

03直线与圆的位置关系

1. 圆的方程

1.圆的标准方程

圆心为 $C(a, b)$, 半径为 r 的圆的标准方程是

【备注】 【答案】 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

2.圆的一般方程

形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的二元二次方程,

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 叫做圆的一般方程.

其中, 圆心为_____, 半径为_____

当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程表示_____;

当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程没有实数解, 它_____.

【备注】 【答案】 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$;
当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程表示一个点 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$;
当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程没有实数解, 它不表示任何图形(没有轨迹).

求解圆的方程

1. 以 $A(-1, 2)$, $B(5, -6)$ 为直径两端点的圆的标准方程为 _____.

【答案】 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$

【标注】 【知识点】 圆的标准方程问题

2. 已知圆 C 经过 $A(6, 1)$, $B(3, -2)$ 两点, 且圆心 C 在直线 $x + 2y - 3 = 0$ 上.
求圆 C 的标准方程.

【答案】 (1) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$.

【解析】 (1) 方法一: 由题意设 M 为 A, B 的中点,

$$\text{则 } M\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore k_{MC} = -1, \text{ 线 } MC \text{ 的方程为 } y + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{9}{2}\right),$$

即 $x + y - 4 = 0$,

又 $\because$ 圆心 C 在直线 $x + 2y - 3 = 0$ 上,

$$\text{由 } \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 圆心 $C(5, -1)$,

此时圆 C 的半径 $r = |AC| = |BC| = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

方法二: 圆心 C 在直线 $y = 2x - 4$ 上, 可设圆心

$C(3 - 2b, b)$,

又 $\because$ 圆 C 经过 $A(6, 1)$, $B(3, -2)$ 两点,

$$\therefore r = |AC| = |BC|,$$

$$\therefore \sqrt{(3 + 2b)^2 + (1 - b)^2} = \sqrt{4b^2 + (b + 2)^2},$$

解得 $b = -1$, 此时圆心 $C(5, -1)$,

圆 C 的半径 $r = |AC| = |BC| = \sqrt{5}$.

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

【标注】【知识点】直线的截距式方程; 圆的弦长的相关问题; 圆的标准方程问题

|| 包罗万象 举一千从

3. 若直线 $ax + by + 1 = 0 (a, b > 0)$ 过圆 $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ 的圆心, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 () .
- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

【答案】 C

【解析】 圆 $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ 的圆心 $(-4, -1)$ 在直线 $ax + by + 1 = 0$ 上,

$\therefore -4a - b + 1 = 0$, 即 $1 = 4a + b$ 代入,

$$\text{得 } \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) (4a + b) = 8 + \frac{b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 16 \quad (a > 0, b > 0 \text{ 当且仅当 } 4a = b \text{ 时取等号})$$

则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 16.

故选 C.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

4. 圆 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 关于直线 $3x + 5y + 6 = 0$ 对称的圆的方程为 _____.

【答案】 $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$

【解析】设对称圆的圆心为 (a, b) ,

$$\text{则依题意得} \begin{cases} \frac{b-1}{a-2} = \frac{5}{3} \\ 3 \times \frac{a+2}{2} + 5 \times \frac{b+1}{2} + 6 = 0 \end{cases},$$
$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases},$$

所以所求的圆的方程为 $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 3$.

故答案为： $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 3$.

【标注】【知识点】点或直线的对称问题

|| 精进不休 日新月异

5. 分别根据下列条件, 求圆的方程:

过点 $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$ 和原点.

【答案】(1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$.

【解析】(1) 设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{由题意, } \begin{cases} F = 0 \\ 4 + 2E + F = 0 \\ 16 - 4D + F = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} F = 0 \\ E = -2 \\ D = 4 \end{cases},$$

故所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题; 圆的一般方程问题

🔗 圆的一般方程中参数满足的条件

6. 已知关于 x, y 的方程 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0$.

若方程 C 表示圆, 求 m 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty, 5)$.

【解析】(1) 若方程 C 表示圆,

$$\text{则} 4 + 16 - 4m = 20 - 4m > 0,$$

$$\therefore m < 5,$$

即 m 的取值范围是 $(-\infty, 5)$.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题; 圆的一般方程问题

2. 点与圆的位置关系

点与圆的位置关系的判定

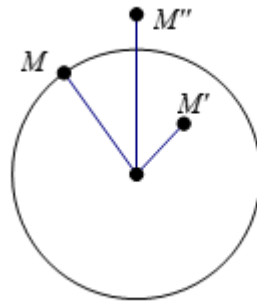
①利用点到圆心的距离来判定：

设点 $M(x_0, y_0)$ 到圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的圆心 C 的距离为 d

若 $|CM| = r$ ，则点 M 在圆 C 上；

若 $|CM| > r$ ，则点 M 在圆 C 外；

若 $|CM| < r$ ，则点 M 在圆 C 内。



②利用圆的标准方程来判定：

点 $M(m, n)$ 在圆 C 上 $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$ ；

点 $M(m, n)$ 在圆 C 外 $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$ ；

点 $M(m, n)$ 在圆 C 内 $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$ 。

7. 已知点 $A(1, 6)$ ， $B(-5, 2)$ ， $C(1, k)$ ，若 C 点在以 AB 为直径的圆外，则 k 的取值范围是_____。

【答案】 $k < 2$ 或 $k > 6$

【解析】 $\because AB$ 为直线，

$$\therefore AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore \text{半径为}\sqrt{13},$$

$$AB \text{中点} M(-2, 4),$$

$\because C$ 在以 AB 为直径的圆外，

$$\therefore CM > \sqrt{13},$$

$$\therefore CM^2 > 13,$$

$$\therefore (-2-1)^2 + (4-k)^2 > 13,$$

$$\therefore (4-k)^2 > 4,$$

$$\therefore 4-k > 2 \text{或} 4-k < -2,$$

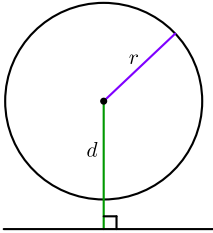
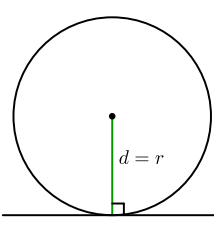
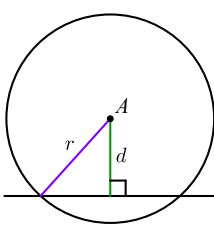
$$\therefore k < 2 \text{或} k > 6.$$

故答案为： $k < 2$ 或 $k > 6$ 。

【标注】【知识点】点与圆的位置关系问题

3. 直线与圆的位置关系

1. 直线与圆位置关系的判定

判定方法	位置关系	相离	相切	相交
	图形			
法一： 代数法	二元二次方程组解的情况	无解	仅有一组解	有两组不同的解
	消元后得到的一元二次方程根的情况	无实数根($\Delta < 0$)	有两个相等的实数根($\Delta = 0$)	有两个不相等的实数根($\Delta > 0$)
法二： 几何法	圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的关系	$d > r$	$d = r$	$d < r$

2. 直线与圆相交的特殊判断方法——定点法

当直线上存在一个位于圆内的点时，该直线与圆**相交**。

🧠 判断直线与圆的位置关系

8. 直线 $x + ay + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 的位置关系是 () .

- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 直线 $x + ay + 1 = 0$ 恒过 $(-1, 0)$,

圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 的圆心 $(0, 1)$, 半径为 2 .

因为 $(-1)^2 + (0 - 1)^2 = 2 < 4$.

点 $(-1, 0)$ 在圆的内部，所以直线与圆相交 .

故选 A .

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 圆的弦长的相关问题

9. 直线 $kx - y - k = 0 (k \in R)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 交点的个数为 () .

- A. 2个 B. 1个 C. 0个 D. 不确定

【答案】 A

【解析】 直线 $kx - y - k = 0$ 过定点 $(1, 0)$,

$\because (1, 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的内部 ,

$\therefore$ 过 $(1, 0)$ 的直线与圆有两个交点 .

故选 A .

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 圆的弦长的相关问题

 根据直线与圆的位置关系求解参数

10. 已知直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$ 有公共点 , 则 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -2]$

B. $[-2, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$

D. $[1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$,

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 - m$,

$\therefore 2 - m > 0$,

$\therefore m < 2$,

圆心为 $(1, 1)$, 半径为 $\sqrt{2 - m}$,

又 $\because$ 圆与直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 有公共点 ,

$\therefore \frac{|1 - 1 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \leq \sqrt{2 - m}$,

$\therefore 2 \leq \sqrt{2 - m}$,

$\therefore 2 - m \geq 4$,

$\therefore m \leq -2$.

综上 $m \leq -2$.

故选 A .

【标注】 【知识点】 点到直线的距离公式

11. 过点 $P(-\sqrt{3}, -1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有公共点 , 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 () .

A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

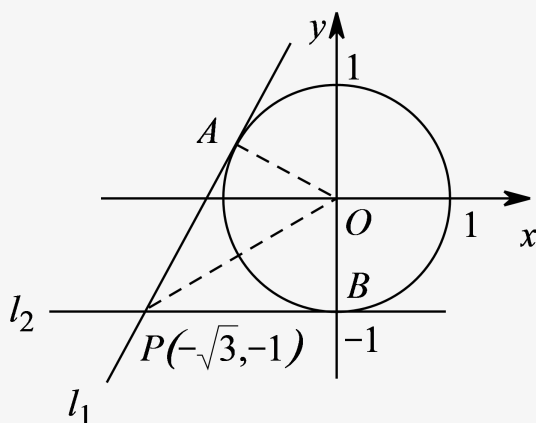
B. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

C. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

D. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$

【答案】 A

【解析】 由题意 $P(-\sqrt{3}, -1)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外部，
故直线斜率一定存在，设为 k ，
则直线方程为



$$y + 1 = k(x + \sqrt{3}), \text{ 即 } kx - y + \sqrt{3}k - 1 = 0,$$

由题直线与圆有公共点，则圆 G 到直线的距离小于或等于半径可得：

$$\frac{|0 - 0 + \sqrt{3}k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 1, \text{ 即 } 3k^2 - 2\sqrt{3}k + 1 \leq k^2 + 1.$$

解得 $0 \leq k \leq \sqrt{3}$ ，故 l_1 的倾斜角取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 。故选 A。

【标注】 【知识点】圆的弦长的相关问题

【知识点】圆的切线的相关问题

【素养】直观想象

【素养】数学运算

圆上点到直线的距离问题

12. P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点，则点 P 到直线 $3x - 4y - 10 = 0$ 的距离的最小值为 _____。

【答案】 1

【解析】 圆心 $(0, 0)$ 到直线距离

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2,$$

圆上动点到直线距离最小值为

$$d - r = 1.$$

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】直线与圆的相离问题

13. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 上的点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离最大为 ()。

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2 + 2\sqrt{2}$ **【答案】** C**【解析】** $\because$ 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 圆心 $(1, 1)$, 半径 $r = \sqrt{2}$ $\therefore$ 圆心到直线的距离 $d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ $\therefore$ 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 上的点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离最大为 $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

故选 C.

【标注】 【知识点】直线与圆的相离问题**【素养】** 数学运算

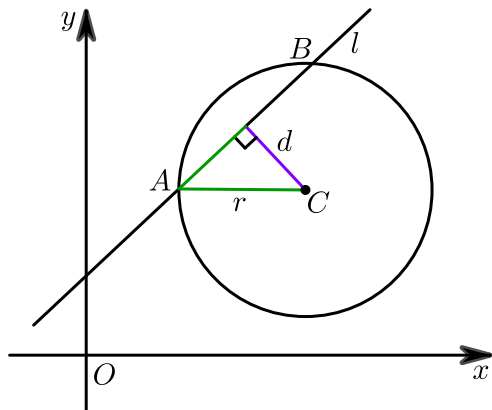
|| 精进不休 日新月异

14. 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 与直线 $l: 4x + 3y - 12 = 0$ 的距离最小的点的坐标是 ().A. $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ B. $(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ C. $(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ D. $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ **【答案】** A**【解析】** 转化成求过圆心且与直线 l 垂直的直线与圆的交点的坐标. 注意数形结合.**【标注】** 【知识点】直线与圆的相离问题**【素养】** 直观想象**【素养】** 数学运算

4. 直线与圆相交时的重点题型

直线与圆相交弦长的求法

方法一：几何法设弦心距为 d , 半径为 r , 弦为 AB , 则有 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.



方法二：代数法

直线 l 与圆交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 l 的斜率存在, 设为 k , 则联立直线方程和圆的方程得方程组.

方法一：解方程组得点 A 、 B 的坐标, 再由两点间的距离公式求弦长 $|AB|$.

方法二：消去一个未知数得到一个一元二次方程, 利用根与系数的关系可得弦长

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}|y_1 - y_2|, \text{ 其中 } k \text{ 为直线的斜率且 } k \neq 0.$$

特别地, 当 $k = 0$ 时, 可直接利用 $|AB| = |x_1 - x_2|$ 计算;

当 k 不存在时, 可直接利用 $|AB| = |y_1 - y_2|$ 计算.



求解弦长

15. 直线 $x - y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长度为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. 4

【答案】 B

【解析】 圆 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 的圆心坐标为 $(0, -1)$, 半径为2,

$$\text{圆心}(0, -1) \text{到直线 } x - y + 1 = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|-1 \times (-1) + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{弦 } AB \text{ 的长度为 } 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - 2} = 2\sqrt{2}, \text{ 故选: B.}$$

【标注】【知识点】圆的弦长相关问题

16. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0$ 截直线 $x + y - 2 = 0$ 所得弦的长度为4, 则实数 a 的值是 ().

A. -8

B. -6

C. -5

D. -4

【答案】 D

【解析】 $\because x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0,$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - a,$$

设圆心 $(1, -1)$ 到弦的距离为 d ,

$$d = \frac{|1 + (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2},$$

$$(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2 - a,$$

$$2 + 4 = 2 - a,$$

$$a = -4.$$

故选：D.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

17. 若直线 $l: ax + y + 2a = 0$ 被圆 $C: x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则 a 的值为().

- A. -7或-1 B. 7或1 C. 7或-1 D. -7或1

【答案】 A

【解析】 圆心 $(0, 4)$ 到直线的距离 $d = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$,
 所以结合点到直线距离公式 $\frac{|4 + 2a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \sqrt{2}$, 解得 $a = -7$ 或 $a = -1$.
 故选A.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题；点到直线的距离公式

18. 已知圆 C 经过三点 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(1, \sqrt{3})$.

- (1) 求圆 C 的标准方程.
 (2) 过点 $M(-3, 0)$ 作直线 l 交圆 C 于 P, Q 两点, 若弦长 $|PQ| = 2$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $x^2 + y^2 = 4$.

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 3)$.

【解析】 (1) 设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 圆 C 经过三点

$A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(1, \sqrt{3})$.

$$\therefore \begin{cases} 4 - 2D + F = 0 \\ 4 + 2D + F = 0 \\ 4 + D + \sqrt{3}E + F = 0 \end{cases}, \text{解得}$$

$$\begin{cases} D = 0 \\ E = 0 \\ F = -4 \end{cases},$$

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为： $x^2 + y^2 = 4$.

(2) 设直线 $l: y = k(x + 3)$, 点 C 到直线 PQ 的距离为 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

$$\therefore |PQ| = 2 \cdot \sqrt{4 - \frac{9k^2}{1 + k^2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{4 - 5k^2}{1 + k^2}},$$

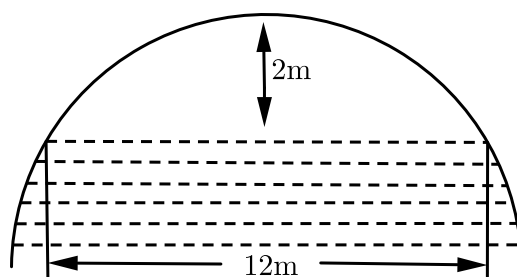
$$\text{由 } 2 \cdot \sqrt{\frac{4-5k^2}{1+k^2}} = 2, \text{ 得 } \frac{4-5k^2}{1+k^2} = 1, \text{ 即 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x+3).$$

【标注】【知识点】圆的一般方程问题；圆的弦长的问题

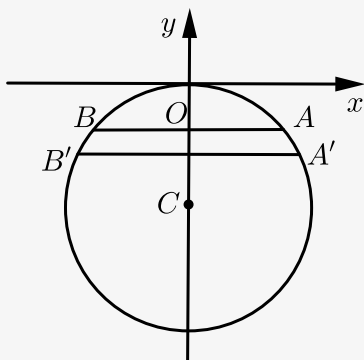
|| 包罗万象 举一千从

19. 如图所示是一座圆拱桥，当水面在如图所示的位置时，拱桥顶部离水面2m，水面宽12m，若水面下降1m，求水面的宽。



【答案】 $2\sqrt{51}\text{m}$.

【解析】 如图，建立平面直角坐标系，



设初始水面在 AB 处，则由已知得 $A(6, -2)$ ，

设圆 C 的半径长为 $r (r > 0)$ ，

则 $C(0, -r)$ ，故圆 C 的方程为 $x^2 + (y + r)^2 = r^2$ ，

将 $A(6, -2)$ 代入，得 $r = 10$ ，所以圆 C 的方程为 $x^2 + (y + 10)^2 = 100$. ①

当水面下降1m到 $A'B'$ 时，设 $A'(x_0 - 3) (x_0 > 0)$.

将 $A'(x_0 - 3)$ 代入①式，得 $x_0 = \sqrt{51}$

所以水面下降1m后，水面宽为 $2\sqrt{51}\text{m}$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题

🕒 最短弦长

20.

已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, 直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0, m \in \mathbf{R}$, 则直线 l 截圆 C 所得弦长 $|AB|$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】 圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的圆心为 $C(1, 2)$ 、半径为5,
 直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$,
 即 $m(2x+y-7) + (x+y-4) = 0$,
 由 $\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$, 解得 $x=3, y=1$, 故直线 l 经过定点 $A(3, 1)$,
 要使直线 l 被圆 C 截得的弦长最短, 需 CA 和直线 l 垂直,
 又 $|CA| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$,
 $\therefore$ 最短的弦长为 $2 \times \sqrt{25-5} = 4\sqrt{5}$.
 故答案为 $4\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】直线过定点问题; 圆的弦长的相关问题

21. 已知圆 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 169$, 过点 $(1, 1)$ 的直线交圆于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的取值范围为 _____ .

【答案】 $[24, 26]$

【解析】 $\because (1, 1)$ 在 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 169$ 的内部, 圆心 $(4, 5)$ 半径为13,
 $|AB|_{\max} = 2 \times 13 = 26$,
 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{13^2 - [(1-4)^2 + (1-5)^2]} = 24$,
 $\therefore |AB| \in [24, 26]$.

【标注】 【知识点】圆的标准方程问题; 圆的弦长的相关问题

|| 精进不休 日新月异

22. 已知动直线 $l: (m+1)x + (m+2)y - m - 3 = 0$ 与 $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$ 交于 A, B 两点, 以弦 AB 为直径的圆为 C_2 , 则圆 C_2 的面积的最小值是 _____ .

【答案】 18π

【解析】 由 $l: (m+1)x + (m+2)y - m - 3 = 0$,
 得 $(x+y-1)m + x+2y-3 = 0$,
 当 $x+y-1=0, x+2y-3=0$ 时, $x=-1, y=2$,

所以动直线 $l: (m+1)x + (m+2)y - m - 3 = 0$ 过定点 $M(-1, 2)$,

又圆 C_1 的圆心为 $C_1(2, -1)$, 半径 $r_1 = 6$,

$$\therefore |MC_1| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} < 6,$$

$\therefore$ 点 M 在圆 C_1 内, 则当 $C_1M \perp l$ 时, 弦 $|AB|$ 最短,

$$\text{此时 } C_1 \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = |C_1M| = 3\sqrt{2},$$

$$\text{所以弦 } |AB| = 2\sqrt{r_1^2 - d^2} = 2\sqrt{36 - 18} = 6\sqrt{2},$$

故圆 C_2 的半径的最小值为 $r_2 = 3\sqrt{2}$, 圆 C_2 的面积最小值为 18π .

【标注】【知识点】直线与圆相关的最值问题

点到直线距离为定值的点个数问题

23. 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: y = x + b$, 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上恰有 4 个点到直线 l 的距离都等于 1, 则 b 的取值范围为 ().

A. $(-1, 1)$

B. $[-1, 1]$

C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【答案】 D

【解析】 由圆 C 的方程: $x^2 + y^2 = 4$, 可得圆 C 的圆心为原点 $O(0, 0)$, 半径为 2,

若圆 C 上恰有 4 个点到直线 l 的距离等于 1, 则 O 到直线 $l: y = x + b$ 的距离 d 小于 1,

$$\text{直线 } l \text{ 的一般方程为: } x - y + b = 0, \therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$\text{解得 } -\sqrt{2} < b < \sqrt{2}, \text{ 即 } b \text{ 的取值范围为 } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

故选: D.

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系; 直线与圆锥曲线的位置关系判断

24. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 则 C 上到 $l: x + y - 4 = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点有 () 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $\because$ 圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 的圆心 $C(1, 1)$,

半径 $r = 2$,

$\therefore$ 圆心 $C(1, 1)$ 到直线 $l: x + y - 4 = 0$ 的距离:

$$d = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$\therefore C$ 上到 $l: x + y - 4 = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点有 2 个.

故选：B .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】圆的弦长的相关问题

5. 直线与圆相切时的重点题型

1. 过圆上一点的切线方程

与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $x_1x + y_1y = r^2$;

与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 ;$$

与圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是

$$x_1x + y_1y + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0.$$

2. 过圆外一点的切线方程

设 $P(x_0, y_0)$ 是圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 外一点, 求过 P_0 点的圆的切线方程.

方法一: 设切点是 $P_1(x_1, y_1)$, 解方程组

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2, \\ (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) = r^2, \end{cases}$$

求出切点 P_1 的坐标, 即可写出切线方程.

方法二: 当两条切线斜率都存在时, 设切线方程是 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $kx - y - kx_0 + y_0 = 0$

, 再由 $\frac{|ka - b - kx_0 + y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r$ 求出待定系数 k , 就可写出切线方程.

当有一条切线斜率不存在时, 斜率不存在的切线方程为 $x = x_0$,

切线斜率存在的切线方程的求法同上.

【备注】【教师备注】一般说来, 方法二比较简便, 但应注意可能遗漏 k 不存在时的切线.

因此, 当解出的 k 值唯一时, 应观察图形, 看是否有垂直于 x 轴的切线.

💡 点在圆上求切线

25. 已知直线 $l: 4x + 3y - 8 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 过圆 $C: x^2 + y^2 - ax = 0$ 的圆心交圆 C 于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(1) 求圆 C 的方程.

(2) 求圆 C 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程.

【答案】(1) $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$(2) y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

【解析】(1) $\because x^2 + y^2 - ax = 0$,

$$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 半径为 $\frac{|a|}{2}$,

$\because 4x + 3y - 8 = 0$ 过圆心,

$$\therefore 4 \times \frac{a}{2} + 0 - 8 = 0,$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

(2) 将 $P(1, \sqrt{3})$ 代入 $(x - 2)^2 + y^2$,

$$(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \text{ 成立},$$

$\therefore P(1, \sqrt{3})$ 在圆上,

设圆心为 M ,

$$M(2, 0),$$

$$\therefore k_{MP} = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 2} = -\sqrt{3},$$

$$\therefore k_{\text{切}} = -\frac{1}{k_{MP}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1),$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆的标准方程问题；圆的切线的相关问题；圆的弦长的相关问题

26. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 10$, 过点 $M(1, 3)$ 作圆 C 的切线, 则切线方程为 ().

- A. $x + 3y - 10 = 0$ B. $x - 3y + 8 = 0$ C. $3x + y - 6 = 0$ D. $3x - y + 10 = 0$

【答案】A

【解析】点 P 在圆 C 上, 设切线方程为 $y = k(x - 1) + 3$,

由于直线与圆相切, $k_{CP} = 3$, 则有 $k \cdot 3 = -1$, 可得 $k = -\frac{1}{3}$,

故直线方程为 $x + 3y - 10 = 0$.

故选 A.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；已知直线和圆的位置关系求直线的方程

27. 过点 $M(3, 1)$ 作圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ 的切线 l , 则 l 的方程为 ().

- A. $x + y - 4 = 0$ B. $x + y - 4 = 0$ 或 $x = 3$
C. $x - y - 2 = 0$ D. $x - y - 2 = 0$ 或 $x = 3$

【答案】 C

【解析】 根据题意，设圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ 的圆心为 C ，即 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$ ，其圆心为 $(1, 3)$ ，又由点 M 的坐标为 $(3, 1)$ ，有 $(3-1)^2 + (1-3)^2 = 8$ ，即点 M 在圆上，则 $k_{MC} = \frac{1-3}{3-1} = -1$ ，则切线的斜率 $k = 1$ ，
则切线的方程为 $y-1 = x-3$ ，
即 $x-y-2=0$ 。
故选C。

【标注】 【知识点】 圆的切线的相关问题；圆的一般方程问题

 点在圆外求切线

28. 过点 $P(2, 4)$ 作圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的切线，则切线方程为 ()。

A. $3x + 4y - 4 = 0$

B. $4x - 3y + 4 = 0$

C. $x = 2$ 或 $4x - 3y + 4 = 0$

D. $y = 4$ 或 $3x + 4y - 4 = 0$

【答案】 C

【解析】 当斜率不存在时， $x = 2$ 与圆相切；当斜率存在时，设切线方程为 $y-4 = k(x-2)$ ，
即 $kx - y + 4 - 2k = 0$ ，则 $\frac{|k-1+4-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ，解得 $k = \frac{4}{3}$ ，
则切线方程为 $4x - 3y + 4 = 0$ 。
故切线方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 4 = 0$ 。

【标注】 【知识点】 圆的切线的相关问题

29. 过点 $P(1, 0)$ 作圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的切线，则切线方程为 ()。

A. $x = 1$ 或 $3x + 4y - 3 = 0$

B. $x = 1$ 或 $3x - 4y - 3 = 0$

C. $y = 1$ 或 $4x - 3y + 4 = 0$

D. $y = 1$ 或 $3x - 4y - 3 = 0$

【答案】 B

【解析】 若切线斜率不存在 $l: x = 1$ ，
 l 到圆心 $(2, 2)$ 距离为1，
又 $\because$ 半径为1满足条件，
若切线斜率存在，
设 $l: y = k(x-1)$ ，
 $kx - y - k = 0$ ，

$$\begin{aligned}\frac{|2k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}} &= 1, \\ \therefore |k-2| &= \sqrt{k^2+1}, \\ \therefore 4-4k &= 1, \\ \therefore k &= \frac{3}{4}, \\ \therefore y &= \frac{3}{4}(x-1), \\ \therefore 3x-4y-3 &= 0.\end{aligned}$$

故选B.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

30. $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(2,2)$, $B(7,-3)$, $C(5,1)$, 求:

(1) $\triangle ABC$ 的外接圆的方程;

(2) 过点 C 作圆 $D: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 的切线 l , 并求切线 l 的方程.

【答案】 (1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

(2) $x=5$ 或 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$.

【解析】 (1) 线段 AB 的中垂线为

$$\begin{aligned}y &= \frac{-1}{\frac{3-2}{7-2}} \left(x - \frac{2+7}{2} \right) + \frac{2-3}{2} \\ &= x-5.\end{aligned}$$

线段 AC 的中垂线为:

$$\begin{aligned}y &= \frac{-1}{\frac{2-1}{2-5}} \left(x - \frac{2+5}{2} \right) + \frac{2+1}{2} \\ &= 3x-9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{则} \begin{cases} y = x-5 \\ y = 3x-9 \end{cases}, \\ \therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases},\end{aligned}$$

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆圆心为 $(2,-3)$, 半径为 $\sqrt{(2-2)^2 + (2+3)^2} = 5$,

$\therefore$ 外接圆方程为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

(2) ①设切线 $l: y = k(x-5)+1$,

则圆心 $(3,0)$ 到直线 l 的距离:

$$\begin{aligned}d &= \frac{|k(3-5)+1-0|}{\sqrt{1+k^2}} = 2, \\ \therefore k &= -\frac{3}{4}, \\ \therefore y &= -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}.\end{aligned}$$

②当斜率不存在时, $x=5$ 也符合.

综上, 则 l 为 $x=5$ 或 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题；圆的切线的相关问题

|| 包罗万象 举一干从

31. 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为() .

A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$
C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$

B. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$
D. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 点 $A(-2, -3)$ 关于 y 轴的对称点为 $A'(2, -3)$,

故可设反射光线所在直线的方程为: $y+3=k(x-2)$,

化为 $kx-y-2k-3=0$,

$\therefore$ 反射光线与圆 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 相切,

$\therefore$ 圆心 $(-3, 2)$ 到直线的距离 $d = \frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$,

化为 $24k^2 + 50k + 24 = 0$,

$\therefore k = -\frac{4}{3}$, 或 $k = -\frac{3}{4}$.

故答案为: B.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

🔍 根据相切关系求解

32. 分别根据下列条件, 求圆的方程:

与两坐标轴均相切, 且圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上.

【答案】 (1) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ 或 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

【解析】 (1) 由圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上, 设圆心的坐标为 $(a, \frac{2a+5}{3})$,

因为圆与两坐标轴相切, 所以 $|a| = \left| \frac{2a+5}{3} \right|$,

解得 $a=5$ 或 $a=-1$.

当 $a=5$ 时, 圆心为 $(5, 5)$, 半径为5,

则圆的方程为 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$;

当 $a=-1$ 时, 圆心为 $(-1, 1)$, 半径为1,

则圆的方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

故所求圆的方程为 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ 或 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题；圆的一般方程问题

33. 已知圆 C 与直线 $x - y = 0$ 及 $x - y - 4 = 0$ 都相切，圆心在直线 $x + y = 0$ 上，则圆 C 的方程为（ ）.

A. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

B. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

【答案】B

【解析】由于圆心在直线 $x + y = 0$ 上，故可设圆心的坐标为 $(a, -a)$ ，

$$\text{所以 } \frac{|a - (-a)|}{\sqrt{2}} = \frac{|a - (-a) - 4|}{\sqrt{2}},$$

解得 $a = 1$ ，

所以半径 $r = \sqrt{2}$ ，

故圆的方程为 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

故选B .

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求圆的方程

|| 精进不休 日新月异

34. 在平面直角坐标系 xOy 中，以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 相切的所有圆中，半径最大的圆的标准方程为 _____ .

【答案】 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

【解析】方法一：由 $mx - y - 2m - 1 = 0$ 可得 $m(x - 2) = y + 1$ ，由 $m \in \mathbf{R}$ 知该直线过定点

$(2, -1)$ ，从而点 $(1, 0)$ 与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ 的距离的最大值为

$$\sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} = 2, \text{ 故所求圆的标准方程为 } (x - 1)^2 + y^2 = 2 .$$

方法二：圆心 $(1, 0)$ 到直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ 的距离：

$$d = \frac{|m - 2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{m + \frac{1}{m}}} \leq \sqrt{2} .$$

$\therefore m = 1$ 时，圆的半径最大为 $\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 所求圆的标准方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

故答案为： $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求圆的方程

35. 由点 $P(1,3)$ 引圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的切线的长是() .

A. 2

B. $\sqrt{19}$

C. 1

D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because$ 点 P 到圆心的距离为 $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$,

圆的半径为3 ,

$\therefore$ 切线长为： $\sqrt{10-9} = 1$.

故选C .

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

【素养】数学运算