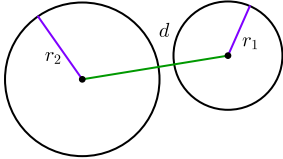
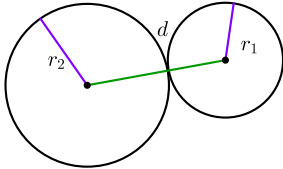
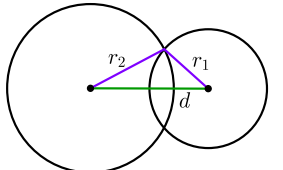
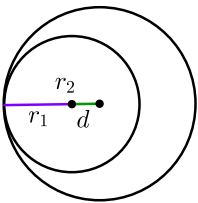
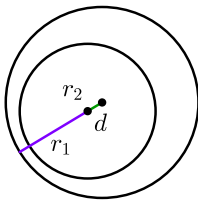


04圆与圆的位置关系

1. 圆与圆的位置关系

圆与圆的位置关系的判断方法

①**几何法**：设两圆的圆心距为 d ，则位置关系表示如下：

位置关系	关系式	图示	公切线
<u>外离</u>			<u>四条</u>
<u>外切</u>			<u>三条</u>
<u>相交</u>			<u>两条</u>
<u>内切</u>			<u>一条</u>
<u>内含</u>			<u>无</u>

【备注】【答案】 ① $d > r_1 + r_2$ ② $d = r_1 + r_2$ ③ $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
④ $d = |r_1 - r_2|$ ⑤ $0 \leq d < |r_1 - r_2|$

②代数法

设由两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$$

有两组不同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆 相交 ;

有两组相同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆 相切 ;

无实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆 相离 .

求解公切线条数

【备注】 【金金备注】 此处删去了判断两圆位置关系的基础题，可以借助以下公切线条数问题引导学生回答两圆的位置

1. 若圆 $C_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ，圆 $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ ，则 C_1, C_2 的公切线条数为 () .
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】 依题意，圆 $C_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ ，圆心为 $(1, 2)$ ，半径为3，
圆 $C_2 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 36$ ，圆心为 $(3, 5)$ ，半径为6，
因为 $|C_1C_2| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \in (3, 9)$ ，
故圆 C_1, C_2 相交，
则有2条公切线．
故选B．

【标注】 【知识点】 两圆的公切线条数及方程

2. 圆 $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ 与圆 $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 的公切线有 () .
- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

【答案】 D

【解析】 圆 $C_1 : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ ，
所以圆心 C_1 为 $(-1, -1)$ ，半径 $r_1 = 2$ ；
圆 $C_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，
所以圆心 C_2 为 $(2, 1)$ ，半径 $r_2 = 1$ ．
所以 $d = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$ ， $r_1 + r_2 = 3$ ．
所以 $d > r_1 + r_2$ ，所以两圆外离，
所以两圆有4条公切线．

【标注】 【知识点】 两圆的公切线条数及方程

3. 与圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 都相切的直线有().
- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

【答案】 A

【解析】 因为圆 $C_1: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 36$, $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 的
 圆心坐标、半径分别为 $(-1, 3)$, 6 ; $(2, -1)$, 1 .
 所以圆心距为 $\sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = 5$,
 因为 $5 = 6 - 1$,
 所以两个圆的关系是内切,
 所以两圆的公切线有1条.
 故选A.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

4. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 34 = 0$, 两圆公切线的条数为().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】 将已知圆化为标准方程形式:
 圆 $C_1: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$;
 圆 $C_2: (x-7)^2 + (y-1)^2 = 16$,
 两圆心分别为 $C_1(3, -2)$, $C_2(7, 1)$. 两圆半径分别为: $r_1 = 1$, $r_2 = 4$,
 两圆心距 $|C_1C_2| = \sqrt{(7-3)^2 + [1-(-2)]^2} = 5$
 $= |r_1 + r_2|$,
 故两圆外切, 它们只有三条公切线.
 故选C.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

5. 已知圆 $A: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $B: (x-2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 圆A与圆B的公切线的条数的可能取值共有().
- A. 2种 B. 3种 C. 4种 D. 5种

【答案】 D

【解析】 两圆的圆心和半径分别为 $A(0,0)$, 半径 $R=1$, $B(2,0)$, 半径为 r ,

$|AB|=2$, 半径之和为 $1+r$, 半径之差为 $r-1$,

若两圆相外切, 即 $1+r=2$, 即 $r=1$ 时, 此时两圆公切线有3条,

若两圆外离, 则 $1+r < 2$, 即 $0 < r < 1$ 时, 两圆公切线有4条,

若两圆相交, 则 $r-1 < 2$ 且 $2 < 1+r$, 即 $-1 < r < 3$ 时, 两圆相交, 此时公切线有2条,

若两圆内切, 即 $r-1=2$, 即 $r=3$ 时, 此时两圆公切线有1条,

若两圆内含, 即 $r-1 > 2$, 即 $r > 3$, 此时两圆公切线为0条,

即圆 A 与圆 B 的公切线的条数的可能取值有5种.

故选D.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

 根据公切线条数求解参数值或取值范围

6. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0$ ($b \in \mathbf{R}$) 恰有三条公切线, 则 $a^2 + b^2 =$ ().

A. 3

B. 5

C. 9

D. 17

【答案】 C

【解析】 由题可知: $x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = 4$,

$x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-b)^2 + 1$,

又当且仅当两圆外切时, 有三条公切线, 此时两圆心距离等于两圆半径之和:

则 $\sqrt{(0+a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1 = 3$,

即 $a^2 + b^2 = 9$.

故选C.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

7. 若 $C: x^2 + y^2 = 5 - m$ 与圆 $E: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 有三条公切线, 则 m 的值为 ().

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. 4

D. 6

【答案】 C

【解析】 若两圆有三条公切线, 等价于两圆相外切,

圆 $E(3,4)$, 半径 $R=4$, 圆 $C(0,0)$, 半径 $r = \sqrt{5-m}$,

则 $|EC| = 4 + \sqrt{5-m} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

即 $\sqrt{5-m}=1$, 得 $5-m=1$,

则 $m=4$,

故选C.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

8. 若圆 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 只有两条公切线, 则 m 的取值范围是().

A. $-11 < m < 9$

B. $9 < m < 19$

C. $19 < m < 21$

D. $m > 21$

【答案】 A

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$ 转化为标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25-m$.

圆心坐标为 $(3, 4)$, 半径 $r_1 = \sqrt{25-m}$.

圆 $x^2 + y^2 = 1$ 圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径 $r_2 = 1$.

要使两圆只有两条公切线, 只要两圆相交,

圆心距为 $d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$,

则 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$,

即 $\begin{cases} \sqrt{25-m} - 1 < 5 \\ \sqrt{25-m} + 1 > 5 \end{cases}$,

解得 $-11 < m < 9$.

故选A.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

9. 圆 $x^2 + y^2 + y + m = 0$ 与其关于直线 $x + 2y - 1 = 0$ 对称的圆总有四条公切线, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(-\frac{11}{20}, \frac{1}{4}\right)$

【解析】 $\because$ 曲线 $x^2 + y^2 + y + m = 0$ 表示圆,

$\therefore 1^2 - 4m > 0$, 解得 $m < \frac{1}{4}$.

易知圆 $x^2 + y^2 + y + m = 0$ 的圆心为 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 半径为 $\sqrt{\frac{1}{4} - m}$.

$\therefore$ 对称圆与已知圆总有四条公切线,

$\therefore$ 对称圆与已知圆相离,

$\therefore \frac{\left|2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right|}{\sqrt{1+2^2}} > \sqrt{\frac{1}{4} - m}$, 解得 $m > -\frac{11}{20}$,

综上所述, m 的取值范围是 $\left(-\frac{11}{20}, \frac{1}{4}\right)$.

故答案为： $\left(-\frac{11}{20}, \frac{1}{4}\right)$.

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系；两圆的公切线条数及方程；点或直线的对称问题；点到直线的距离公式

10. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x$ 和 $C_2: y = -x^2 + a$ ，若直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线，则称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线，公切线上两个切点之间的线段，称为公切线段 .
- (1) 则 a 取什么值时， C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线？写出此公切线的方程 .
- (2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线，证明相应的两条公切线段互相平分 .

【答案】(1) $a = -\frac{1}{2}$ ，切线方程为 $y = x - \frac{1}{4}$.

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 设曲线 C_1 上的切点为 $(m, m^2 + 2m)$ ，

此点处切线斜率为 $2m + 2$ ，

故得切线方程为 $y = (2m + 2)x - m^2$ ，

设曲线 C_2 上的切点为 $(n, -n^2 + a)$ ，

此点处的切线斜率为 $-2n$ ，

故得切线方程为 $y = -2nx + n^2 + a$ ，

若有公切线，则 $\begin{cases} 2m + 2 = -2n \\ -m^2 = n^2 + a \end{cases} \Rightarrow a = -2m^2 - 2m - 1$ ，

若公切线仅有一条，则满足方程组的 m, n 解仅有一组，

即满足等式 $a = -2m^2 - 2m - 1$ 的解 m 仅有一个，

故得 $m = -\frac{1}{2}$ ， $a = -\frac{1}{2}$ ，代入即可求得切线；

故答案为： $a = -\frac{1}{2}$ ，切线方程为 $y = x - \frac{1}{4}$.

(2) 若证互相平分，即证线段中点横纵坐标均坐标为常数即可 .

设满足公切线1的两个切点分别为 $(m_1, m_1^2 + 2m_1)$ ， $(n_1, -n_1^2 + a)$ ，

按照要求，应有 $\begin{cases} 2m_1 + 2 = -2n_1 \\ -m_1^2 = n_1^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 + n_1 = 1 \\ n_1^2 + m_1^2 = -a \end{cases}$ ，

此两点中点坐标为 $\left(\frac{m_1 + n_1}{2}, \frac{m_1^2 + 2m_1 - n_1^2 + a}{2}\right)$ ，

知中点横坐标为常数 $\frac{1}{2}$ ，

将 $n_1^2 = -a - m_1^2$ 代入 $\frac{m_1^2 + 2m_1 - n_1^2 + a}{2} = \frac{2m_1^2 + 2m_1 + 2a}{2}$ ，

而由(1)知 $2m_1^2 + 2m_1 = -1 - a \Rightarrow \frac{2m_1^2 + 2m_1 + 2a}{2} = \frac{a - 1}{2}$ ，

故此两点的中点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a - 1}{2}\right)$ ，与 m_1, n_1 无关，

同理再设点 $(m_2, m_2^2 + 2m_2)$ ， $(n_2, -n_2^2 + a)$ ，

结果相同，故得证 .

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率；求公切线；导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

|| 包罗万象 举一千从

11. 已知两圆 $x^2 + y^2 + 4ax + 4a^2 - 4 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 2by + b^2 - 1 = 0$ 恰有三条公切线，若 $a \in \mathbf{R}$ ， $b \in \mathbf{R}$ ，且 $ab \neq 0$ ，则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为（ ）.
- A. 3 B. 1 C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

【答案】 B

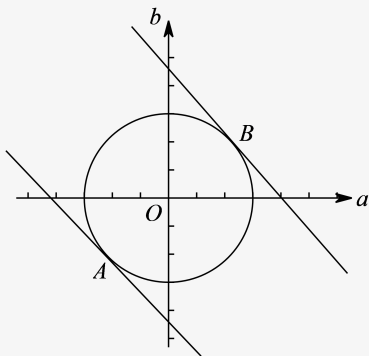
【解析】 由题意得两圆相外切，两圆的标准方程分别为 $(x + 2a)^2 + y^2 = 4$ ， $x^2 + (y - b)^2 = 1$ ，圆心分别为 $(-2a, 0)$ ， $(0, b)$ ，半径分别为2和1，所以 $\sqrt{4a^2 + b^2} = 3$ ，所以 $4a^2 + b^2 = 9$ ，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \times \frac{4a^2 + b^2}{9} = \frac{5}{9} + \frac{b^2}{9a^2} + \frac{4a^2}{9b^2} \geq \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$. 当且仅当 $\frac{b^2}{9a^2} = \frac{4a^2}{9b^2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1$. 故选B.

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

12. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条切线，则 $a + b$ 的最大值为（ ）.
- A. $-3\sqrt{2}$ B. -3 C. 3 D. $3\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 由题意可得，两圆相外切，



两圆的标准方程分别为 $(x+a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-b)^2 = 1$,

圆心分别为 $(-a, 0)$, $(0, b)$, 半径分别为2和1,

故有 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$,

$\therefore a^2 + b^2 = 9$,

故满足条件的点 (a, b) 在以原点为圆心, 以3为半径的圆上.

法一、令 $a + b = t$, 利用线性规划求出 t 的最大值.

如图: 可行域为圆 $a^2 + b^2 = 9$, $t = a + b$ 为目标函数,

点 $A\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 和点 $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 为最优解,

故 $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 使 $a + b = t$ 取得最大值为 $3\sqrt{2}$.

法二、令 $a = 3\cos\alpha$, $b = 3\sin\alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$),

则 $a + b = 3\cos\alpha + 3\sin\alpha = 3\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$,

当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 可得 $a + b$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$.

故选D.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

13. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4ax + 4a^2 - 4 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by + b^2 - 1 = 0$ 只有一条公切线, 若 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值是 _____.

【答案】 9

【解析】 由题意可得两圆相内切, 两圆的标准方程分别为 $(x+2a)^2 + y^2 = 4$,

$x^2 + (y-b)^2 = 1$,

圆心分别为 $(-2a, 0)$, $(0, b)$, 半径分别为2和1, 故有 $\sqrt{4a^2 + b^2} = 1$,

$\therefore 4a^2 + b^2 = 1$,

$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(4a^2 + b^2) = 5 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b^2} \geq 5 + 4 = 9$,

当且仅当 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{4a^2}{b^2}$ 时, 等号成立,

$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 9 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；倒数和形式

求解公切线方程

14. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$, $O_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$, 求两圆的公切线方程 .

【答案】 $y + 4 = 0$, $4x - 3y = 0$, $x = 0$, $3x + 4y + 10 = 0$.

【解析】 圆 O_1 的圆心为 $O_1(-1, -3)$, 半径长 $r_1 = 1$; 圆 O_2 的圆心为 $O_2(3, -1)$, 半径长 $r_2 = 3$, 则 $|O_1O_2| > r_1 + r_2$, 所以两圆外离, 所以两圆有四条公切线 .

设公切线方程为 $y = kx + b$, 即 $kx - y + b = 0$.

$$\text{则有} \begin{cases} \frac{|-k + 3 + b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1, \\ \frac{|3k + 1 + b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 0 \\ b = -4 \end{cases}, \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = 0 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

当斜率不存在时, $x = 0$ 也和两圆相切,

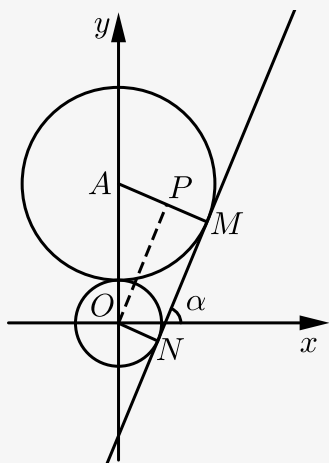
所以所求切线方程为 $y + 4 = 0$, $4x - 3y = 0$, $x = 0$, $3x + 4y + 10 = 0$.

【标注】【知识点】直线的斜截式方程；直线方程的五种形式的联系和使用范围的区别；两圆的公切线条数及方程

15. 直线 l 的倾斜角为锐角, 且和圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 及圆 $A: x^2 + (y - 4)^2 = 9$ 均相切, 则直线 l 的斜率等于 ____ .

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 如图所示,



设直线 l 和圆 O 切于 N 点, 和圆 A 切于 M 点, 作 $OP \perp AM$ 于 P 点,
依题意, 圆 O 和圆 A 外切,
在直角三角形 OAP 中, 由于 $|PA| = 2$, $|AO| = 4$,
因此 $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$, 从而 OP 的斜率等于 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,
而由 OP 和 MN 平行知, 直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$,
故答案为: $\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

16. 已知圆 D 经过点 $M(1, 0)$, 且与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ 切于点 $N(1, 2)$.

(1) 求两圆过点 N 的公切线方程.

(2) 求圆 D 的标准方程.

【答案】(1) $2x - y = 0$.

(2) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

【解析】(1) 圆 C 的标准方程是 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$, 圆心 $C(-1, 3)$.

直线 CN 的斜率 $k_{CN} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$.

因为过 N 的公切线与直线 CN 垂直, 所以公切线的斜率 $k = 2$,

故所求公切线方程 $y - 2 = 2(x - 1)$,

即 $2x - y = 0$.

(2) 直线 CN 方程为 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, 即 $x + 2y - 5 = 0$,

线段 MN 的中垂线方程为 $y = 1$,

解 $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$,

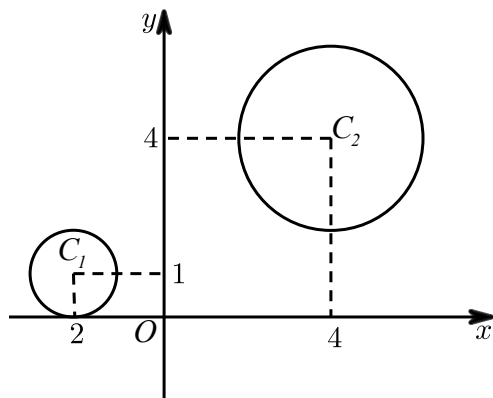
即圆心 $D(3, 1)$.

圆 D 的半径为 $|MD| = \sqrt{(3 - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

所以圆 D 的标准方程是 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程; 圆的标准方程问题

17. 如图, 已知圆 $C_1: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 和圆 $C_2: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$.



(1) 求两圆所有公切线的斜率.

(2) 设 P 为平面上一点, 满足: 若存在点 P 的无穷多条直线 l 与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l 被圆 C_2 截得的弦长是直线 l 被圆 C_1 截得的弦长的 2 倍, 试求所有满足条件的点 P 的坐标.

【答案】 (1) 两圆的公切线斜率为 $k = 0$, $k = \frac{4}{3}$ 或 $k = \frac{18 \pm 2\sqrt{11}}{35}$.

(2) P 的坐标为 $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 或 $(-6, 0)$.

【解析】 (1) 圆 $C_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$,

和圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$,

则圆心 $C_1(-2, 1)$, 半径 $r_1 = 1$,

圆心 $C_2(4, 4)$, 半径 $r_2 = 2$;

且 $|C_1C_2| = \sqrt{(4+2)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{5} > r_1 + r_2$;

$\therefore$ 两圆外离, 两圆公切线的斜率必存在,

设公切线方程为 $y = kx + b$, 即 $kx - y + b = 0$;

$$\text{则} \begin{cases} \frac{|-2k - 1 + b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1 \\ \frac{|4k - 4 + b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} |2k + 1 - b| = \sqrt{1 + k^2} \text{ ①} \\ |4k - 4 + b| = 2\sqrt{1 + k^2} \text{ ②} \end{cases},$$

$\therefore |4k + 2 - 2b| = |4k - 4 + b|$;

(i) 当 $4k + 2 - 2b = 4k - 4 + b$ 时,

$\therefore 2 - 2b = -4 + b$, 解得 $b = 2$;

将 $b = 2$ 代入①得, $|2k - 1| = \sqrt{1 + k^2}$,

$\therefore 3k^2 - 4k = 0$, 解得 $k = 0$ 或 $k = \frac{4}{3}$;

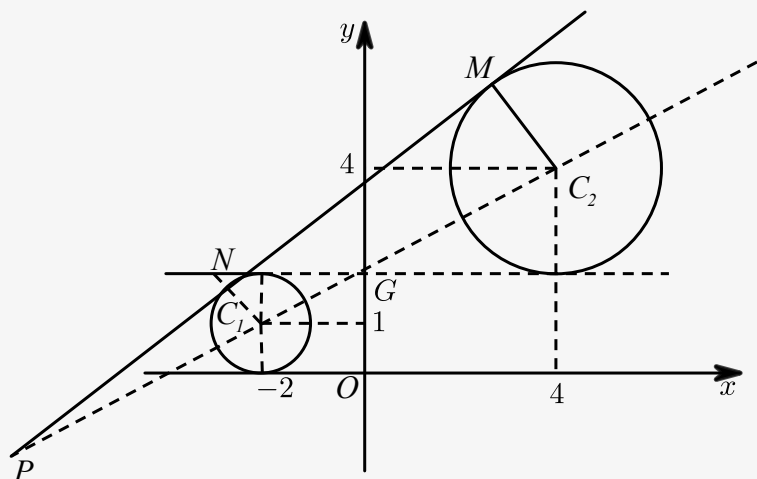
(ii) 当 $4k + 2 - 2b = -(4k - 4 + b)$ 时, $\therefore b = 8k - 2$,

将 $b = 8k - 2$ 代入①得, $|6k - 3| = \sqrt{1 + k^2}$,

$\therefore 35k^2 - 46k + 8 = 0$, 解得 $k = \frac{18 \pm 2\sqrt{11}}{35}$,

综上所述, 两圆的公切线斜率为 $k = 0$, $k = \frac{4}{3}$ 或 $k = \frac{18 \pm 2\sqrt{11}}{35}$.

(2) 设 P 点坐标为 (m, n) , 直线 l 的斜率为 k (依题意知 $k \neq 0$),



则直线 l 的方程为 $y - n = k(x - m)$,

即 $kx - y + n - km = 0$;

因为直线 l 被圆 C_1 截得的弦长的2倍与直线 l 被圆 C_2 截得的弦长相等,

$$\text{即 } 2\sqrt{r_1^2 - d_1^2} = \sqrt{r_2^2 - d_2^2},$$

$$\therefore 4 \left[1 - \left(\frac{|-2k - 1 + n - km|}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)^2 \right]$$

$$= 4 - \left(\frac{|2k - 2 + n - km|}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)^2,$$

整理得: $(3m + 2)k + (4 - 3n) = 0$ 或 $(m + 6)k - n = 0$;

由于关于 k 的方程有无穷多解,

所以 $3m + 2 = 0$ 且 $4 - 3n = 0$, 或 $m + 6 = 0$ 且 $-n = 0$;

解得 $m = -\frac{2}{3}$ 且 $n = \frac{4}{3}$, 或 $m = -6$ 且 $n = 0$;

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 或 $(-6, 0)$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程;圆的弦长的相关问题

2. 两圆的公共弦

1. 两圆的公共弦的定义

当两圆相交时, 必有两个交点, 那么过这两个交点的弦称为两圆的**公共弦**.

2. 公共弦所在直线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ ①} \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \text{ ③}$$

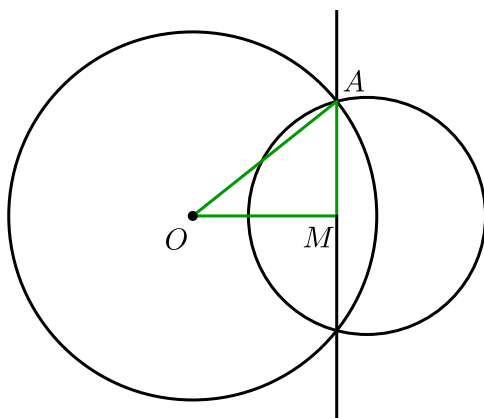
圆 C_1 与 C_2 相交, **③为公共弦所在的直线方程**.

3. 两圆公共弦长的求法

方法一：将两圆的方程联立，解出两交点的坐标，利用两点间的距离公式求弦长；

（某知名不愿意透露姓名的爱智康高数张老师集体备课时曾说：“正常人一般不会用这个办法的，求解计算量太大了”）

方法二：求出公共弦所在直线的方程，利用勾股定理理解如图所示的 $Rt \triangle OAM$ ，求出弦长.



求解公共弦所在直线方程

18. 圆 $x^2 + y^2 + x = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的公共弦所在的直线方程为 _____ .

【答案】 $x + 2y = 0$

【解析】 圆 $x^2 + y^2 + x = 0 \cdots \textcircled{1}$,
圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0 \cdots \textcircled{2}$,
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得 $x + 2y = 0$.
故答案为： $x + 2y = 0$.

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

精进不休 日新月异

19. 圆： $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 和圆： $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 交于 A, B 两点，则 AB 的垂直平分线的方程是 ()
A. $x + y + 3 = 0$ B. $2x - y - 5 = 0$ C. $3x - y - 9 = 0$ D. $4x - 3y + 7 = 0$

【答案】 C

【解析】 解：由题意知圆： $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 和圆： $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 交于 A, B 两点，则求 AB 的垂直平分线的方程，就是求两个圆的圆心的连线方程，
圆： $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 的圆心为 $(2, -3)$ ，圆： $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的圆心为 $(3, 0)$ ，
所以所求直线的方程为： $\frac{y+3}{3} = \frac{x-2}{3-2}$ ，即 $3x - y - 9 = 0$.
故选：C .

【标注】【知识点】直线的垂直

【知识点】求直线的方程

【知识点】直线的两点式方程

【知识点】相交弦所在直线方程

【知识点】圆与圆的位置判断

 求解公共弦长

20. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2y - 6 = 0$ 的公共弦长为() .

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 方法一：两圆方程相减可得公共弦所在直线方程为

$$y = 1,$$

与前一个圆的圆心的距离 $d = 1$ ，半径 $R = 2$ ，

$$\text{则弦长 } l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{3}.$$

故选D .

方法二：公共弦所在直线：

$$x^2 + y^2 - [x^2 + y^2 + 2y - 6] = 4,$$

$$\text{即 } y = 1,$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1),$$

$$d = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

故选D .

【标注】【知识点】圆与圆的位置关系

21. 已知圆 C_1 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$ ，圆 C_2 的方程为 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$.

(1) 判断两圆的位置关系 .

(2) 求公共弦所在的直线方程 .

(3) 求公共弦的长度 .

【答案】 (1) 相交 .

$$(2) x - 2y + 4 = 0 .$$

$$(3) 2\sqrt{5} .$$

【解析】 (1) 由圆 C_1 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$ ，

圆 C_2 的方程为 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$,

将两圆化为标准方程得,

$$C_1: (x-1)^2 + (y+5)^2 = 50, C_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10,$$

故圆 C_1 的圆心为 $(1, -5)$, 半径为 $r_1 = 5\sqrt{2}$,

圆 C_2 的圆心为 $(-1, -1)$, 半径为 $r_2 = \sqrt{10}$,

$$|C_1C_2| = \sqrt{(1+1)^2 + (-5+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$r_1 + r_2 = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}, |r_1 - r_2| = 5\sqrt{2} - \sqrt{10},$$

可得 $|r_1 - r_2| < |C_1C_2| < r_1 + r_2$,

得两圆相交.

(2) 将两圆方程相减得 $4x - 8y + 16 = 0$,

$$\text{化简得 } x - 2y + 4 = 0,$$

所以公共弦所在直线方程是 $x - 2y + 4 = 0$.

(3) 由(1)知圆 C_1 的圆心为 $(1, -5)$,

$$\text{由(2)知公共弦为 } x - 2y + 4 = 0,$$

设圆心到公共弦的距离为 d ,

$$d = \frac{|1 - 2 \times (-5) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{由此可得, 公共弦长 } b = 2\sqrt{r_1^2 - d^2} = 2\sqrt{50 - 45} = 2\sqrt{5},$$

故公共弦长为 $2\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】相交弦所在直线方程；圆的弦长的相关问题

3. 两圆上点的距离问题

22. 点 P 在圆 $C_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 上, 点 Q 在圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值是_____.

【答案】 $3\sqrt{5} - 5$

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 化为标准方程为 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$, 圆心为 $(4, 2)$, 半径为3,

圆 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 化为标准方程为 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$, 圆心为 $(-2, -1)$, 半径为2,

$\therefore$ 两圆的圆心距为 $3\sqrt{5} > 5$,

$\therefore$ 两圆外离,

$\therefore |PQ|$ 的最小值是两圆的圆心距减去半径的和, 即 $3\sqrt{5} - 5$.

故答案为: $3\sqrt{5} - 5$.

【标注】【知识点】两点间距离公式；圆与圆的位置判断