形 $APBC$ 为正方形，

$$\text{则 } PC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\text{故只需要圆心 } C(1, -2) \text{ 到直线 } y = 2kx - 4 \text{ 的距离 } d = \frac{|2k - 4 + 2|}{\sqrt{4k^2 + 1}} \leq 2,$$

$$\text{解得 } k \leq -\frac{2}{3} \text{ 或 } k \geq 0.$$

故选D.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

11. 已知 $\odot C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ ，直线 $l: x + 2y + 2 = 0$ ， M 为直线 l 上的动点，过点 M 作 $\odot C$ 的切线 MA ， MB ，切点为 A ， B ，当四边形 $MACB$ 的面积取最小值时，直线 AB 的方程为（ ）.

- A. $x + 2y - 1 = 0$ B. $x + 2y + 1 = 0$ C. $x - 2y - 1 = 0$ D. $x - 2y + 1 = 0$

【答案】 B

【解析】 $\odot C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ 的标准方程为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ ，

则圆心 $C(1, 1)$ ，半径 $r = 2$ 。

$$\text{因为四边形 } MACB \text{ 的面积 } S = 2S_{\triangle CAM} = |CA| \cdot |AM| = 2|AM| = 2\sqrt{|CM|^2 - 4}$$

要使四边形 $MACB$ 面积最小，则需 $|CM|$ 最小，

此时 CM 与直线 l 垂直，

$$\text{直线 } CM \text{ 的方程为 } y - 1 = 2(x - 1),$$

$$\text{即 } y = 2x - 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases},$$

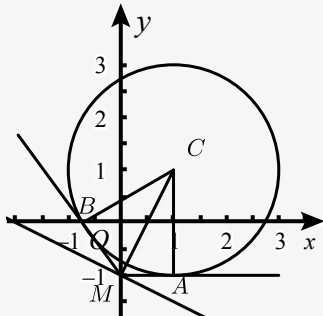
$$\text{解得 } M(0, -1).$$

$$\text{则 } |CM| = \sqrt{5},$$

$$\text{则以 } CM \text{ 为直径的圆的方程为 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4},$$

$$\text{与 } \odot C \text{ 的方程作差可得直线 } AB \text{ 的方程为 } x + 2y + 1 = 0.$$

故选B.



【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；点到直线的距离公式；直线的斜截式方程

🔗 切线段的长度

12. 若过直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 上一点 M 向圆 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ 作一条切线于切点 T , 则 $|MT|$ 的最小值为 ().

A. $\sqrt{10}$

B. 4

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】圆 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ 的圆心坐标为 $(2, -3)$, 半径为 2,

要求 $|MT|$ 的最小, 则圆心到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离最小,

$$\text{为 } \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4,$$

$$\therefore |MT| \text{ 的最小值为 } \sqrt{4^2 - 4} = 2\sqrt{3},$$

故选: D.

【标注】【知识点】点到直线的距离公式

13. 从点 $P(2, -1)$ 向圆 $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + m^2 = 0$ 作切线, 当切线长最短时 m 的值为 ().

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】圆的方程可以化为 $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 1$, 圆心 $C(m, 1)$, 半径为 1,

$$\text{切线长最短时, } CP \text{ 最小, } |CP| = \sqrt{(m - 2)^2 + 4},$$

所以 $m = 2$ 时, CP 最小, 切线长最短.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】圆的切线的相关问题

🔗 半圆问题

14. 方程 $\sqrt{1 - x^2} = kx + 2$ 有唯一解, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $k = \pm\sqrt{3}$

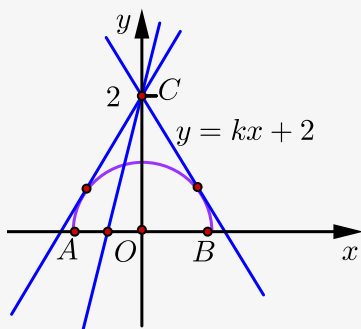
B. $k \in (-2, 2)$

C. $k < -2$ 或 $k > 2$

D. $k < -2$ 或 $k > 2$ 或 $k = \pm\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】 $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ ，表示以原点为圆心、半径为1的圆的上半圆（含端点A、B），



设 $y_2 = kx + 2$ ，表示经过定点 $C(0, 2)$ 且斜率为 k 的一条直线，

当直线 $y_2 = kx + 2$ 与半圆 $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ 相切时，原方程有唯一解，

此时原点到直线的距离等于1，得 $\frac{|2|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$ ，

解之得 $k = \pm\sqrt{3}$ ，

当直线在 x 轴上的交点位于 A、B 之间时，原方程也有唯一解，

$\therefore k_{AC} = 2$ 且 $k_{BC} = -2$ ，

$\therefore$ 线在 x 轴上的交点位于 A、B 之间时， $k < -2$ 或 $k > 2$ ，

综上所述，原方程有唯一实数解时， $k < -2$ 或 $k > 2$ 或 $k = \pm\sqrt{3}$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】求斜率的范围；圆的切线的相关问题

15. 若直线 $y = k(x-4) + 2$ 与曲线 $x = \sqrt{4-y^2}$ 恰有两个交点，则实数 k 的取值范围是（ ）。

A. $\left[1, \frac{4}{3}\right)$

B. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

C. $\left[1, \frac{5}{3}\right)$

D. $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

【答案】A

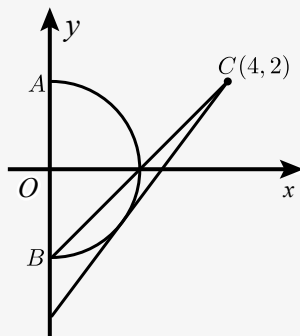
【解析】 $\because x = \sqrt{4-y^2}$ ，

$$\therefore x^2 = 4 - y^2 (x \geq 0),$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4,$$

又 $\because y = k(x-4) + 2$ 恒过 $C(4, 2)$ ，

设 $A(0, 2)$ ， $B(0, -2)$ ，



$$\begin{aligned}
&\because y = k(x-4) + 2, \\
&\therefore kx - y + 2 - 4k = 0, \\
&\frac{|2-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2, \\
&\therefore |2k-1| = \sqrt{k^2+1}, \\
&\therefore 4k^2 + 1 - 4k = k^2, \\
&\therefore 3k^2 = 4k, \\
&\therefore k = \frac{4}{3} \text{ 或 } 0, \\
&CB: y-2 = \frac{4}{4}(x-4) \\
&y = x-2, \\
&\text{由图知 } k \in \left[1, \frac{4}{3}\right), \\
&\text{故选A.}
\end{aligned}$$

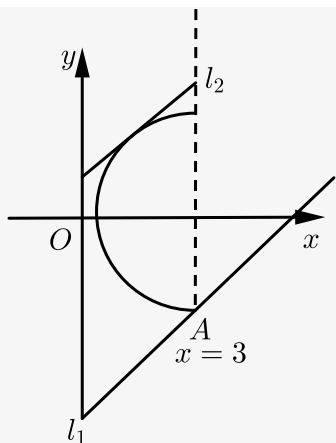
【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求参数

16. 若直线 $y = x + b$ 与曲线 $x = 3 - \sqrt{4 - y^2}$ 有公共点，则实数 b 的取值范围是 () .

- A. $[-3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$ B. $[-3 - 2\sqrt{2}, -1]$
C. $[-5, -3 + 2\sqrt{2}]$ D. $[-3, -3 + 2\sqrt{2}]$

【答案】 C

【解析】 $\because x = 3 - \sqrt{4 - y^2}$,
 $\therefore x \leq 3$,
 $\therefore x - 3 = -\sqrt{4 - y^2}$,
 $\therefore (x-3)^2 + y^2 = 4 (x \leq 3)$,
 圆心 $(3, 0)$ 半径为 2,
 $A(3, -2)$,
 将 $(3, -2)$ 代入 $y = x + b$,
 $-2 = 3 + b$,
 $b = -5$,
 $\because y = x + b$,
 $\therefore x - y + b = 0$,
 $\frac{|3 - 0 + b|}{\sqrt{2}} = 2$,
 $\therefore |3 + b| = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore 3 + b = 2\sqrt{2}$ 或 $3 + b = -2\sqrt{2}$,
 由图知:



$$b = 2\sqrt{2} - 3,$$

综上 $-5 \leq b \leq 2\sqrt{2} - 3$.

故选C.

【标注】【知识点】直线与圆的位置判断

17. 若直线 $x + y - m = 0$ 与曲线 $y = 2 - \sqrt{-x(x+2)}$ 没有公共点, 则实数 m 的取值范围是 ().

A. $[3 - \sqrt{2}, 4]$

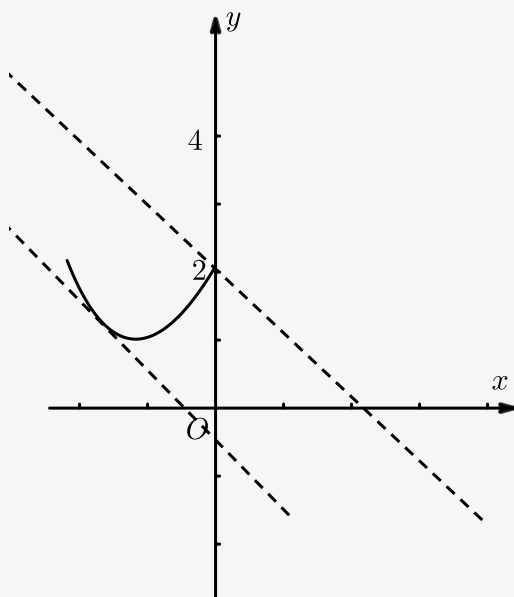
B. $(-\infty, 3 - \sqrt{2}) \cup (4, +\infty)$

C. $[3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}]$

D. $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

【答案】 D

【解析】



$$\because y = 2 - \sqrt{-x(x+2)} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad (y \leq 2),$$

$\therefore$ 曲线为 $(-1, 2)$ 为圆心, 半径为 1 的下半圆, 临界状态为直线过点 $(0, 2)$,

此时 $m = 2$ 与直线与半圆相切时,

$$\text{相切时满足 } d = \frac{|-1 + 2 - m|}{\sqrt{2}} = 1,$$

解得 $m = 1 - \sqrt{2}$ 或 $1 + \sqrt{2}$, 舍去较大的 $1 + \sqrt{2}$,

$\therefore m > 2$ 或 $m < 1 - \sqrt{2}$ 时无交点.

故选D.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

【素养】数学运算

 根据几何意义求解问题

18. 已知实数 x, y 满足 $6x + 8y - 1 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{7}{10}$

【解析】 根据题意, 设 $t = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$,
实数 x, y 满足 $6x + 8y - 1 = 0$, 则点 (x, y) 在直线 $6x + 8y - 1 = 0$ 上,
 t 的几何意义为直线 $6x + 8y - 1 = 0$ 上点 (x, y) 与 $(0, 1)$ 之间的距离,
点 $(0, 1)$ 到直线 $6x + 8y - 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|8 - 1|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{7}{10}$,
则 t 的最小值为 $\frac{7}{10}$.
故答案为: $\frac{7}{10}$.

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系; 两点间距离公式

19. 已知 $P(a, b)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 上任意一点, 则 $\frac{b-1}{a+1}$ 最大值是 _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】 设 $k = \frac{b-1}{a+1}$, 则 k 表示直线 MA 的斜率, 其中 $A(-1, 1)$ 是定点,
 $\therefore M(a, b)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 上,
 $\therefore$ 圆 C 与直线 AM 有公共点,
圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 化为: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$,
而直线 MA 的方程为: $y - 1 = k(x + 1)$, 即 $kx - y + k + 1 = 0$,
则有: C 点到直线 MA 的距离不大于圆 C 的半径,
即: $\frac{|k - 2 + k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 1$,
解得: $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$,
 $\therefore \frac{b-1}{a+1}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

【标注】【知识点】点到直线的距离公式; 斜率计算

20. 已知点 $P(x, y)$ 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则 $3x + 4y$ 的最小值为 ()

A. 5

B. 1

C. 0

D. -5

【答案】 D

【解析】 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, 则 $3x + 4y = 3 \cos \theta + 4 \sin \theta = 5 \sin(\theta + \varphi)$, 所以 $3x + 4y$ 最小值为-5.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 圆的切线的相关问题

3. 圆系方程

1. 相交的两圆的圆系方程

过两已知圆 $f_i(x, y) = x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0 (i = 1, 2)$ 的交点的圆系方程为

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0$$

即 $f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0 (\lambda \neq -1)$.

【特别说明】

当 $\lambda = -1$ 时, 方程变为 $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$,

表示过两圆的交点的直线 (当两圆是同心圆时, 此直线不存在)

- ①当两圆相交时, 此直线为公共弦所在直线;
- ②当两圆相切时, 此直线为两圆的公切线;
- ③当两圆相离时, 此直线为与两圆连心垂直的直线.

2. 过直线与圆交点的圆系方程

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相交,

则方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$ 表示过直线 l 与圆 C 的两个交点的圆系方程.

4. 圆与圆的位置关系

条件转化

21. 已知原点到直线 l 的距离为1, 圆 $(x - 2)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 4$ 与直线 l 相切, 则满足条件的直线 l 有 _____ 条.

【答案】 3

【解析】 由已知, 原点到直线 l 的距离为1, 点 $(2, \sqrt{5})$ 到直线 l 的距离为2,

所以满足条件的直线 l 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $(x - 2)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 4$ 的公切线，显然这两个圆外切，故这两个圆有两条外公切线和一条内公切线，故满足条件的直线 l 有3条。

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

22. 若存在四条直线，使得点 $P(-3, 0)$ 与点 $Q(0, 4)$ 到该直线的距离分别为 a 和2，则实数 a 的取值范围为_____。

【答案】 $(0, 3)$

【解析】 以 $P(-3, 0)$ 为圆心作一个半径为 a 的圆，
以 $Q(0, 4)$ 为圆心作一个半径为2的圆，
则存在四条直线，使得点 $P(-3, 0)$ 与点 $Q(0, 4)$ 到该直线距离分别为 a 和2可转化为圆 P 与圆 Q 有4条公切线，
即圆 P 与圆 Q 相离。
又 $\because P(-3, 0), Q(0, 4)$ ，
 $\therefore |PQ| = 5$ ，
 $r_P = a, r_Q = 2$ ，
 $\therefore a + 2 < 5$ ，
 $\therefore a < 3$ ，
 $\because a$ 表示距离，
 $\therefore a > 0$ ，
 $\therefore a$ 的取值范围是 $(0, 3)$ 。

【标注】【知识点】圆与圆的位置判断

23. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，点 P 为直线 $x + 2y - 4 = 0$ 上一动点，过点 P 向圆 C 引两条切线 PA, PB ， A, B 为切点，则直线 AB 经过定点()。

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$

B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
D. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

【答案】 B

【解析】 根据题意，点 P 为直线 $x + 2y - 4 = 0$ 上一动点，则设 $P(4 - 2m, m)$ ，
 $\because PA, PB$ 是圆 C 的切线，
 $\therefore CA \perp PA, CB \perp PB$ ，

$\therefore AB$ 是圆 C 以 PC 为直径的两圆的公共弦，

可得以 PC 为直径的圆的方程为 $[x - (2 - m)]^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = (2 - m)^2 + \frac{m^2}{4}$ ，①

又圆 C 的方程为： $x^2 + y^2 = 1$ ，②，

①-②得： AB 的方程为： $2(2 - m)x + my = 1$ ，

可得 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 满足上式，即 AB 过定点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ，

故选：B．

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题