

03直线与圆的位置关系

1. 圆的方程

1.圆的标准方程

圆心为 $C(a, b)$ ，半径为 r 的圆的标准方程是

2.圆的一般方程

形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的二元二次方程，

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时，叫做圆的一般方程.

其中，圆心为_____，半径为_____

当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时，方程表示_____；

当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时，方程没有实数解，它_____.

求解圆的方程

1. 以 $A(-1, 2)$ ， $B(5, -6)$ 为直径两端点的圆的标准方程为 _____ .
2. 已知圆 C 经过 $A(6, 1)$ ， $B(3, -2)$ 两点，且圆心 C 在直线 $x + 2y - 3 = 0$ 上 .
求圆 C 的标准方程 .

包罗万象 举一干从

3. 若直线 $ax + by + 1 = 0$ ($a, b > 0$) 过圆 $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ 的圆心，则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 () .
A. 8 B. 12 C. 16 D. 20
4. 圆 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 关于直线 $3x + 5y + 6 = 0$ 对称的圆的方程为 _____ .

精进不休 日新月异

5. 分别根据下列条件，求圆的方程：
过点 $A(-4, 0)$ ， $B(0, 2)$ 和原点 .

圆的一般方程中参数满足的条件

6. 已知关于 x, y 的方程 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0$.
若方程 C 表示圆，求 m 的取值范围 .

2. 点与圆的位置关系

点与圆的位置关系的判定

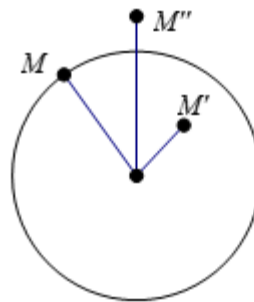
①利用**点到圆心的距离**来判定：

设点 $M(x_0, y_0)$ 到圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的圆心 C 的距离为 d

若 $|CM| = r$ ，则点 M 在圆 C _____；

若 $|CM| > r$ ，则点 M 在圆 C _____；

若 $|CM| < r$ ，则点 M 在圆 C _____。



②利用**圆的标准方程**来判定：

点 $M(m, n)$ 在圆 $C \Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$ ；

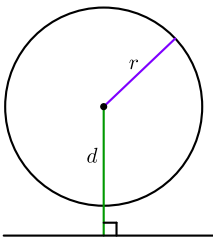
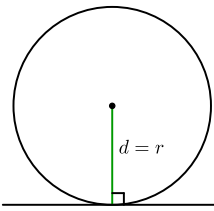
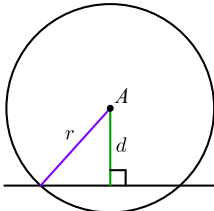
点 $M(m, n)$ 在圆 $C \Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$ ；

点 $M(m, n)$ 在圆 $C \Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$ 。

7. 已知点 $A(1, 6)$ ， $B(-5, 2)$ ， $C(1, k)$ ，若 C 点在以 AB 为直径的圆外，则 k 的取值范围是_____。

3. 直线与圆的位置关系

1. 直线与圆位置关系的判定

	位置关系	相离	相切	相交
判定方法	图形			
法一： 代数法	二元二次方程组解的情况	无解	仅有一组解	有两组不同的解
	消元后得到的一元二次方程根的情况	无实数根($\Delta < 0$)	有两个相等的实数根($\Delta = 0$)	有两个不相等的实数根($\Delta > 0$)
法二： 几何法	圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的关系	$d > r$	$d = r$	$d < r$

2. 直线与圆相交的特殊判断方法——定点法

当直线上存在一个位于圆内的点时，该直线与圆**相交**。

 判断直线与圆的位置关系

8. 直线 $x + ay + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 的位置关系是 () .
 A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定
9. 直线 $kx - y - k = 0 (k \in \mathbb{R})$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 交点的个数为 () .
 A. 2个 B. 1个 C. 0个 D. 不确定

根据直线与圆的位置关系求解参数

10. 已知直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$ 有公共点, 则 m 的取值范围是 () .
 A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$
11. 过点 $P(-\sqrt{3}, -1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有公共点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 () .
 A. $[0, \frac{\pi}{3}]$ B. $[0, \frac{\pi}{6}]$
 C. $(0, \frac{\pi}{3}]$ D. $(0, \frac{\pi}{6}]$

圆上点到直线的距离问题

12. P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则点 P 到直线 $3x - 4y - 10 = 0$ 的距离的最小值为 ____ .
13. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 上的点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离最大为 () .
 A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2 + 2\sqrt{2}$

精进不休 日新月异

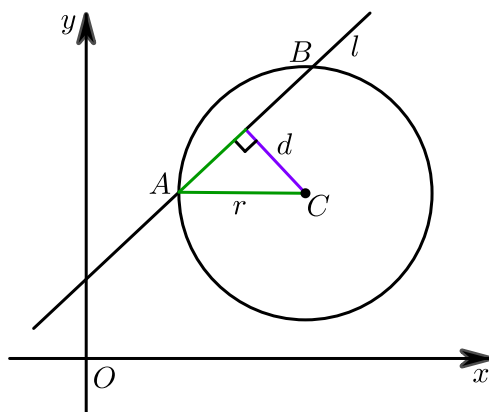
14. 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 与直线 $l: 4x + 3y - 12 = 0$ 的距离最小的点的坐标是 () .
 A. $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ B. $(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$
 C. $(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ D. $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$

4. 直线与圆相交时的重点题型

直线与圆相交弦长的求法

方法一：几何法

设弦心距为 d , 半径为 r , 弦为 AB , 则有 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.



方法二：代数法

直线 l 与圆交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的斜率存在, 设为 k , 则联立直线方程和圆的方程得方程组.

方法一：解方程组得点 A, B 的坐标, 再由两点间的距离公式求弦长 $|AB|$.

方法二：消去一个未知数得到一个一元二次方程, 利用根与系数的关系可得弦长

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}|y_1 - y_2|, \text{ 其中 } k \text{ 为直线的斜率且 } k \neq 0.$$

特别地, 当 $k=0$ 时, 可直接利用 $|AB| = |x_1 - x_2|$ 计算;

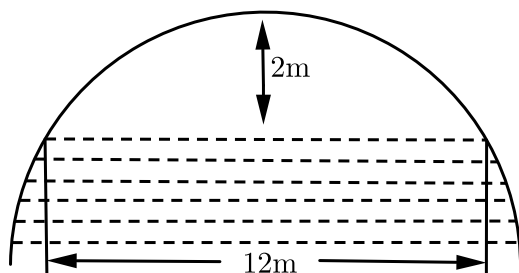
当 k 不存在时, 可直接利用 $|AB| = |y_1 - y_2|$ 计算.

🔗 求解弦长

15. 直线 $x - y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长度为 ().
A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
16. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0$ 截直线 $x + y - 2 = 0$ 所得弦的长度为4, 则实数 a 的值是 ().
A. -8 B. -6 C. -5 D. -4
17. 若直线 $l: ax + y + 2a = 0$ 被圆 $C: x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则 a 的值为 ().
A. -7或-1 B. 7或1 C. 7或-1 D. -7或1
18. 已知圆 C 经过三点 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0), A_3(1, \sqrt{3})$.
(1) 求圆 C 的标准方程.
(2) 过点 $M(-3, 0)$ 作直线 l 交圆 C 于 P, Q 两点, 若弦长 $|PQ| = 2$, 求直线 l 的方程.

📊 包罗万象 举一千从

19. 如图所示是一座圆拱桥, 当水面在如图所示的位置时, 拱桥顶部离水面2m, 水面宽12m, 若水面下降1m, 求水面的宽.



🔗 最短弦长

20. 已知圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, 直线 $l: (2m + 1)x + (m + 1)y - 7m - 4 = 0, m \in \mathbf{R}$, 则直线 l 截圆 C 所得弦长 $|AB|$ 的最小值为 ____.
21. 已知圆 $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 169$, 过点 $(1, 1)$ 的直线交圆于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的取值范围为 ____.

22. 已知动直线 $l: (m+1)x + (m+2)y - m - 3 = 0$ 与 $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$ 交于 A, B 两点, 以弦 AB 为直径的圆为 C_2 , 则圆 C_2 的面积的最小值是 _____.

点到直线距离为定值的点个数问题

23. 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: y = x + b$, 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上恰有4个点到直线 l 的距离都等于1, 则 b 的取值范围为().

A. $(-1, 1)$

B. $[-1, 1]$

C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

24. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 则 C 上到 $1: x + y - 4 = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点有 () 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 直线与圆相切时的重点题型

1.过圆上一点的切线方程

与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $x_1x + y_1y = r^2$;

与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 ;$$

与圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是

$$x_1x + y_1y + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0.$$

2.过圆外一点的切线方程

设 $P(x_0, y_0)$ 是圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 外一点, 求过 P_0 点的圆的切线方程.

方法一：设切点是 $P_1(x_1, y_1)$ ，解方程组

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2, \\ (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) = r^2, \end{cases}$$

求出切点 P_1 的坐标,即可写出切线方程.

方法二：当两条切线斜率都存在时，设切线方程是 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，即 $kx - y - kx_0 + y_0 = 0$

, 再由 $\frac{|ka - b - kx_0 + y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r$ 求出待定系数 k , 就可写出切线方程.

当有一条切线斜率不存在时, 斜率不存在的切线方程为 $x = x_0$,

9 点在圆上求切线

25. 已知直线 $l: 4x + 3y - 8 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 过圆 $C: x^2 + y^2 - ax = 0$ 的圆心交圆 C 于 A 、 B 两点, O 为坐标原点.

(1) 求圆 C 的方程.

(2) 求圆 C 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程.

26. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 10$, 过点 $M(1, 3)$ 作圆 C 的切线, 则切线方程为().

- A. $x + 3y - 10 = 0$ B. $x - 3y + 8 = 0$ C. $3x + y - 6 = 0$ D. $3x - y + 10 = 0$

27. 过点 $M(3, 1)$ 作圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ 的切线 l , 则 l 的方程为().

- A. $x + y - 4 = 0$ B. $x + y - 4 = 0$ 或 $x = 3$
C. $x - y - 2 = 0$ D. $x - y - 2 = 0$ 或 $x = 3$

📍 点在圆外求切线

28. 过点 $P(2, 4)$ 作圆 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 的切线, 则切线方程为().

- A. $3x + 4y - 4 = 0$ B. $4x - 3y + 4 = 0$
C. $x = 2$ 或 $4x - 3y + 4 = 0$ D. $y = 4$ 或 $3x + 4y - 4 = 0$

29. 过点 $P(1, 0)$ 作圆 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 的切线, 则切线方程为().

- A. $x = 1$ 或 $3x + 4y - 3 = 0$ B. $x = 1$ 或 $3x - 4y - 3 = 0$
C. $y = 1$ 或 $4x - 3y + 4 = 0$ D. $y = 1$ 或 $3x - 4y - 3 = 0$

30. $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(2, 2)$, $B(7, -3)$, $C(5, 1)$, 求:

(1) $\triangle ABC$ 的外接圆的方程;

(2) 过点 C 作圆 $D: (x - 3)^2 + y^2 = 4$ 的切线 l , 并求切线 l 的方程.

📊 包罗万象 举一干从

31. 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为().

- A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$
C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$

📍 根据相切关系求解

32. 分别根据下列条件, 求圆的方程:

与两坐标轴均相切, 且圆心在直线 $2x - 3y + 5 = 0$ 上.

33. 已知圆 C 与直线 $x - y = 0$ 及 $x - y - 4 = 0$ 都相切, 圆心在直线 $x + y = 0$ 上, 则圆 C 的方程为().

- A. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ B. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

📊 精进不休 日新月异

34. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为 _____ .

 切线段的长度

35. 由点 $P(1, 3)$ 引圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的切线的长是 () .
- A. 2 B. $\sqrt{19}$ C. 1 D. 4