

04圆与圆的位置关系练习题

求解公切线条数

1. 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 14 = 0$ 都相切的直线有() .

- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

【答案】 C

【解析】 $\because$ 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 14 = 0$ 的方程可化为:

$$C_1: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 1; C_2: (x-7)^2 + (y-1)^2 = 36;$$

$\therefore$ 圆 C_1, C_2 的圆心分别为 $(3, -2), (7, 1)$;

半径为 $r_1 = 1, r_2 = 6$.

$$\therefore \text{两圆的圆心距} |C_1C_2| = \sqrt{(7-3)^2 + (1+2)^2} = 5 = r_2 - r_1,$$

$\therefore$ 两个圆外切.

$\therefore$ 它们只有1条内公切线, 2条外公切线.

故选: C.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

2. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 10x - 4y - 52 = 0$, 则两圆公切线条数为() .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 = 0$, 即 $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 4$, 圆心 $C_1(1, -6)$, 半径 $r = 2$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 + 10x - 4y - 52 = 0$, 即 $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 81$, 圆心 $C_2(-5, 2)$, 半径 $R = 9$,

$$\text{所以圆心距} d = \sqrt{(1+5)^2 + (-6-2)^2} = 10,$$

因为 $9 - 2 < d < 9 + 2$, 所以两圆相交,

故两圆公切线条数为2.

故选B.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

3. 圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 的公切线有() .
 A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

【答案】 D

【解析】 两圆的圆心半径分别为： $C_1(2, -1)$ ， $r_1 = 2$ ， $C_2(-2, 2)$ ， $r_2 = 2$ ，
 $|C_1C_2| = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-2)^2} = 5$ ，
 可得 $|C_1C_2| > r_1 + r_2$ ，即两圆相离，两圆相离时，有4条公切线。
 故选D。

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ ，圆
 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ ，则两圆的公切线的条数是() .
 A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

【答案】 B

【解析】 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 的圆心坐标为 $(1, -2)$ ，半径为3，
 圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 的圆心坐标为 $(-1, 1)$ ，半径为2，
 则圆心距为： $\sqrt{(-1-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{13} \in (3-2, 3+2)$ ，故两圆相交，
 故两圆的公切线的条数是2条。
 故选B。

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

根据公切线条数求解参数值或取值范围

5. 若圆 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ 与圆 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = a+5$ 有且仅有三条公切线，则 $a = ()$.
 A. -4 B. -1 C. 4 D. 11

【答案】 C

【解析】 两圆外切，则有且仅有3条公切线 $\Rightarrow$ 圆心距为两圆半径之和 $\Rightarrow$ 圆心距
 $d = \sqrt{[1-(-2)]^2 + [3-(-1)]^2} = 5$ ，
 $r_1 = 2$ ， $r_2 = \sqrt{a+5} \Rightarrow r_1 + r_2 = d \Rightarrow 2 + \sqrt{a+5} = 5 \Rightarrow a = 4$ ，
 故选C。

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

6. 已知圆 $A: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $B: (x - m)^2 + (y + m)^2 = m^2 (m > 0)$ 有且仅有两条公切线, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(2\sqrt{2} - 2, 2\sqrt{2} + 2)$

【解析】 $|m - 2| < \sqrt{2}m < m + 2$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

7. 两圆 $x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 4by - 1 + 4b^2 = 0$ 恰有三条公切线, 若 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为().
- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. 1 D. 3

【答案】 C

【解析】 由题意可得, 两圆相外切, 两圆的标准方程分别为 $(x + a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y - 2b)^2 = 1$, 圆心分别为 $(-a, 0), (0, 2b)$, 半径分别为2和1, 故有

$$\sqrt{a^2 + 4b^2} = 3,$$

$$\therefore a^2 + 4b^2 = 9,$$

$$\therefore \frac{a^2 + 4b^2}{9} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + 4b^2}{9a^2} + \frac{a^2 + 4b^2}{9b^2}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4b^2}{9a^2} + \frac{a^2}{9b^2} \geq \frac{5}{9} + 2\sqrt{\frac{4}{81}} = 1,$$

当且仅当 $\frac{4b^2}{9a^2} = \frac{a^2}{9b^2}$ 时, 等号成立.

故选C.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件; 两圆的公切线条数及方程

8. 两个圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条公切线, 则 ab 的最大值为().
- A. 5 B. $\frac{9}{2}$ C. 4 D. $\frac{3}{2}$

【答案】 B

【解析】 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ 的标准方程为 $(x + a)^2 + y^2 = 4$;
圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0$ 的标准方程为 $x^2 + (y - b)^2 = 1$.

∵由公切线有3条可知两圆外切，

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = 3,$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$\therefore ab \leq \frac{9}{2},$$

故选：B.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；两圆的公切线条数及方程

9. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条公切线，则 $a + b$ 的最大值为_____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 从两个圆有三个公切线可知两圆外切，分别将两圆方程化为标准方程可得：

$$C_1: (x + a)^2 + y^2 = 4, C_2: x^2 + (y - b)^2 = 1,$$

圆心分别为 $C_1(-a, 0)$ ， $C_2(0, b)$ ，半径分别为 $r_1 = 2$ ， $r_2 = 1$ ，

$$\text{则有 } |C_1C_2|^2 = a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2 = 9,$$

$$\text{而 } a + b = \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} = 3\sqrt{2},$$

当且仅当 $a = b = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时等号成立.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

【素养】 逻辑推理；数学运算

求解公切线方程

10. 坐标平面内有两个圆 $x^2 + y^2 = 16$ 和 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$ ，这两个圆的内公切线的方程是_____.

【答案】 $3x - 4y - 20 = 0$

【解析】 圆 $x^2 + y^2 = 16$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$ ，半径为4；

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0, \text{ 即 } (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1 \text{ 的圆心坐标为 } (3, -4), \text{ 半径为 } 1$$

,

∴圆心距为5，等于 $4 + 1$ ，

∴两圆外切，

$$\text{两圆连心线的方程为 } y = -\frac{4}{3}x,$$

$$\text{与 } x^2 + y^2 = 16 \text{ 联立，可得切点的坐标为 } \left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right).$$

∴两个圆的内公切线的方程是 $y + \frac{16}{5} = \frac{3}{4} \left(x - \frac{12}{5} \right)$, 即 $3x - 4y - 20 = 0$.

故答案为: $3x - 4y - 20 = 0$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, 直线 l 的方程为 $2x + y = 0$.

求圆 C 与单位圆 O 的所有公切线的方程.

【答案】 (1) 圆 C 与圆 O 所有的公切线 $x = 1$ 或 $7x - 24y + 25 = 0$ 或

$$(6 + \sqrt{6})x - 4y + 2 \pm 3\sqrt{6} = 0.$$

【解析】 (1) 因为圆 C 的方程是 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$,

圆心坐标为 $(3, 4)$ 半径为 2 ,

单位圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆心 $O(0, 0)$, 半径为 1 ,

当公切线斜率不存在时, $x = 1$ 恰好为两圆的公切线, 如图所示,

则另一条内公切线与 $x = 1$ 是关于 OC 所在的直线方程对称,

$$\text{所以 } l_{OC}: y = \frac{4}{3}x,$$

$$\text{即 } 4x - 3y = 0,$$

与 $x = 1$ 交点 A 为 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ 取 $x = 1$ 上另一点为 $(1, 0)$, 关于 l_{OC} 的对称点为 (m, n) ,

$$\text{则有 } \begin{cases} 4 \times \frac{m+1}{2} - 3 \times \frac{n}{2} = 0 \\ \frac{n}{m-1} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{25} \\ n = \frac{28}{25} \end{cases},$$

由 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ 和 $\left(-\frac{4}{25}, \frac{28}{25}\right)$ 所确定的直线方程为 $7x - 24y + 25 = 0$,

还有当两条外公切线, 其中, 如图,

$$EF \text{ 所在的直线由三角形相似可得 } HO = OC\sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

又 H 在 OC 直线上, 所以点 $H(-3, -4)$,

则设外切线方程为 $y + 4 = k(x + 3)$,

即 $kx - y + 3k - 4 = 0$, 则圆心 $O(0, 0)$ 到 l_{EF} 的距离为 1 ,

$$\text{即 } OE = \frac{|3k - 4|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1,$$

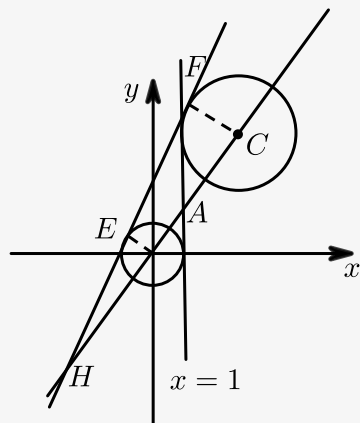
$$\text{即 } (3k - 4)^2 = 1 + k^2,$$

$$\text{解得 } k = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{所以外切线为 } y + 4 = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{4}(x + 3),$$

$$\text{化简得 } (6 + \sqrt{6})x - 4y + 2 + 3\sqrt{6} = 0 \text{ 或 } (6 - \sqrt{6})x - 4y + 2 - 3\sqrt{6} = 0.$$

综上，圆 C 与圆 O 所有的公切线 $x = 1$ 或 $7x - 24y + 25 = 0$ 或 $(6 \pm \sqrt{6})x - 4y + 2 \pm 3\sqrt{6} = 0$ 。



【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程；点或直线的对称问题

🔗 求解公共弦所在直线方程

12. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 的公共弦所在的直线方程是 () .

- A. $x + y + 1 = 0$ B. $x + y - 3 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $x - y - 3 = 0$

【答案】 C

【解析】 由于两圆的公共弦的端点是两圆的公共交点，既满足一个圆的方程，又满足另一个圆的方程，把圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 的方程相减即得公共弦所在的直线方程为 $x - y + 1 = 0$ 。

故选C。

【标注】【知识点】相交弦所在直线方程

🔗 求解公共弦

13. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ 相交于两点。

- (1) 求两圆的公共弦所在直线的方程。
(2) 求两圆的公共弦长。

【答案】 (1) $x + 2y - 1 = 0$ 。

(2) $2\sqrt{5}$ 。

【解析】 (1) 设两圆的交点为 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 A ， B 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \text{两式相减得 } x + 2y - 1 = 0,$$

此方程即为过 A, B 两点的直线方程,

所以两圆的公共弦所在直线的方程为 $x + 2y - 1 = 0$.

(2) 圆 C_1 可化为 $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$, 圆 C_1 的圆心为 $C_1(-1, -4)$,

半径长 $r_1 = 5$,

$C_1(-1, -4)$ 到直线 $x + 2y - 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$,

则弦长 $|AB| = 2\sqrt{r_1^2 - d^2} = 2\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题；相交弦所在直线方程