

等比数列练习题

1. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_6 = 2$ 且 $S_5 = 30$, 则 S_8 等于().

A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

【答案】 B

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等差数列, $a_6 = 2$, $S_5 = 30$,

$$\text{即} \begin{cases} a_1 + 5d = 2 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4d}{2} = 30 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} a_1 = \frac{26}{3} \\ d = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore S_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 32.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4 = 15$, $S_5 = 55$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差是().

A. $\frac{1}{4}$

B. 4

C. -4

D. -3

【答案】 B

【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $S_5 = 55$,

$$\therefore S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \times 5}{2} = 5a_3 = 55, \text{ 解得 } a_3 = 11,$$

又 $a_4 = 15$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4$.

故选B.

【标注】 【知识点】 求等差数列的基本量; 等差数列求和问题

3. 若一个等差数列前3项的和为34, 最后3项的和为146, 且所有项的和为390, 则这个数列的项数为().

A. 13

B. 12

C. 11

D. 10

【答案】 A

【解析】 由已知得: $a_1 + a_2 + a_3 = 34$,

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 146 ,$$

$$\therefore a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} ,$$

$$\therefore 3(a_1 + a_n) = 180 ,$$

$$\therefore a_1 + a_n = 60 ,$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 30n = 390 ,$$

$$\therefore n = 13 .$$

故选A .

【标注】【知识点】等差数列前n项和的性质

4. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = -1$, $a_4 = -5$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前k项和为 $S_k = -35$, 求k的值 .

【答案】 (1) $a_n = -2n + 3$.

(2) $k = 7$.

【解析】 (1) $2d = a_4 - a_2 = -4$,

$$\therefore d = -2 ,$$

$$\therefore a_n = a_2 + (n - 2)d$$

$$= -2n + 3 ,$$

$$\therefore a_n = -2n + 3 .$$

(2) 由 (1) 知, $a_n = -2n + 3$,

$$\therefore a_1 = -2 + 3 = 1 ,$$

$$\therefore S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = -k^2 + 2k = -35 ,$$

$$\text{解得 } k = 7 \text{ 或 } k = -5 ,$$

$$\therefore k \in \mathbf{N}^* ,$$

$$\therefore k = 7 .$$

【标注】【知识点】等差数列求和问题；等差数列求通项问题

5. 已知公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$, 若 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_5 a_7$,

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_5 a_6$, 且 $S_{2n} = 240$, 则公差 $d =$ _____ .

【答案】 $\frac{28}{3}$

【解析】 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

$$\text{由 } a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_5 a_7, \quad a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_5 a_6,$$

$$\text{两式相加可得 } S_{2n} = a_5 a_6 + a_5 a_7 = 240,$$

$$\text{两式相减可得 } nd = a_5 d, \quad \because d \neq 0, \quad \therefore n = a_5,$$

$$\text{由 } a_5(a_6 + a_7) = 240, \text{ 得 } n(a_6 + a_7) = 240,$$

$$\text{又 } \because S_{2n} = n(a_1 + a_{2n}) = 240, \quad \therefore a_1 + a_{2n} = a_6 + a_7,$$

$$\text{可得 } 2n + 1 = 6 + 7 = 13, \text{ 则 } n = 6,$$

$$\therefore a_5 = 6, \text{ 得 } 6(a_1 + a_{12}) = 240,$$

$$\therefore a_1 + a_{12} = a_5 + a_8 = 40, \text{ 则 } 2a_5 + 3d = 2 \times 6 + 3d = 40,$$

$$\text{得 } d = \frac{28}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{28}{3}.$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；等差数列求和问题

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 7$, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{15}| = ()$.

A. 135

B. 210

C. 120

D. 153

【答案】 D

【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 7$,

$$\therefore a_1 = 2 \cdot 1 - 7 = -5, \quad a_2 = 2 \cdot 2 - 7 = -3, \quad a_3 = 2 \cdot 3 - 7 = -1, \quad a_4 = 2 \cdot 4 - 7 = 1$$

,

$$\therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_5|$$

$$= |-5| + |-3| + |-1| + 1 + 3 + \cdots + 23$$

$$= 5 + 3 + 1 + 1 + 3 + \cdots + 23$$

$$= 9 + \frac{12(1+23)}{2}$$

$$= 153.$$

故选D.

【标注】【知识点】等差数列求和问题

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_3 = 30$, $S_6 = 100$, 则 S_9 的值为().

A. 260

B. 130

C. 170

D. 210

【答案】 D

【解析】由题意可得 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$, 成等差数列,

$$\text{故 } 2(S_6 - S_3) = S_3 + (S_9 - S_6),$$

$$\text{代入数据可得 } 2(100 - 30) = 30 + S_9 - 100,$$

$$\text{解之可得 } S_9 = 210,$$

故选: D.

【标注】【知识点】等差数列前 n 项和的性质

8. 设 A_n 和 B_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n+1}{n+3}$, 则 $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{43}{24}$

【解析】依题意, A_n 和 B_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \frac{a_{11}}{b_{11}} &= \frac{\frac{2a_{11}}{2} \times 21}{\frac{2b_{11}}{2} \times 21} \\&= \frac{\frac{a_1 + a_{21}}{2} \times 21}{\frac{b_1 + b_{21}}{2} \times 21} \\&= \frac{A_{21}}{B_{21}} \\&= \frac{\frac{21 \times 21 + 1}{2}}{\frac{21 \times 21 + 1}{2}} \\&= \frac{43}{24}.\end{aligned}$$

故填: $\frac{43}{24}$.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用; 等差数列前 n 项和的性质

9. 两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{5n+2}{n+3}$, 则 $\frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}} = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{149}{12}$ C. $\frac{107}{24}$ D. $\frac{149}{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是等差数列,

$$\begin{aligned}\therefore S_{21} &= \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = \frac{21(a_2 + a_{20})}{2}, \\T_{21} &= \frac{21(b_1 + b_{21})}{2} = \frac{21(b_7 + b_{15})}{2}, \\\therefore \frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}} &= \frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{107}{24}.\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】等差数列前 n 项和的性质；等差数列的性质及应用

10. 设等差数列 $\{a_n\}(n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = -4$, $S_7 = -7$, 则 S_n 的最小值为 _____.

【答案】-10

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 = -4, S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = -7,$$

$$\therefore a_1 + a_7 = -2, a_7 = a_1 + 6d = 2,$$

$$\text{即 } d = 1,$$

$$\text{当 } a_n = 0 \text{ 时, } a_1 + (n-1)d = 0, -4 + n - 1 = 0, n = 5,$$

故当 $n = 4$ 或 5 时, S_n 取得最小值,

$$S_4 = 4 \times (-4) + \frac{4 \times 3}{2} \times 1 = -10.$$

故答案为: -10.

【标注】【知识点】求等差数列前 n 项和的最值

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$, 以 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 S_n 取得最大值时的 n 的值是 ().

A. 21

B. 20

C. 19

D. 18

【答案】B

【解析】方法一: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意得:

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d = 105, \text{ 即 } a_1 + 2d = 35, \text{ ①}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 99, \text{ 即 } a_1 + 3d = 33, \text{ ②}$$

$$\text{由①②联立得 } a_1 = 39, d = -2,$$

$$\therefore S_n = 39n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 40n = -(n-20)^2 + 400,$$

故当 $n = 20$ 时, S_n 达到最大值400.

故选: B.

$$\text{方法二: } a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 105, a_3 = 35,$$

$$\text{又 } (a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) = 3d = -6, d = -2,$$

$$a_1 = 39. S_n = 39n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 40n,$$

所以 $n = 20$ 时, S_n 最大.

故选: B.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

12. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, 且 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是().

A. $d < 0$

B. $a_7 = 0$

C. $S_9 > S_5$

D. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

【答案】C

【解析】 $\because S_6 = S_7$,

$$\therefore a_7 = 0.$$

$$\because S_5 < S_6,$$

$$\therefore a_6 > 0,$$

$$\because S_7 > S_8,$$

$$\therefore a_8 < 0.$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

$\therefore$ 数列首项 $a_1 > 0$, 公差 $d < 0$,

$\therefore S_6$ 与 S_7 均为 S_n 的最大值.

$$S_9 - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3a_7 + a_9 = a_9 < 0, \text{ 即 } S_9 < S_5,$$

故C错误.

【标注】【知识点】等差数列求和问题

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_5 a_{11} = 3$, $a_3 + a_{13} = 4$, 则 $\frac{a_{15}}{a_5}$ 的值为().

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. 3或 $\frac{1}{3}$

D. -3或 $-\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中,

$$\because a_5 \cdot a_{11} = a_3 \cdot a_{13} = 3, a_3 + a_{13} = 4,$$

则 $a_3 = 1, a_{13} = 3$, 或 $a_3 = 3, a_{13} = 1$,

当 $a_3 = 1, a_{13} = 3$ 时, $q^{10} = 3$,

$$\frac{a_{15}}{a_5} = q^{10} = 3,$$

当 $a_3 = 3, a_{13} = 1$ 时, $q^{10} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{a_{15}}{a_5} = q^{10} = \frac{1}{3}.$$

故选C.

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用；等比数列求通项问题

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 10$, $a_4 + a_6 = \frac{5}{4}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为().

A. $a_n = 2^{n-4}$

B. $a_n = 2^{4-n}$

C. $a_n = 2^{n-3}$

D. $a_n = 2^{3-n}$

【答案】 B

【解析】 由题意
$$\begin{cases} a_1 + a_3 = a_1 + a_1q^2 = 10 \\ a_4 + a_6 = a_1q^3 + a_1q^5 = \frac{5}{4} \end{cases}$$
, 求得 $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 数列的通项公式为 $a_n = a_1q^{n-1} = a_n = 2^{4-n}$.

故选: B.

【标注】【知识点】等比数列求通项问题

15. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其公比是 q , 且 $-a_5, a_4, a_6$ 成等差数列, 则 q 等于().

A. 1或2

B. 1或-2

C. -1或2

D. -1或-2

【答案】 C

【解析】 $\because -a_5, a_4, a_6$ 成等差数列,

$$\therefore -a_5 + a_6 = 2a_4,$$

$$\therefore -a_4q + a_4q^2 = 2a_4,$$

$$\therefore q^2 - q - 2 = 0,$$

$$\therefore q = -1 \text{ 或 } 2.$$

故选C.

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用；等差数列的性质及应用

16. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_2, a_3 + 3, a_4$ 成等差数列.

其数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

【答案】 (1) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】 (1) $2(a_3 + 3) = a_2 + a_4$

$$\begin{aligned}
 2a_3 + 6 &= a_2 + a_4 \\
 2a_1q^2 + 6 &= a_1q + a_1q^3, \\
 \text{即 } 6q^2 + 6 &= 3q + 3q^3, \\
 \text{解得 } q &= 2, \\
 \therefore a_n &= 3 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；裂项相消法求和；错位相减法求和

17. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_6 = 11$ ， $a_3 \cdot a_4 = \frac{32}{9}$ 。
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

【答案】 (1) $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$ 。

【解析】 (1) 由题意得：
$$\begin{cases} a_3a_4 = a_1a_6 = \frac{32}{9} \\ a_1 + a_6 = 11 \\ a_1 < a_6 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_6 = \frac{32}{3} \end{cases}.$$

则公比 $q = \sqrt[5]{\frac{a_6}{a_1}} = 2$ ，通项 $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$ 。

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等差数列的性质及应用

18. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 2$ ， $a_4 \cdot a_6 = 64$ ，则 $\frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2}$ 的值是 ()。
- A. 4 B. 8 C. 16 D. 64

【答案】 C

【解析】 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

$$\begin{aligned}
 \because a_3 &= 2, a_4 \cdot a_6 = 64, \\
 \therefore a_1q^2 &= 2, a_1^2q^8 = 64, \\
 \text{解得 } q^2 &= 4, \\
 \text{则 } \frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2} &= \frac{q^4(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} = 4^2 = 16, \\
 \text{故选 } &C.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 + a_2 = 3$ ， $a_3 + a_4 = 12$ ，则 $a_5 + a_6 = ()$ 。
- A. 3 B. 15 C. 48 D. 63

【答案】 C

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等比数列 ,

$$\therefore \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{q^2 \cdot (a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} = q^2 .$$

$$\text{同理 } \frac{a_5 + a_6}{a_3 + a_4} = q^2 = \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} ,$$

$$\therefore a_5 + a_6 = \frac{(a_3 + a_4)^2}{a_1 + a_2} = \frac{12 \times 12}{3} = 48 .$$

故选C .

【标注】 【知识点】 等比数列的概念与通项公式；等比数列的性质及应用

20. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_3 = 2$, $a_1 \cdot a_9 = 16$, 则 $\frac{a_{10} - a_{12}}{a_6 - a_8}$ 的值是 () .

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

【答案】 B

$$\text{【解析】 } \frac{a_{10} - a_{12}}{a_6 - a_8} = \frac{a_{10}(1 - q^2)}{a_6(1 - q^2)} = q^4 ,$$

$$a_3 = 2 , a_1 a_9 = a_5^2 = 16 ,$$

$$\text{则 } a_1 > 0 , a_5 = 4 ,$$

$$\therefore \frac{a_5}{a_3} = q^2 = 2 ,$$

$$\text{故 } q^4 = 4 .$$

故选B .

【标注】 【知识点】 等比数列的概念与通项公式；等比数列的性质及应用